Analízis III. 7. heti feladatok

2018. november 5.

Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$-ban

(ism) 1. Adott két differenciál 1-forma a térben:

$$\omega = f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y + f_3 \mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1 \mathrm{d}x + g_2 \mathrm{d}y + g_3 \mathrm{d}z.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

A fenti differenciálformák külső szorzata, $\omega \wedge \tau$, ennek milyen vektormező feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

(ism) 2. $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, elemei formák $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val való analógiája

Integrálás sokaságokon

3. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma:

(a) $\omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ (b) $\omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$

Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

[HF$_1$] Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x, y, z)\ \mathrm{d}x + f_2(x, y, z)\ \mathrm{d}y + f_3(x, y, z)\ \mathrm{d}z$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\displaystyle\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

[HF$_2$] Fogalmazzuk meg az absztrakt Stokes tételt, ha $n = 2$ és $k = 2$. Melyik klasszikus tételt kapjuk?

4. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett. Elegendő csak akkor, amikor a felület egy kétváltozós differenciáható függvény képe. $M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

5. Igazoljuk, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u, v) \le z \le t(u, v),\ \ (u, v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)