Analízis III. 6. heti feladatok

2018. október 15.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a síkon a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2. Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor $v, w \in \mathbb{R}^n$. Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$, ahol A a két vektort tartalmazó mátrix, $A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$.

3. Mennyi a $v = (1, 0, 1)$ és $w = (0, 1, 0)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe? Látjuk-e ezt szemléletesen is?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az 1-formák külső szorzata antiszimmetrikus. Ezért $\omega \wedge \omega = 0$, ha $\omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$.

   Segítség: lássuk be, hogy az *elemi 1-formák* külső szorzata antiszimmetrikus:
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$. (Figyelem: $\omega \wedge \omega \neq 0$)

6. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k$$

[HF$_1$] Adott $\mathbb{R}^2$-ben két 1-forma: $\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2$, $\tau = b_1\mathrm{d}x_1 + b_2\mathrm{d}x_2$, $a_1, a_2,\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, ahol $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$-ban ill. $\mathbb{R}^n$-ben?

(b) Mi van a "háttér"-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

7. Határozzuk meg dω-t és d(dω)-t az alábbi formákra:
   (a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1x_2x_3\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

8. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f\mathrm{d}x_1,$$
   ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

[HF$_2$] Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.