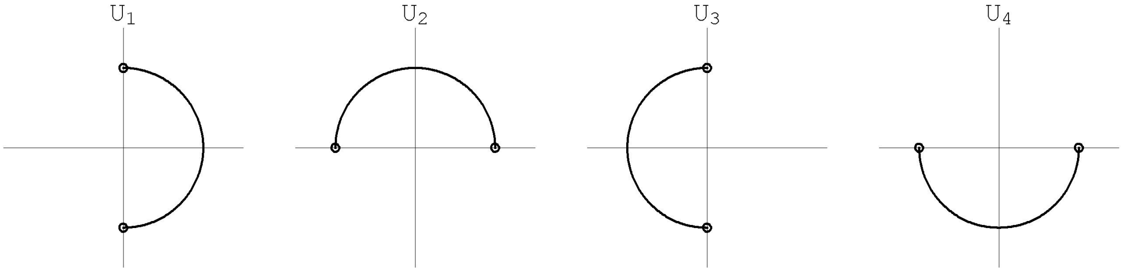
Analízis III. 5. heti feladatok
2017. október 12.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

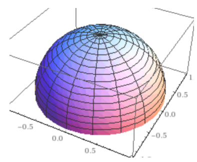
1. (*Az órai anyag folytatása*) Belátjuk, hogy a síkbeli az egységkör (S^1) egydimenziós sokaság. Nyílt lefedést kaphatunk így:



   (a) Írjuk fel U_3, U_4 parametrikus megadását a megfelelő térképekkel.
   (b) Igazoljuk ezek kompatibilitását.
   (c) Mi lesz az S^1 görbe implicit megadása?

2. Tekintsük az (x, y) síkbeli $C = S^1$ egységkört az $\mathbb{R}^3$ térben.
   (a) Adjuk meg ennek a parametrikus illetve implicit felírását.
   (b) Ha $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz az normáltér N_p ebben a pontban? (Ötlet: az implicit megadás alapján egyszerűbb)
   (c) A **tangenstér (érintőtér)** T_p az erre merőleges lineáris altér. Mi lesz ennek egy bázisvektora?

3. Legyen M a háromdimenziós egységgömb felületének az a fele, melyben $z > 0$.



   (a) Igazoljuk, hogy ez két-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^3$-ban, írjuk fel ennek paraméteres megadását.
   (b) Mi köze van M-nek az előző feladatban szereplő C görbének?

4. Legyen most M a háromdimenziós egységgömb egész felülete, ez két-dimenziós sokaság.
   (a) Mi lesz a sokaság implicit megadása?
   (b) Mi lesz a sokaság határa, $\partial M =$?
   (c) Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

[HF$_1$] Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.
   (a) Igazoljuk, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót.
   (b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

5. A $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)$ halmazon definiáljunk egy $\sim$ relációt:
$$(x_1, y_1) \;\sim\; (x_2, y_2), \quad \text{ha} \quad \exists\lambda \in \mathbb{R} \;:\; x_1 = \lambda x_2,\; y_1 = \lambda y_2.$$
   (Például...)
   (a) Igazoljuk, hogy $\sim$ ekvivalencia reláció.
   (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\sim$ a **valós projektív sík** Igazoljuk, hogy ez egy-dimenziós sokaság.

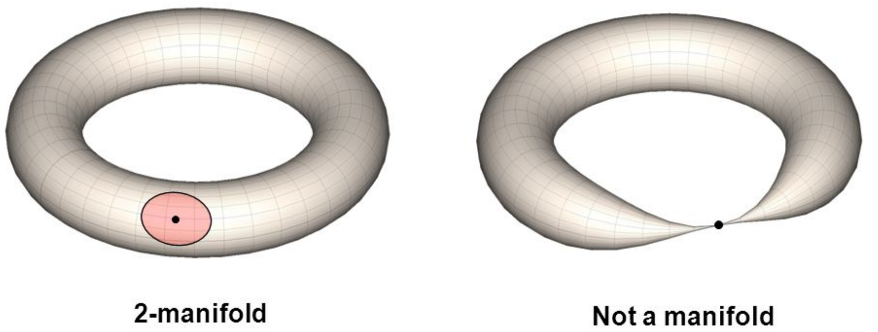


Figure 1. Sokaság definíciójának értelmezése, ellenpélda.

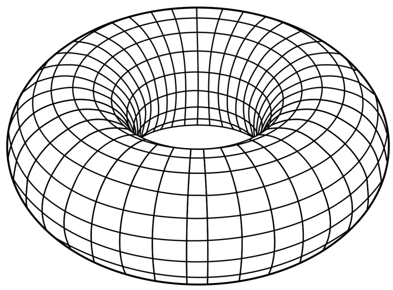
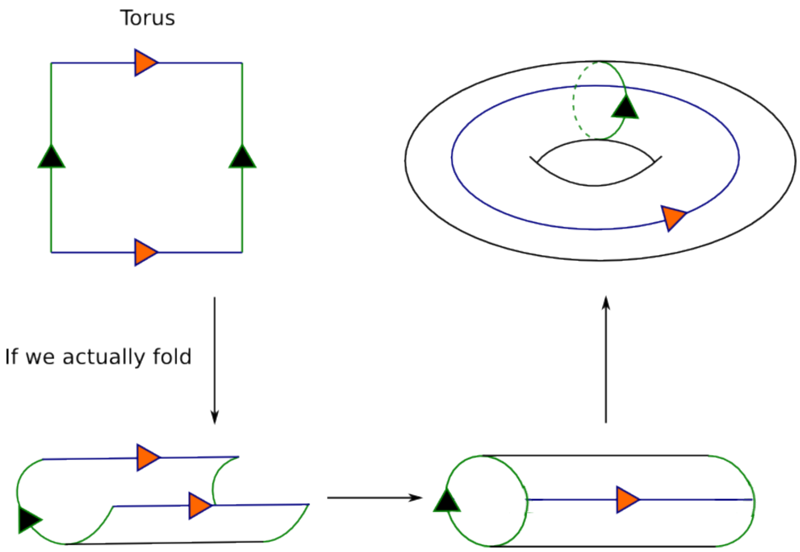


Figure 2. A tórusznak, mint 2D sokaságnak, a lokális koordinátatengelyei.

6. Az $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ halmazon a $\sim$ relációt így értelmezzük:
$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \ \sim \ (y_0, y_1, \ldots, y_n), \quad \text{ha} \quad \exists\lambda \in \mathbb{R} \ : \ y_k = \lambda x_k, \ k = 0, 1, \ldots, n.$$
Igazoljuk, hogy ez a reláció ekvivalencia reláció. P^n jelöli $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ ekvivalenciaosztályokat, ez az n-dimenziós projektív tér.

7. Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság.



D6* Igazolja, hogy $S^3 = \{(z_1, z_2) \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ három-dimenziós sokaság – a négydimenziós térben.

Átvezetés a formákhoz.

Form 1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $T = \left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right|$.

Form 2. Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det{(A^T A)}}$.