

Analízis III. 4. heti feladatok

2017. október 5.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel. (Ismétlés)

1. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, és \mathbf{n} a felület normálvektora. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, t(x, y)) \sqrt{1 + t_x'^2 + t_y'^2} \, d(x, y).$$

Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:

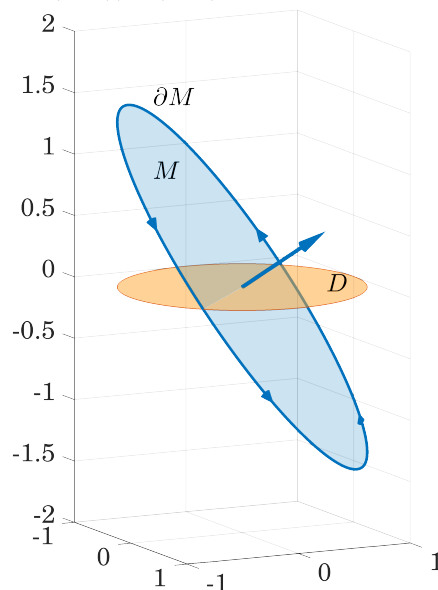
$$\iint_S f(x, y, z) n_3(x, y, z) \, dS = \pm \iint_D f(x, y, t(x, y)) \, d(x, y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.

2. Igazoljuk a Stokes tételt, ha $F(x, y, z) = (y, z, x)$, továbbá M és az $x + y + z = 0$ sík és a $x^2 + y^2 \leq 1$ henger metszete, ∂M a határa egy ellipszis (lásd ábra).
3. Igazoljuk a Stokes tétel alapján, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ skalárpotenciális, akkor $\forall C$ zárt görbén

$$\oint_C F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0.$$

4. Legyen $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Határozzuk meg $F(x, y, z) = (x + y + z, 3x + 2y + 4z, 5x - 3y + z)$ cirkulációját D határa mentén.



[HF₁] Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$. Legyen továbbá $F(x, y, z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.

5. Legyen M az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0, h]$, a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapon \mathbf{n} felfelé mutat. $F(x, y, z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M -re
 - (a) közvetlenül, két felületi integrál összegeként,
 - (b) Stokes tétellel.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

6. A Green tétel segítségével határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet. A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

[HF₂] A Green tétel segítségével számoljuk ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése: $x(t) = 2a \cos(t) + a \cos(2t)$, $y(t) = 2a \sin(t) - a \sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

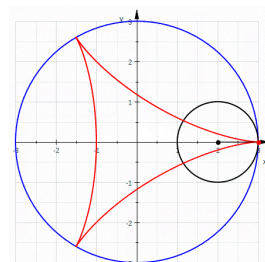
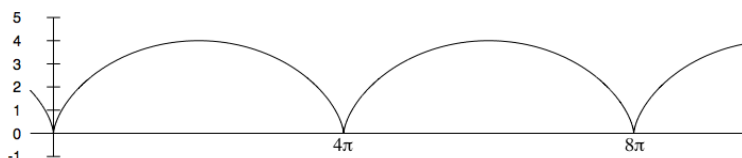


Figure 1. A cikloid és a deltoid

7. $F(x, y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.

D4* A klasszikus Stokes tétel alapján bizonyítsuk be a Green tételt.