Analízis III. 3. heti feladatok

2018. szeptember 24.

Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Potenciálfüggvény.

1. Legyen $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) $\operatorname{div}(F) = ?$, (b) $\operatorname{rot}(F) = ?$

2. Számítsuk ki F divergenciáját és rotációját,
   ha $F(x,y,z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

3. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciálos) az alábbi vektormező:
   $$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$
   Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

4. Számoljuk ki az $F(x,y) = (x^2, 2xy)$ vektormező vonalintegrálját (cirkulációját) a
   $$\gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\right\}$$
   ellipszis mentén.

5. Legyen $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
   (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.
   (b) Mennyi lesz $\int_C F\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ maxinális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.

Felületi integrál. Fluxus.

6. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
   $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2 + {t'_v}^2}\; d(u,v).$$

7. Milyen felületet definiál az $S = \{(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u) \mid u \in [0,1], v \in [0,2\pi]\}$.
   (Mennyi a felszíne?)

8. Legyen egy felület
   $$s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3, \qquad s(u,v) := (u+v, u-v, u),$$
   és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f\;\mathrm{d}S$ felületi integrált.
   Legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F\;\mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.

9. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

[HF$_1$] Legyen M az origó középű, 4 sugarú gömbfelszín felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$.
Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel.

10. Ellenőrizzük a Divergencia tétel állítását abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x, y, z) = (x^2, y^2, 0)$.

11. Ellenőrizzük a Divergencia tétel állítását ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

    [HF$_2$] (a) $F(x, y, z) = (0, 0, yz)$ (b) $G(x, y, z) = (x^2, y^2, yz)$.

12. Igazolja, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén
$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = 0,$$
ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\mathrm{rot}(F) = \mathrm{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?

D3* Legyen $f(x, y, z) = \dfrac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy $\mathrm{div}F = 0$.

(a) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

(b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

F2* (Vonalintegrál, felületintegrál). október 15.-ig 1 pont, október 29.-ig fél pont

1. rész. (Vonalintegrál: pontszám 40%-a)
Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora munkát gyakorol a 4. feladatban megadott $F(x, y)$ erőtér egy anyagi pontra, miközben az anyagi pont a 4. feladatban megadott Γ görbe mentén halad. (Integráljuk az $F(x, y)$-t Γ görbe mentén.

2. rész. (Felületintegrál: pontszám 60%-a)
Matlabban számítsuk ki numerikusan mekkora a *hozama* a 8. feladatban megadott $F(x, y, z)$ vektormező által leírt áramlásnak a 8. feladatban megadott $s(u, v)$ felületen keresztül. Vagyis:
$$\iint_S F(x, y, z)\mathrm{d}\boldsymbol{S} = ? \tag{1}$$
Az $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ értéke legyen változatlan, a felület pedig legyen az egység sugarú gömb $z > 0$ (felső) fele.

Lásd: kiegészítő anyag a honlapon.