Analízis III. 1. heti feladatok

2018. szeptember 10.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel és ábrázoljuk egy Q töltés majd egy elektromos dipólus által egy egységnyi töltésre gyakorolt elektromos erőteret. Rajzoljuk meg a két különböző erőtér erővonalait és szintvonalait.

2. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre

   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.

   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

3. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$.

   (a) Számoljuk ki $F(x, y)$ vektormező Jacobi mátrixát: $DF(x, y) =?$

   (b) Milyen (x, y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?

   (c) Ha F invertálható $(0, 0)$-ban, legyen az inverze G. Mennyi $DG(0, 0)$?

4. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)^T$. Mi lesz a vektormezõ Jacobi mátrixa, $DF =?$

5. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)^T$. $DG =?$

6. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:

   (a) $\text{grad } (fg) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f$.

   (b) $D(fF) = F \cdot \text{grad } f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Valós függvény és vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

7. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a, 0)$, végpontja $B(0, b)$. Írjuk fel pareméterezését.

8. Integráljuk az $F(x, y) = \left(x^2, y^2\right)^T$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.

9. Számítsuk ki az $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{pmatrix}^T$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

[HF$_1$] Adott egy $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}^T$ vektormező által megadott erőtér. Számítsuk ki az erőtér által egy Γ vonal mentén mozgó testre gyakorolt munkáját ($H(x, y, z)$ vonalintegrálját Γ mentén).

   (a) $\Gamma = \left\{\gamma(t) = \left(2t^2, 3t - 5, t\right)^T \mid t \in [0, 3]\right\}$.

   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

10. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in [a, b].$$

   Mi lesz egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x, y)\mathrm{d}l =?$

11. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x, y) = x^2+3y$ skalármezőt a $P(1, 2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \left\{\gamma_1(t) = (t, 2t)^T, t \in [0, 1]\right\} = \left\{\gamma_2(t) = (0.5t, t)^T, t \in [0, 2]\right\}.$$

12. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0, 0)$ és $(1, 1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x, y) = (x, y)^T$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

F1* (Egységkörben folyó áram mágneses mezeje – Biot-Savart). okt 1.-ig 1 pont, okt 15.-ig fél pont

Segédanyag: anal3_szorgalmi_1_vekanal.pdf

A Γ görbe által leírt zárt huzalban I erősségű áram folyik. Biot-Savart törvény segítségével számoljuk ki a keltett mágneses mező értékét a z tengely mentén, ha
$$\Gamma = \left\{\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0, 2\pi)\right\}, \quad \text{vagyis } \boldsymbol{B}(z_1) = ?, \quad B(z_1) = \|\boldsymbol{B}(z_1)\| = ? \tag{1}$$
Biot Savart törvény:
$$\boldsymbol{B}(z_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \big(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\big)}{\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{\gamma}(t)\|^3} \mathrm{d}t, \quad \text{ahol } \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
Megjegyzés. Ez nem egy klasszikus vonalintegrál, ugyanis az integrandusban a skalárszorzat helyett egy vektoriális szorzat szerepel. A z_1, r_1 esetén az index arra vonatkozik, hogy ezen változók az integrálás szempontjából konstansnak tekinthetők.

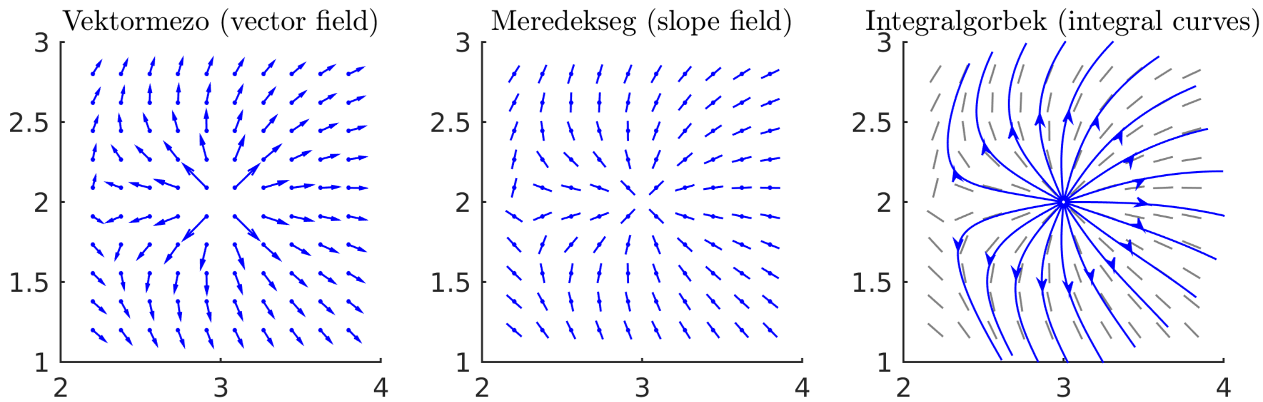

Figure 1. Vektormező ábrázolási módjai

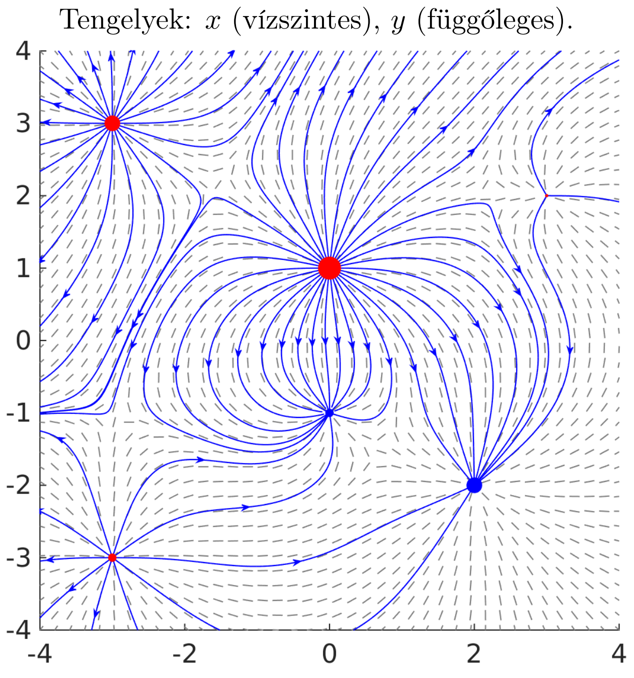

Figure 2. Multipólus elektromos erővonalai és a háttérben az erőtér meredeksége.

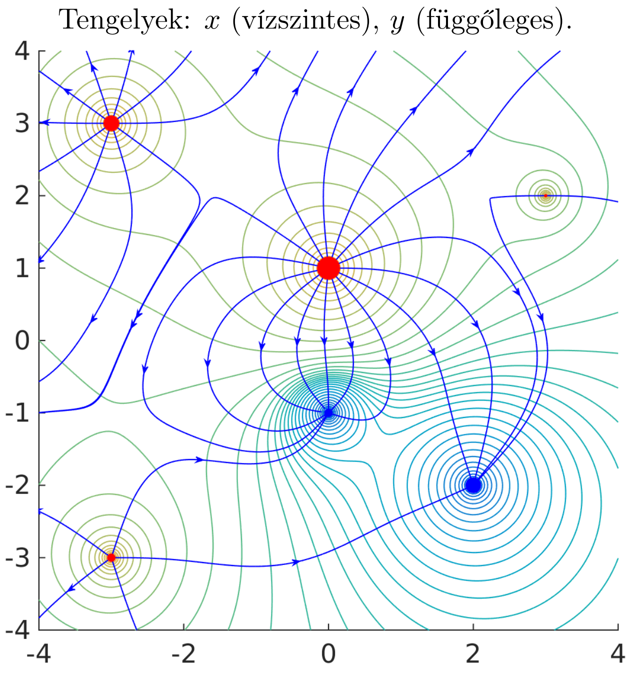

Figure 3. Multipólus elektromos erővonalai és ekvipotenciális görbéi.