Analízis III. 1. heti feladatok
2017. szeptember 14.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
2. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$.
   (a) $DF(x, y) =?$
   (b) Milyen (x, y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?
   (c) Ha F invertálható $(0, 0)$-ban, legyen az inverze G. Mennyi $DG(0, 0)$?
3. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)^T$. Mi lesz a vektormezõ Jacobi mátrixa, $DF =?$
4. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$. $DG =?$
5. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\text{grad}\,(fg) = f \cdot \text{grad}\, g + g \cdot \text{grad}\, f$.
   (b) $D(fF) = F \cdot \text{grad}\, f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén. Vektormező potenciálja.

6. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a, 0)$, végpontja $B(0, b)$. Írjuk fel pareméterezését.
7. Integráljuk az $F(x, y) = \big(x^2, y^2\big)$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.
8. Számítsuk ki az $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.
9. Számítsuk ki az $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \big\{\gamma(t) = \big(2t^2, 3t - 5, t\big) \,\big|\, t \in [0, 3]\big\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.
10. Potenciálosak/e a fenti feladatban szereplő f, G, H vektromezők? Ha igen, írjuk fel egyik potenciálfüggvényüket. (Vajon egyértelmű-e a potenciálfüggvény? Miért?)
11. Egészítsük ki az alábbi állítást (többféle megoldás lehetséges):
    Állítás. *Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő tartomány. $F : S \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor F pontosan akkor potenciálos, ha ....*
    Ez alapján ellenőrizzük le az előző feladatok számolásait.

Analízis III. 2. heti feladatok
2017. szeptember 22.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \begin{pmatrix} y/z \\ z/x \\ x/y \end{pmatrix}$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) div (F) =? (b) rot (F) =?

2. div $\big(\text{grad } \big(|\underline{r}|^5\big)\big)$ =?

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) div $(fF) = \langle F, \nabla f \rangle + f \cdot$ div (F).
   (c) rot $(fF) = \nabla f \times F + f \cdot$ rot (F).
   (d) div $(F \times G) = \langle G, \text{rot }(F)\rangle - \langle F, \text{rot }(G)\rangle$.

4. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciálos) az alábbi vektormező:
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$
   Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

5. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:
$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in [a,b].$$
   Mi lesz egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x,y)\mathrm{d}l$ =?

6. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2+3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \big\{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\big\} = \big\{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\big\}.$$

7. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

8. Legyen $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
   (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.
   (b) Mennyi lesz $\int_C \langle F, \mathrm{d}\boldsymbol{l}\rangle$ maximális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.

D1* Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ függvények gradiense ugyanaz egy $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő tartományban. Igazoljuk, hogy ekkor $\exists c$ konstans, melyre $f(x,y,z) = g(x,y,z) + c$ ebben a D tartományban.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre rot (F) = rot (G). Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?

Analízis III. 3. heti feladatok
2017. szeptember 28.

Felületi integrál. Felület felszínének kiszámítása. Fluxus.

Megj. Egy $S = \{s(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ felület felszínét az $f(x,y,z) = 1$ függvény felületintegráljával lehet kiszámítani, azaz

$$A(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \left\| s'_u \times s'_v \right\| \mathrm{d}(u,v) \tag{1}$$

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u,v,t(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2 + {t'_v}^2}\ \mathrm{d}(u,v).$$

2. Milyen felületet definiál az $S = \{(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u) \mid u \in [0,1], v \in [0,2\pi]\}$.
Mennyi a felszíne?

3. Legyen $F(x,y,z) = (1,0,0)$, és S az $x+y+z = 1$ síknak az a része, ami az első tér-nyolcadba esik. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x+y+z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f\ \mathrm{d}S$ felületi integrált.

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ felületi integrált.

6. M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$.
Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

7. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x,y,t(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z)\ \mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1 + {t'_x}^2 + {t'_y}^2}\ \mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z)\ \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))\ \mathrm{d}(x,y),$$

8. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az integrálandó vektormező:
(*a*) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$ (*b*) $G(x,y,z) = (0,0,yz)$ (*c*) $H(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.
   (a) $F = \nabla f =$? Igazolja, hogy div $F = 0$.
   (b) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?
   (c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

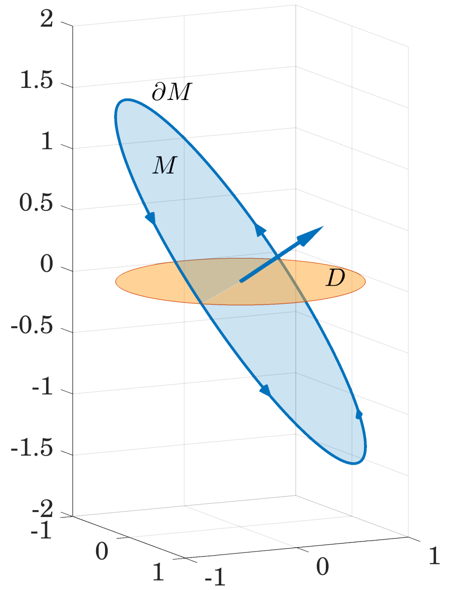
   Megj. A fizikában is találunk ilyen függvényt: az origóba helyezett Q elektromos ponttöltés által keltett elektromos potenciál függvénye:
$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r},\ \text{ahol } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2}$$

Analízis III. 4. heti feladatok
2017. október 5.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel. (Ismétlés)

1. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+{t'_x}^2+{t'_y}^2}\ \mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \pm\iint_D f(x,y,t(x,y))\,\mathrm{d}(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.



2. Igazoljuk a Stokes tételt, ha $F(x, y, z) = (y, z, x)$, továbbá M és az $x+y+z = 0$ sík és a $x^2+y^2 \le 1$ henger metszete, ∂M a határa egy ellipszis (lásd ábra).
3. Igazoljuk a *Stokes tétel alapján*, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos, akkor $\forall C$ zárt görbén
$$\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$
4. Legyen $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$. Határozzuk meg
$$F(x, y, z) = \big(x + y + z, 3x + 2y + 4z, 5x - 3y + z\big)$$
cirkulációját D határa mentén.
5. Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$. Legyen továbbá $F(x, y, z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.
6. Legyen M az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0, h]$, a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapon $\boldsymbol{n}$ felfelé mutat. $F(x, y, z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re
   (a) közvetlenül, két felületi integrál összegeként, (b) Stokes tétellel.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

7. A Green tétel segítségével határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet.
   A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
8. A Green tétel segítségével számoljuk ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése:
   $x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$, $\quad y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

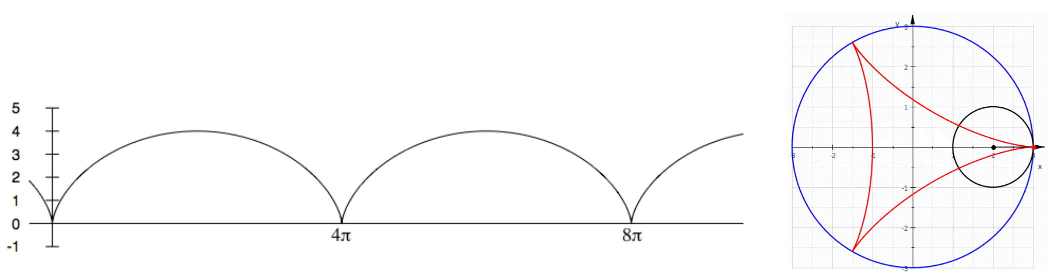


Figure 1. A cikloid és a deltoid

9. $F(x, y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.

D4* A klasszikus Stokes tétel alapján bizonyítsuk be a Green tételt.

Analízis III. 5. heti feladatok
2017. október 12.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1. (*Részben ismétlés, órai anyag volt.*) Lássuk be, hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság.
   (a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel.
   (b) Igazoljuk ezek kompatibilitását.
   (c) Mi lesz a görbe implicit megadása?
   (d) Írjuk fel a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret.

2. Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg, akkor mi lesz ennek a parametrikus illetve implicit megadása? Ha $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz $T_p =?$, $N_p =?$.

3. Igazoljuk, hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban két-dimenziós sokaság:
$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$
   A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével. Mi lesz a sokaság implicit megadása? Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

[HF] 4. Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.
(a) Igazolja, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót.
(b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

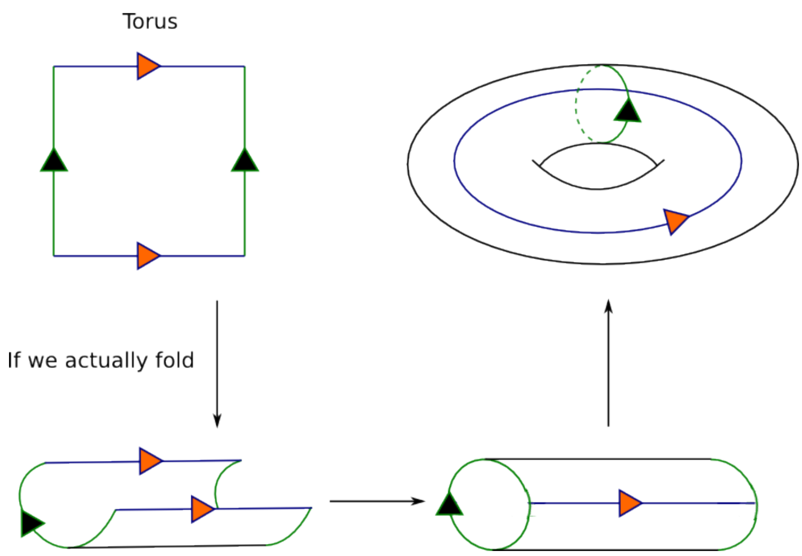
5. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció.

6. Igazoljuk, hogy a valós projektív sík, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$, egy-dimenziós sokaság.
(Ez a p. 143. 9. feladat $n = 1$ esetben.)

7. Igazoljuk, hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

gyakorló: 8 (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det (A^T A)}$.

D5* (p. 143. 8 feladat) Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság. Adjuk meg egy lehetséges paraméterezését.



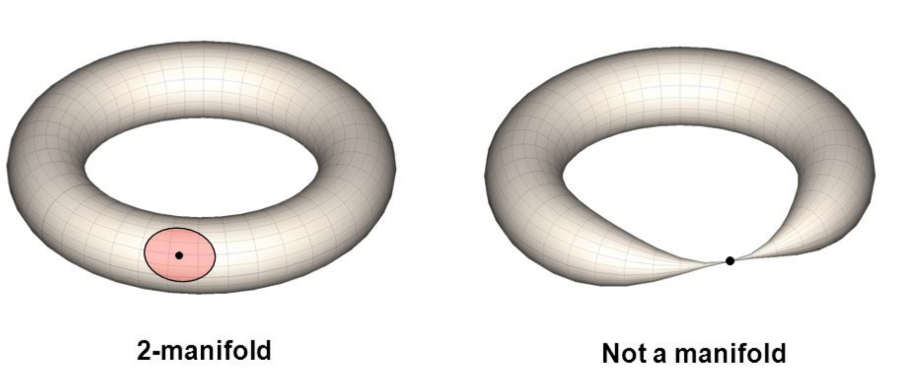


Figure 1. Sokaság definíciójának értelmezése, ellenpélda.

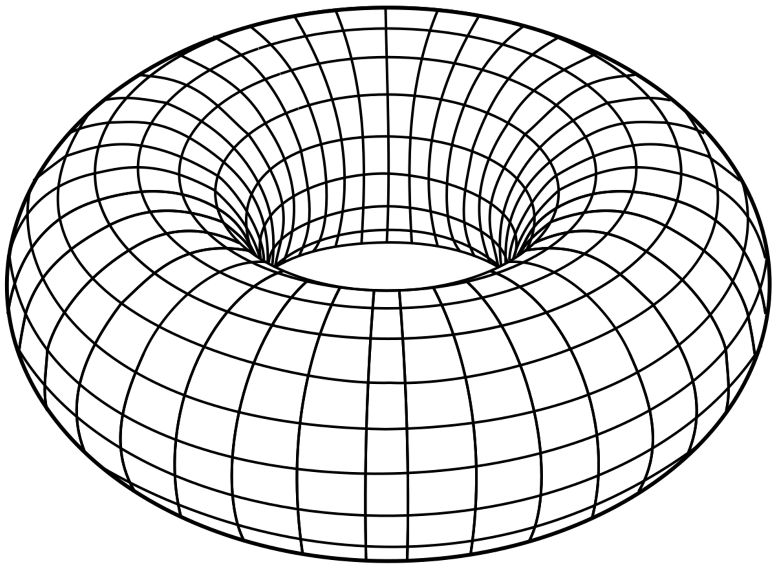


Figure 2. A tórusznak, mint 2D sokaságnak, a lokális koordinátatengelyei.

Analízis III. 6. heti feladatok
2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:
$$v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}. \tag{2}$$
Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

[HF$_1$] 3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \tag{3}$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$. (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = \mathrm{d}x_2$ és $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k$$

8. Definíció 2.2.6. (jegyzet 37. old) szerint számoljuk ki a $\mathrm{d}x_{13} \wedge x_4(A) := (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_4(A)$-t, ha:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

9. Adott $\mathbb{R}^2$-ben két 1-forma: $\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2$, $\tau = b_1\mathrm{d}x_1 + b_2\mathrm{d}x_2$.Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, ahol
$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$
   (a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$-ban ill. $\mathbb{R}^n$-ben?
   (b) Mi van a 'háttér'-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozzuk meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra:
(a) $\omega_1 = e^{x_1} \cos(x_1 x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1x_2x_3 \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

[HF$_2$] 11. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f\mathrm{d}x_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

12. Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

Analízis III. 7. heti feladatok
2017. október 27.

Differenciál formák, külső deriválás $\mathbb{R}^3$-ban.

1. Határozza meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra:
$$\text{(a) } \omega_1 = e^x \cos(xy) \qquad \text{(b) } \omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y \qquad \text{(c) } \omega_3 = xyz\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.$$

2.
   - Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$-ban.
   - deriválás, külső deriválás
   - $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z \longleftrightarrow (f, g, h)$
   - $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, elemei formák $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val való analógiája

3. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:
$$\omega = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z.$$
Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:
$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$
Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál forma differenciál 2-forma:
$$(a)\ \omega = f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \qquad\qquad (b)\ \omega = f(x,y,z)\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$
Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:
$$M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$
Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \ \omega = ?$

[HF] 5 Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\ \mathrm{d}z$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\displaystyle\int_M \ \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

6. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazoljuk, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u,v) \le z \le t(u,v),\quad (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

8. Igazoljuk, hogy ha $F\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén
$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = 0,$$
ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.

Analízis III. 8. heti feladatok
2017. november 10.

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely kőrül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:
$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2. Adott a síkon két pont $A(a, \alpha)$ és $B(b, \beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat összekötő gőrbék kőzül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz.
(Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \Big(2u + \big(u'\big)^2\Big)\,\mathrm{d}x, \qquad u(0) = 0,\ u(1) = 1$$
$$[\mathrm{HF}]\,(b)\quad I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\big(u'\big)^2 - u^2\Big)\,\mathrm{d}x, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0$$

4. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet az alábbi funkcionálok esetén és számoljuk ki annak összes megoldását:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \big(x + u + 3u'\big)\mathrm{d}x \qquad\qquad (b)\quad I(u) = \int_0^2 \big(u + x\,u'\big)\mathrm{d}x$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az alábbi alapfüggvények esetén:
$$(a)\quad F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u\sin x \qquad\qquad [\mathrm{HF}]\,(b)\quad F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$$

Állítás. Az alkalmazásokban leggyakoribb esetében, az alapfüggvény $F(x, u, u')$ nem függ közvetlenül x-től, azaz $F = F(u, u')$ alakú. Ekkor definiáljuk a következő energiafüggvényt:
$$E(x) = F\Big(u(x), u'(x)\Big) - u'(x)F'_{u'}\Big(u(x), u'(x)\Big), \qquad \text{avagy rövidebben: } E = F - u'F'_{u'} \tag{1}$$
Ekkor a stacionárius megoldások meghatározása végett elégséges megoldani az Euler-egyenlettel ekvivalens $E = F - u'F'_{u'} = C_1$ differenciálegyenletet, ahol $C_1 \in \mathbb{R}$ konstans.

---

6. (Minimalis felszínű forgástest) Keressük az $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható,
$$f(0) = f(2) = \frac{e^2 + 1}{2e} \tag{2}$$
feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.

7. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását: $T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{\frac{E_0}{mg} - y(x)}}\,\mathrm{d}x.$

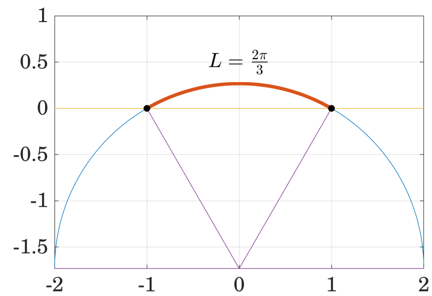
8. (Elgondolkodtató) Adjuk meg azt az $u : [a, b] \to \mathrm{R}$ függvényt, melyre $u(a) = u(b) = u_0$ és az $u(x)$ függvény alatti **előjeles** terület minimális, vagyis $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$ minimális. Adjuk meg a megfelelő Euler-egyenletet. Ha az energiafüggvényt alkalmazzuk látszólag ellentmondásba ütközünk, miért? Miért nincs ellentmondás?

D6* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ függvényt:
$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

Analízis III. 9. heti feladatok
2017. november 16.

Variációszámítás 2. rész.

1. Határozzuk meg a $P_0(-1,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat az $y \geq 0$ félsíkban összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (Az $y = y(x)$ függvény gráfja alatti terület legnagyobb.) Adjuk meg $y(x)$ függvényt $L = \pi$, majd $L = \frac{2\pi}{3}$ esetén.
Extra kérdés: Milyen L esetén van megoldása a feladatnak?*



[HF$_1$] Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám. Extra kérdés*: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

2. Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy $L > 2x_1$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális? Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differneciálható függvényt, melyre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és
$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = L \tag{1}$$

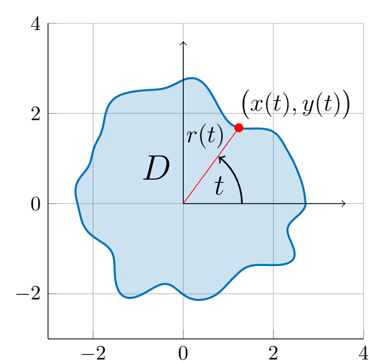
[HF$_2$] Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket osszekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, y sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az z tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, z).) Mi lesz a görbe egyenlete abban a konkrét esetben, amikor a két pont: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,1)$.

3. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

4. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

---

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy a belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < 2\pi$, ahol t jelöli a pontot és az origót egyenes szakasz szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. A görbe hossza:
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$



   (a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:
$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x^2(t) + y^2(t)\big)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

   (b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.

   (c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

---

6. (Síkinga mozgásegyenlete) Egy elhanyagolható tömegű l hosszú fonál egyik végét egy stabil ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű pontszerű testet helyezünk. Az így kapott ingát adott kezdeti szögből indítva szabadon engedjük az (x,z) síkban. Adjuk meg az inga mozgási és helyzeti energiáját, majd a legkisebb hatás elvét követve vezessük le az inga mozgásegyneletét.

Analízis III. 10. heti feladatok
2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

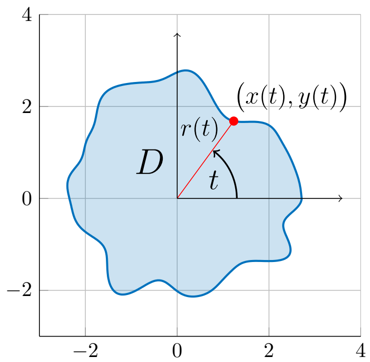
2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

[HF] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.

   Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen
   $$(x(t), y(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
   ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.
   A görbe hossza
   $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$



   (a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:
   $$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$
   (b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.
   (c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:
   $$I(\phi) = \iint_D \|\nabla\phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$, és $t_1 \le t \le t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

   A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:
   $$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} {u'_t}^2(t, x)\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^{\ell}\left(\sqrt{1 + {u'_x}^2(t, x)} - 1\right)\mathrm{d}x,$$
   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:
   $$\int_{t_1}^{t_2}\Big(K(t) - V(t)\Big)\mathrm{d}t.$$
   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u'_x|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$ hullámegyeletet kapjuk.

Analízis III. 11. heti feladatok
2017. november 30.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

2. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

(a) $\begin{cases} u'_t(x,t) + u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_1$] $\begin{cases} u'_t(x,t) + 2\cdot u'_x(x,t) &= x^2 + 4tx \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u'_t(x,t) + u'_x(x,t) &= x - t \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_2$] $\begin{cases} u'_t(x,t) - 2\cdot u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{cases}$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. (a) Legyen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0) = f(\pi) = 0$. Igazoljuk, hogy előállítható az alábbi két alakban:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin(kx), \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos(kx), \qquad x \in [0,\pi].$$
(*Javaslat:* Fourier sorfejtés speciális alakjai.) A fenti szummákban $\alpha_k =?$ $\beta_k =?$

(b) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0) = f(1) = 0$. Igazoljuk, hogy előállítható ilyen alakban:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \sin(k\pi x), \quad \gamma_k =?$$

3. Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá
$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay, \qquad v(\overline{x},\overline{y}) = u(x,y),$$
ahol a v függvény ÉT-a $\overline{\Omega} = \{(\overline{x},\overline{y}) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$. Igazoljuk, hogy $\triangle v = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

4. Legyen $u(x,y)$ megoldása a Laplace egyenletnek az alábbi tartományon, az egységkörben:
$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = 1\}.$$
Jelölje W a megoldást polárkoordinátákban felírva:
$$W(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$
Igazoljuk, hogy a Laplace egyenlet az új koordinátákban így írható:
$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0.$$

5. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:
$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \quad u(1,y) &&= 0, \qquad && 0 < y < 1, \\ u(x,0) &= 0, \quad u(x,1) &&= \sin(\pi x), && 0 < x < 1. \end{aligned}$$

D9* Igazoljuk további speciális esetekben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$.

(a) Tekintsük az alábbi koordináta-transzformációt: $\begin{cases} \overline{x} = x + y \\ \overline{y} = x - y \end{cases}$

(b) Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon. Az új koordináták: $\begin{cases} \overline{x} = x\cdot\cos(\varphi) + y\cdot\sin(\varphi) \\ \overline{y} = x\cdot(-\sin(\varphi)) + y\cdot\cos(\varphi). \end{cases}$

Legyen $\overline{\Omega} = \{(\overline{x},\overline{y}) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$, és definiáljuk a $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ új függvényt:
$$v(\overline{x},\overline{y}) := u(x,y).$$
Igazoljuk, hogy $\triangle v = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban mindkét esetben.