Analízis III. 12. heti feladatok
2017. december 7.

PDE 2. rész. Laplace egyenlet (folyt).

1. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:

   (a) $u(0,y) = 0,\quad u(1,y) = 0,\quad u(x,0) = 0,\quad u(x,1) = 1,$

   (b) $u(0,y) = 0,\quad u(1,y) = 1,\quad u(x,0) = 0,\quad u(x,1) = 0,$

   (c) $u(0,y) = 0,\quad u(1,y) = 1,\quad u(x,0) = 0,\quad u(x,1) = 1,$

2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1) \times (0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:
$$\begin{aligned} &u(0,y) = 0, \qquad u'_y(x,0) = 0, \qquad \text{(derivált van adva!)} \\ &u(1,y) = 0, \qquad u(x,1) = x^2 - x, \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,y) = y^2, \qquad \text{ha } \; x^2 + y^2 = 1.$$
A Laplace egyenlet polárkoordinátákban:
$$w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} = 0, \qquad \text{ahol } w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

[HF$_1$] 4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az $\Omega = \{(x,y) \; : \; x \in \mathbb{R},\, y > 0\}$ félsíkon az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,0) = \cos(2x), \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \qquad \text{ha } \; x \in \mathbb{R}.$$

PDE 2. rész. Hővezetés egyenlete.

5. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét végtelen rúdban az alábbi feltételekkel:
$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$
Hogyan terjed a szakadás az időben?

[HF$_2$] 6. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét **véges rúdban** az adott peremfeltételekkel:
$$\begin{aligned} &u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad t > 0, \; \boxed{x \in (0,1)} \\ &u(x,0) = x^2 - x, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$
Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét.

7. Tekintsük továbbra is a hővezetés egyenletét véges hosszú rúdban: $u_t' = u_{xx}''$, ahol $t > 0$, $x \in (0,1)$, a peremfeltétel pedig: $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Definiáljuk ezen rúd összes hőenergiáját a t időpontban a következőképpen:
$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\ dt.$$
Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz
$$\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

8. (*Tartalék*) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ 1-x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \qquad u_x'(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0.$$

9. (*Tartalék*) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:
$$u_t'(x,t) = u_{xx}''(x,t), \quad t > 0, x \in (0,1).$$
$$u(x,0) = x^2 - x, \quad \boxed{u_x'(0,t) = 0,\ u_x'(1,t) = 0}$$
Alkalmazzuk a változók szétválasztásának módszerét.

D10* Legyen $u(x,t)$ kétszer folytonosan differenciálható $(0,1) \times (0,\infty)$-ben, folytonos $[0,1) \times [0,\infty)$-ben, és megoldása a hővezetés egyenletének az alábbi feltételekkel:
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) &= u_{xx}''(x,t) \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in (0,1) \\ u_x'(0,t) = 0, &\qquad u_x'(1,t) = 0. \qquad t > 0 \end{aligned}$$

(a) Lássuk be, hogy ekkor az "összes hőmennyiség" időben konstans, azaz
$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u(x,0)dx = \mathcal{T}(0) \qquad \forall t > 0.$$

(b) Igazoljuk, hogy ekkor $t \to \infty$ esetén a rúd hőmérséklete homogén lesz:
$$\forall x \in (0,1) \text{ −re :} \qquad \lim_{t \to \infty} u(x,t) = \mathcal{T}(0).$$