Analízis III. 11. heti feladatok
2017. november 30.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

2. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

(a) $\begin{cases} u'_t(x,t) + u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_1$] $\begin{cases} u'_t(x,t) + 2\cdot u'_x(x,t) &= x^2+4tx \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} u'_t(x,t) + u'_x(x,t) &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_2$] $\begin{cases} u'_t(x,t) - 2\cdot u'_x(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{cases}$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. (a) Legyen $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(\pi)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható az alábbi két alakban:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sin(kx),\quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\cos(kx),\qquad x\in[0,\pi].$$

(*Javaslat:* Fourier sorfejtés speciális alakjai.) A fenti szummákban $\alpha_k=?$ $\beta_k=?$

(b) Legyen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0)=f(1)=0$. Igazoljuk, hogy előállítható ilyen alakban:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\sin(k\pi x),\quad \gamma_k=?$$

3. Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y)=0$, ha $(x,y)\in\Omega$. Legyen továbbá

$$\overline{x}=ax,\qquad \overline{y}=ay,\qquad v(\overline{x},\overline{y})=u(x,y),$$

ahol a v függvény ÉT-a $\overline{\Omega}=\{(\overline{x},\overline{y})\ :\ (x,y)\in\Omega\}$. Igazoljuk, hogy $\triangle v=0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

4. Legyen $u(x,y)$ megoldása a Laplace egyenletnek az alábbi tartományon, az egységkörben:

$$\Omega=\{(x,y):x^2+y^2<1\},\quad \partial\Omega=\{x^2+y^2=1\}.$$

Jelölje W a megoldást polárkoordinátákban felírva:

$$W(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Igazoljuk, hogy a Laplace egyenlet az új koordinátákban így írható:

$$\frac{\partial^2W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2W}{\partial\theta^2}=0.$$

5. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} u(0,y)&=0, & u(1,y)&=0, & 0<y<1,\\ u(x,0)&=0, & u(x,1)&=\sin(\pi x), & 0<x<1. \end{aligned}$$

D9* Igazoljuk további speciális esetekben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y)=0$, ha $(x,y)\in\Omega$.

(a) Tekintsük az alábbi koordináta-transzformációt: $\begin{cases}\overline{x}=x+y\\ \overline{y}=x-y\end{cases}$

(b) Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon. Az új koordináták: $\begin{cases}\overline{x}=x\cdot\cos(\varphi)+y\cdot\sin(\varphi)\\ \overline{y}=x\cdot(-\sin(\varphi))+y\cdot\cos(\varphi).\end{cases}$

Legyen $\overline{\Omega}=\{(\overline{x},\overline{y})\ :\ (x,y)\in\Omega\}$, és definiáljuk a $v:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ új függvényt:

$$v(\overline{x},\overline{y}):=u(x,y).$$

Igazoljuk, hogy $\triangle v=0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban mindkét esetben.