Analízis III. 10. heti feladatok
2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

[HF] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

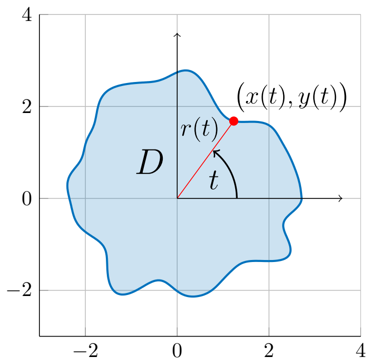
5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.

   Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen

$$(x(t), y(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

   ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.
   A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$



   (a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t)) dt.$$

   (b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.

   (c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D \|\nabla \phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$, és $t_1 \le t \le t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

   A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell {u'_t}^2(t, x) \mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau \int_0^\ell \left(\sqrt{1 + {u'_x}^2(t, x)} - 1 \right) \mathrm{d}x,$$

   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(K(t) - V(t) \Big) \mathrm{d}t.$$

   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u'_x|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$ hullámegyeletet kapjuk.