Variációszámítás

- Egy konkrét feladat -

2017. november 14.

Izoperimetrikus feladat

Feladat: Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Igazoljuk, hogy ez a görbe a körvonal.

Megoldás:

1. lépes. Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen

$$(x(t), y(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.

A görbe ívhossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

2. lépes. Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t)) dt. \tag{1}$$

Osszuk fel a $[0, 2\pi]$ intervallumot n részre: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_n = 2\pi$. Tekintsük a görbe által közrezárt tartomány felosztását olyan kis tartományokra, melyeket a görbe $\{(x(t), y(t)),\ t_i \leq t \leq t_{i+1}\}$ darabja és az $y = t_i x$, valamint $y = t_{i+1} x$ félegyenesek és határolnak. Egy ilyen kis tartományt olyan körcikkel közelítsünk, melynek sugara $r(t_i)$, és központi szöge $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Általában az r sugarú kör θ központi szögű körcikkének területe $\dfrac{1}{2}r^2\theta$, tehát az i-dik körcikk területe $\dfrac{1}{2}r^2(t_i)\Delta t_i$. Így a tartomány területének az alábbi közelítését kapjuk:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(t_i)\Delta t_i.$$

A fenti összeg egy integrál közelítő Riemann összeg, tehát $n \to \infty$ és $\max_i \Delta t_i \to 0$ esetén határértékben ezt kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)dt.$$

Végül felhasználva, hogy $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$, a kívánt (1) összefüggést kapjuk.

3. lépes. Írjuk fel a megfelelő variációszámítási feladatot. A megengedhető függvények halmaza, két függvényt keresünk:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \,|\, x, y : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ \text{kétszer folyt. diff-ható},\ x(0) = x(2\pi),\ y(0) = y(2\pi) = 0\}.$$

A funkcionál, amit maximalizálni szeretnénk:

$$I(x, y) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\right) dt, \tag{2}$$

ahol az integrál mögött λ tényezővel szorozva megjelent a korlátozó feltétel is.
A (2) integrálban szereplő függvény:

$$F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

nem függ közvetlenül t-től, ezért optimális megoldás mentén az E energiafüggvény konstans.

4. lépes. Határozzuk meg az "energiafüggvény"-t:

$$E(t) = F - \dot{x}(t)F'_{\dot{x}} - \dot{y}(t)F'_{\dot{y}}.$$

A parciális deriváltak:

$$F'_{\dot{x}} = \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad F'_{\dot{y}} = \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Így ezeket visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned}
E &= F - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{x}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \dot{y}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \\
&= \frac{1}{2}(x^2+y^2)) - \frac{\lambda}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2\right) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)
\end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy az optimális görbe mentén

$$E(t) = c \qquad \Longrightarrow \qquad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

tehát az optimális görbe egy kör.