Analízis III. 7. heti feladatok
2017. október 27.

Differenciál formák, külső deriválás $\mathbb{R}^3$-ban.

1. Határozza meg dω-t és d(dω)-t az alábbi formákra:

$$\text{(a) } \omega_1 = e^x \cos(xy) \qquad \text{(b) } \omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y \qquad \text{(c) } \omega_3 = xyz\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.$$

2.
   - Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$-ban.
   - deriválás, külső deriválás
   - $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z \longleftrightarrow (f, g, h)$
   - $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, elemei formák $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val való analógiája

3. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z.$$

   Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

   Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál forma differenciál 2-forma:

$$(a)\ \omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \qquad\qquad (b)\ \omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

   Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

   Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M\ \omega = ?$

[HF] 5 Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x, y, z)\ \mathrm{d}x + f_2(x, y, z)\ \mathrm{d}y + f_3(x, y, z)\ \mathrm{d}z$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\displaystyle\int_M\ \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

6. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazoljuk, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u, v) \le z \le t(u, v),\quad (u, v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

8. Igazoljuk, hogy ha $F\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén

$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = 0,$$

   ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.