Analízis III. 6. heti feladatok
2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:
$$v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}. \tag{2}$$
Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

[HF$_1$] 3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok általk kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \tag{3}$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = \mathrm{d}x_2$ és $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k$$

8. Definíció 2.2.6. (jegyzet 37. old) szerint számoljuk ki a $\mathrm{d}x_{13} \wedge x_4(A) := (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_4(A)$-t, ha:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

9. Adott $\mathbb{R}^2$-ben két 1-forma: $\omega = a_1\mathrm{d}x_1 + a_2\mathrm{d}x_2$, $\tau = b_1\mathrm{d}x_1 + b_2\mathrm{d}x_2$.Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$, ahol
$$D = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$
   (a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$-ban ill. $\mathbb{R}^n$-ben?
   (b) Mi van a 'háttér'-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozzuk meg dω-t és d(dω)-t az alábbi formákra:
(a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1x_2x_3\ \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

[HF$_2$] 11. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f\mathrm{d}x_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

12. Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.