Analízis III. 5. heti feladatok
2017. október 12.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1. (*Részben ismétlés, órai anyag volt.*) Lássuk be, hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság.
   (a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel.
   (b) Igazoljuk ezek kompatibilitását.
   (c) Mi lesz a görbe implicit megadása?
   (d) Írjuk fel a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret.

2. Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg, akkor mi lesz ennek a parametrikus illetve implicit megadása? Ha $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz $T_p =?$, $N_p =?$.

3. Igazoljuk, hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban két-dimenziós sokaság:
$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$
A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével. Mi lesz a sokaság implicit megadása? Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

[HF] 4. Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.
(a) Igazolja, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót.
(b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

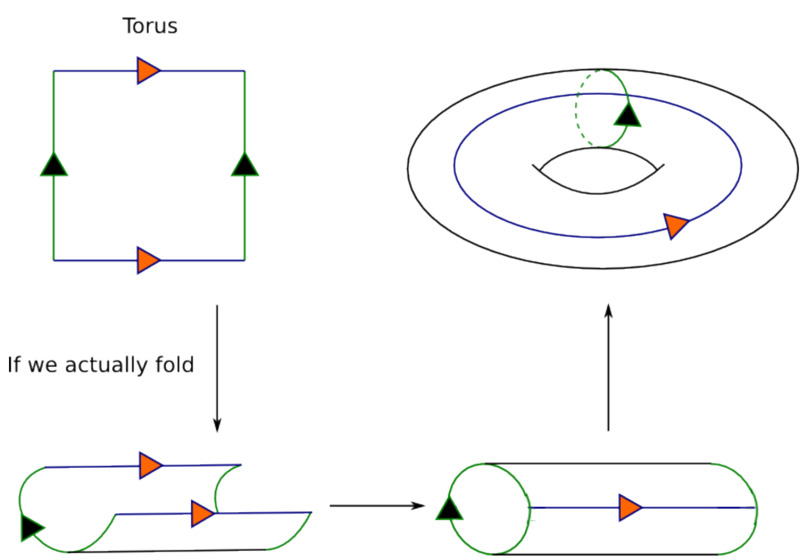
5. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció.

6. Igazoljuk, hogy a valós projektív sík, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$, egy-dimenziós sokaság.
(Ez a p. 143. 9. feladat $n = 1$ esetben.)

7. Igazoljuk, hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

gyakorló: 8 (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det\left(A^T A\right)}$.

D5* (p. 143. 8 feladat) Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság. Adjuk meg egy lehetséges paraméterezését.



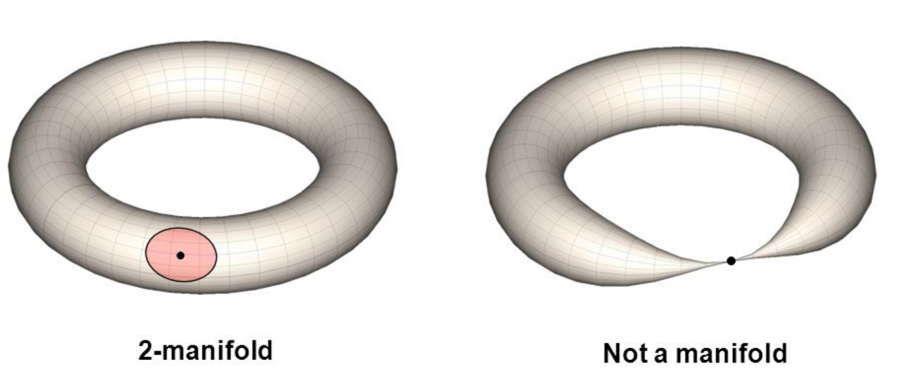


Figure 1. Sokaság definíciójának értelmezése, ellenpélda.

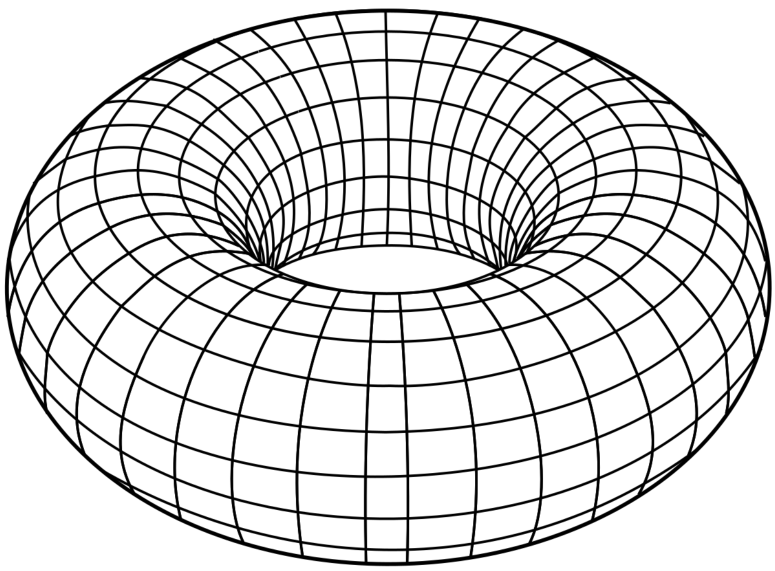


Figure 2. A órusznak, mint 2D sokaságnak, a lokális koordinátatengelyei.