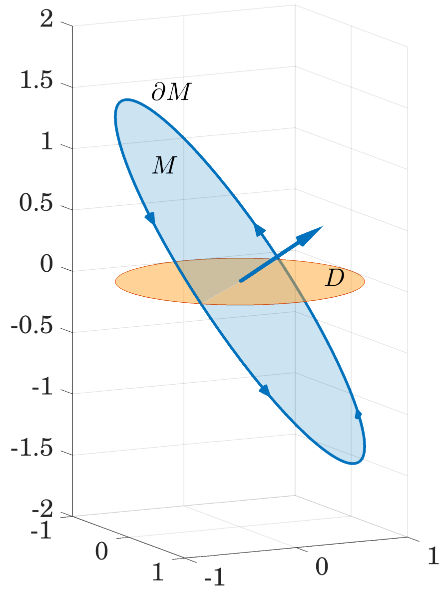
Analízis III. 4. heti feladatok
2017. október 5.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel. (Ismétlés)

1. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$, és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+{t'_x}^2+{t'_y}^2}\ \mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \pm\iint_D f(x,y,t(x,y))\,\mathrm{d}(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.



2. Igazoljuk a Stokes tételt, ha $F(x,y,z) = (y,z,x)$, továbbá M és az $x+y+z=0$ sík és a $x^2+y^2 \le 1$ henger metszete, ∂M a határa egy ellipszis (lásd ábra).
3. Igazoljuk a *Stokes tétel alapján*, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos, akkor $\forall C$ zárt görbén
$$\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$
4. Legyen $D = \left\{(x,y,0) \mid x^2+y^2 \le R^2\right\}$. Határozzuk meg
$$F(x,y,z) = \big(x+y+z, 3x+2y+4z, 5x-3y+z\big)$$
cirkulációját D határa mentén.
5. Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,0,1)$. Legyen továbbá $F(x,y,z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.
6. Legyen M az $x^2+y^2 = 4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0,h]$, a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapon $\boldsymbol{n}$ felfelé mutat. $F(x,y,z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re
(a) közvetlenül, két felületi integrál összegeként, (b) Stokes tétellel.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

7. A Green tétel segítségével határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet.
A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t-\sin(t))$, $y(t) = a(1-\cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
8. A Green tétel segítségével számoljuk ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése:
$x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$, $\quad y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

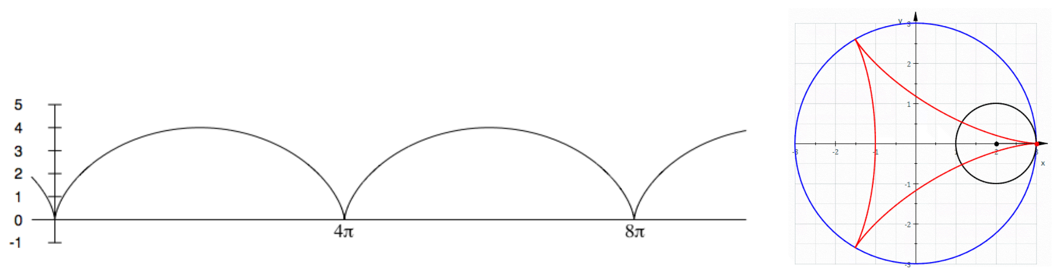


Figure 1. A cikloid és a deltoid

9. $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\displaystyle\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.

D4* A klasszikus Stokes tétel alapján bizonyítsuk be a Green tételt.