Analízis III. 3. heti feladatok

2017. szeptember 28.

Felületi integrál. Felület felszínének kiszámítása. Fluxus.

Megj. Egy $S = \{s(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ felület felszínét az $f(x,y,z) = 1$ függvény felületintegráljával lehet kiszámítani, azaz

$$A(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \left\| s'_u \times s'_v \right\| \mathrm{d}(u,v) \tag{1}$$

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u,v,t(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2 + {t'_v}^2}\ \mathrm{d}(u,v).$$

2. Milyen felületet definiál az $S = \{(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u) \mid u \in [0,1], v \in [0,2\pi]\}$.
Mennyi a felszíne?

3. Legyen $F(x,y,z) = (1,0,0)$, és S az $x+y+z = 1$ síknak az a része, ami az első tér-nyolcadba esik. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x+y+z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f\ \mathrm{d}S$ felületi integrált.

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ felületi integrált.

6. M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$.
Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

7. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x,y,t(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z)\ \mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1 + {t'_x}^2 + {t'_y}^2}\ \mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z)\ \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))\ \mathrm{d}(x,y),$$

8. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az integrálandó vektormező:
(*a*) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$ (*b*) $G(x,y,z) = (0,0,yz)$ (*c*) $H(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

(a) $F = \nabla f =$? Igazolja, hogy div $F = 0$.

(b) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

(c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

Megj. A fizikában is találunk ilyen függvényt: az origóba helyezett Q elektromos ponttöltés által keltett elektromos potenciál függvénye:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \text{ ahol } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$