Analízis III. 2. heti feladatok
2017. szeptember 22.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \begin{pmatrix} y/z \\ z/x \\ x/y \end{pmatrix}$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) div (F) =? $\qquad$ (b) rot (F) =?

2. div $\big(\text{grad } \big(|\underline{r}|^5\big)\big) =?$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) div $(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot$ div (F).
   (c) rot $(fF) = \nabla f \times F + f \cdot$ rot (F).
   (d) div $(F \times G) = \langle G, \text{rot } (F)\rangle - \langle F, \text{rot } (G)\rangle$.

4. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciálos) az alábbi vektormező:
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$
   Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

5. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:
$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in [a,b].$$
   Mi lesz egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x,y)\mathrm{d}l =?$

6. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2+3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \big\{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\big\} = \big\{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\big\}.$$

7. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

8. Legyen $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
   (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.
   (b) Mennyi lesz $\int_C \langle F, \mathrm{d}\boldsymbol{l}\rangle$ maximális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.

D1* Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ függvények gradiense ugyanaz egy $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő tartományban. Igazoljuk, hogy ekkor $\exists c$ konstans, melyre $f(x,y,z) = g(x,y,z) + c$ ebben a D tartományban.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre rot (F) = rot (G). Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?