Analízis III. 1. heti feladatok
2017. szeptember 14.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
2. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 2x+y^2 \end{pmatrix}$.
   (a) $DF(x,y) =?$
   (b) Milyen (x,y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?
   (c) Ha F invertálható $(0,0)$-ban, legyen az inverze G. Mennyi $DG(0,0)$?
3. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z},\ \frac{z}{x},\ \frac{x}{y}\right)^T$. Mi lesz a vektormezõ Jacobi mátrixa, $DF =?$
4. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x,y,z) = (x^2y, yz, xyz^2)$. $DG =?$
5. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\text{grad}\,(fg) = f \cdot \text{grad}\, g + g \cdot \text{grad}\, f$.
   (b) $D(fF) = F \cdot \text{grad}\, f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén. Vektormező potenciálja.

6. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a,0)$, végpontja $B(0,b)$. Írjuk fel pareméterezését.
7. Integráljuk az $F(x,y) = \left(x^2, y^2\right)$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.
8. Számítsuk ki az $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.
9. Számítsuk ki az $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \left\{\gamma(t) = \left(2t^2, 3t-5, t\right) \,\middle|\, t \in [0,3]\right\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.
10. Potenciálosak/e a fenti feladatban szereplő f, G, H vektromezők? Ha igen, írjuk fel egyik potenciálfüggvényüket. (Vajon egyértelmű-e a potenciálfüggvény? Miért?)
11. Egészítsük ki az alábbi állítást (többféle megoldás lehetséges):
    Állítás. *Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő tartomány. $F : S \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor F pontosan akkor potenciálos, ha ....*
    Ez alapján ellenőrizzük le az előző feladatok számolásait.