

Analízis III. 9. heti feladatok
2016. november 18.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismétlés)

- (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott \mathbb{R}^n -ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det(A^T A)}$.
- Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

- Végezzük el \mathbb{R}^4 -ban a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimetriáját 1-formák esetén.)

[HF₁] Végezzük el \mathbb{R}^3 -ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

- Végezzük el \mathbb{R}^3 -ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

Differenciál formák. Külső deriválás.

- Határozza meg $d\omega$ -t és $d(d\omega)$ -t az alábbi formákra, ha a formákat az \mathbb{R}^3 -ban tekintjük.

$$(a) \omega_1 = e^x \cos(xy) \quad (b) \omega_2 = xdx + ydy \quad (c) \omega_3 = xyz \, dx \wedge dz.$$

- Adott két differenciál 1-forma \mathbb{R}^3 -ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G -vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

[HF₂] (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx$ egy differenciál forma \mathbb{R}^3 -ban, ahol f kétszer differenciálható 3 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$.

Analízis III. 9. heti feladatok
2016. november 18.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismétlés)

- (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott \mathbb{R}^n -ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det(A^T A)}$.
- Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

- Végezzük el \mathbb{R}^4 -ban a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimetriáját 1-formák esetén.)

[HF₁] Végezzük el \mathbb{R}^3 -ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

- Végezzük el \mathbb{R}^3 -ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

Differenciál formák. Külső deriválás.

- Határozza meg $d\omega$ -t és $d(d\omega)$ -t az alábbi formákra, ha a formákat az \mathbb{R}^3 -ban tekintjük.

$$(a) \omega_1 = e^x \cos(xy) \quad (b) \omega_2 = xdx + ydy \quad (c) \omega_3 = xyz \, dx \wedge dz.$$

- Adott két differenciál 1-forma \mathbb{R}^3 -ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \quad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G -vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

[HF₂] (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx$ egy differenciál forma \mathbb{R}^3 -ban, ahol f kétszer differenciálható 3 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$.