Analízis III. 13. heti feladatok
2016. december 16.

PDE 4. rész. Hővezetés, folytatás.

1. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= x^2-x \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u'_x(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

2. Definiáljuk az előző feladathoz kapcsolódóan az *összes hőenergiát*: $\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\,\mathrm{d}x$. Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz $\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2)$, ha $t_1 < t_2$.

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t) \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= \begin{cases} x, & x\in[0,1/2) \\ 1-x, & x\in[1/2,1] \end{cases} \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

4. (a) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az alábbi peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = 0 \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = \sin(2\pi x), \qquad x\in[0,1]$$

   (b) Oldjuk meg az INHOMOGÉN hővezetés egyenletét véges rúdban homogén peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = e^{-t}\sin(2\pi x) \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x\in[0,1]$$

Hullámegyenlet.

5. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x\in\mathbb{R}, t>0,$$

ahol c adott konstans. Keressük az egyenlet megoldását $F(x+ct)+G(x-ct)$ alakban, ha

   (a) $u(x,0) = f(x) \qquad u'_t(x,0) = 0, \quad x\in\mathbb{R}.$

   (b) $u(x,0) = 0, \qquad u'_t(x,0) = g(x) \quad x\in\mathbb{R}.$

6. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban az alábbi általános peremfeltételekkel:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Lássuk be, hogy a D'Alambert formula valóban megoldja a hullámegyenletet:

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

7. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ahol c adott konstans. Az kezdeti feltételek esetén oldjuk meg az egyenletet.

(a) $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \le 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$, és $u'_t(x,0) = g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $u(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, és $u'_t(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \le 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$.

(c) $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \ge 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$, és $u'_t(x,0) = g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) $u(x,0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, és $u'_t(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \ge 0 \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$.

D11* (Előadáson elhangzottak alapján.) Tekintsük a hővezetés egyenletét véges rúdban homogén *Neumann peremfeltétellel*:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx} \qquad t > 0,\ x \in (0,1), \qquad u(x,0) = f(x),$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Igazoljuk, hogy a megoldásfüggvény konstanshoz tart:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \mathcal{T} = \int_0^1 f(x)dx, \qquad \forall x \in (0,1).$$