Analízis III. 12. heti feladatok
2016. december 9.

PDE 3. rész. Laplace egyenlet (folyt). Hövezetés egyenlete.

1. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1) \times (0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:
$$\begin{array}{lll} u(0,y) = 0 & u'_y(x,0) = 0 & \text{(derivált van adva!)} \\ u(1,y) = 0 & u(x,1) = x^2 - x & \end{array} \tag{1}$$

2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,y) = 2y, \qquad \text{ha } x^2 + y^2 = 1.$$
A Laplace egyenlet polárkoordinátákban: $w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0$, *ha* $w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét végtelen rúdban az alábbi feltételekkel:
$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$
Hogyan terjed a szakadás az időben?

4. (*Tartalék feladat*) Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá
$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay, \qquad v(\overline{x}, \overline{y}) = u(x,y),$$
ahol a v függvény ÉT-a $\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$. Igazoljuk, hogy $\triangle v = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

5. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:
$$\begin{array}{rcll} u'_t(x,t) & = & u''_{xx} & t > 0, \ x \in (0,1) \\ u(x,0) & = & x^2 - x & \\ u'_x(0,t) & = & 0, & \\ u'_x(1,t) & = & 0. & \end{array}$$

6. Tekintsük továbbra is a hővezetés egyenletét véges hosszú rúdban: $u'_t = k u''_{xx}$, ahol $t > 0$, $x \in (0,1)$, a peremfeltétel pedig: $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Definiáljuk ezen rúd összes hőenergiáját a következő képpen:
$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t) \ dt.$$
Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz
$$\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

[HF$_1$] Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0{,}1) \\ u(x{,}0) &= \begin{cases} x, & x\in[0{,}1/2) \\ 1-x, & x\in[1/2{,}1] \end{cases} \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

D10* (A Laplace-egyenlet invariáns a forgatásra) Tfh $u(x,y)$ függvény harmonikus az $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ nyílt tartományon. Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon, Az új koordináták:

$$\overline{x}=x\cdot\cos(\varphi)+y\cdot\sin(\varphi) \qquad \overline{y}=x\cdot(-\sin(\varphi))+y\cdot\cos(\varphi).$$

Az új koordináta rendszerben a függvény $U(\overline{x},\overline{y})=u(x,y)$. Igazoljuk, hogy U is harmonikus $\overline{\Omega}$-n, ahol $\overline{\Omega}=\{(\overline{x},\overline{y})\ :\ (x,y)\in\Omega\}$.