Analízis III. 10. heti feladatok
2016. november 23.

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

1. Oldjuk meg az alábbi elsorendű transzport egyenleteket.

a) $\begin{cases} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_+$] $\begin{cases} u_t'(x,t) + 2\cdot u_x'(x,t) &= x^2+4tx \\ u(x,0) &= 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{cases}$ [HF$_1$] $\begin{cases} u_t'(x,t) - 2\cdot u_x'(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{cases}$

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

2. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltételekkel:

a)
$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,1)=1$$

b)
$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=1,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,1)=0$$

c)
$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=1,\quad u(x,0)=0,\quad u(x,1)=1$$

[HF$_2$] Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

a)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 2\sin(2\pi x) \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(5\pi x) \\ u(x,1) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u_y'(x,0) &= 0 \qquad \text{(derivált van adva!)} \\ u(x,1) &= x^2 - x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

D9* Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y)\in\Omega$. Tekintsünk egy koordináta-transzformációt:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x+y \\ \overline{y} &= x-y \end{aligned}$$

Legyen $\overline{\Omega} = \{(\overline{x},\overline{y}) \ : \ (x,y)\in\Omega\}$, és definiáljuk a $v:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ új függvényt:

$$v(\overline{x},\overline{y}) := u(x,y).$$

Igazoljuk, hogy $\triangle v = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.