Analízis III. 10. heti feladatok
2016. november 18.

Integrálás sokaságokon.

1. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M\ \omega = ?$

[HF$_1$] Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\ \mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\ \mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\ \mathrm{d}z$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M\ \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek

2. Igazolja, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

3. Igazolja, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u,v) \le z \le t(u,v),\ \ (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

4. Adott egy f kétváltozós differenciálható függvény. Legyen

$$M = \{(x,y)\ :\ f(x,y) = c\}$$

   egy szintvonal, $(x_0, y_0) \in M$. Ha itt $\nabla f \neq 0$, akkor igazolja, hogy ∇f normálvektora M-nek.

5. Igazolja, hogy ha $F\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén

$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = 0,$$

   ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.

D8* (Koordinátatranszformációk többszörös integrálok esetén)
Adott egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalármező és egy (nem feltétlenül zárt, DE) korlátos és összefüggő $D \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz. Ezen részhalmazon (tartományon) szeretnénk integrálni az f függvényt. Ahogy azt Analízisi II-ben tanultuk, végezzünk el egy koordinátatranszformációt:

$$x = \Phi(u),\ \text{ahol } \Phi : R' \to R \text{ egy vektormező (vagy transzformációs függvény)}$$

pl. $n = 2$ polárkoordinátákba való áttérés:

$$R = \text{„egységkörlap"},\ R' = (0{,}1] \times [0{,}2\pi), \quad \Phi(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\ \cos\vartheta \\ r\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \tag{1}$$

Általános esetben a következő egyenlőség áll fenn:

$$\int_R f(x)\, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = \int_{R'} f(\Phi(u))\ \underbrace{\det\left(\mathrm{D}\Phi(u)\right)}_{\text{Jacobi mátrix determinánsa}}\ \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_n \tag{2}$$

Differenciálgeometriai ismereteinket felhasználva igazold a fenti állítást (2).