Analízis III. 9. heti feladatok
2016. november 18.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det(A^T A)}$.

2. Mennyi a $v = (1,2,3)$ és $w = (3,2,1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

3. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ban a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$. (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

[HF$_1$] Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = \mathrm{d}x_2, \tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$ esetén $\omega \wedge \tau =$?

4. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = \mathrm{d}x_2, \tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ esetén $\omega \wedge \tau =$?

Differenciál formák. Külső deriválás.

5. Határozza meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra, ha a formákat az $\mathbb{R}^3$-ban tekintjük.

   (a) $\omega_1 = e^x \cos(xy)$ (b) $\omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ (c) $\omega_3 = xyz\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

6. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z.$$

   Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

   Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

[HF$_2$] (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f\mathrm{d}x$ egy differenciál forma $\mathbb{R}^3$-ban, ahol f kétszer differenciálható 3 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.