Analízis III. 8. heti feladatok
2016. november 11.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1. (*Részben ismétlés, órai anyag volt.*) Lássuk be, hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság.

   a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel.

   b) Igazoljuk ezek kompatibilitását.

   c) Mi lesz a görbe implicit megadása?

   d) Írjuk fel a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret.

2. Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg, akkor mi lesz ennek a parametrikus illetve implicit megadása? Ha $p \in \mathbb{R}^3$, $p = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz $T_p =?$, $N_p =?$.

3. Igazoljuk, hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban két-dimenziós sokaság:

$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

   A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével. Mi lesz a sokaság implicit megadása? Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

[HF$_1$] Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.
(a) Igazolja, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót.
(b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

4. Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció.

[HF$_2$] Igazoljuk, hogy a valós projektív sík, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$, egy-dimenziós sokaság.
(Ez a p. 143. 9. feladat $n = 1$ esetben.)

5. Igazoljuk, hogy a valós projektív tér, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$, két-dimenziós sokaság.
   (Ez a p. 143. 9. feladat $n = 2$ esetben.)

6. Igazoljuk, hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe $T = \left| \begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix} \right|$.

7. (p. 113. Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor: $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n \times 2}$. Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det{(A^T A)}}$.

D5* (p. 143. 8 feladat) Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság.

D6* Igazolja, hogy $S^3 = \{(z_1, z_2) \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ három-dimenziós sokaság – a négydimenziós térben.

D7* Adott egy f kétváltozós differenciálható függvény. Legyen

$$M = \{(x, y) \ : \ f(x, y) = c\}$$

egy szintvonal, $(x_0, y_0) \in M$. Ha itt $\nabla f \neq 0$, akkor igazolja, hogy ∇f normálvektora M-nek.