Analízis III. 7. heti feladatok
2015. november 6.

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgásfelszín felülete:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

2. Igazoljuk a variációszámítás eszközeivel, hogy a síkon két pontot összekötő görbék közül az egyenesszakasz ívhossza minimális.
(Ez a feladat lesz jó az alapfeladat, és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlésére)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4. (HF) Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$ alapfüggvény esetén.

6. (HF) Írjuk fel a megfelelő $E(x)$ energiafüggvényt és számoljuk ki az összes stacionárius megoldást az $F(x, u, u') = \sqrt{u} \cdot \sqrt{1 + (u')^2}$ alapfüggvény esetén.

7. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

D4* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

ahol $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$