Analízis III. 6. heti feladatok
2016. október 21.

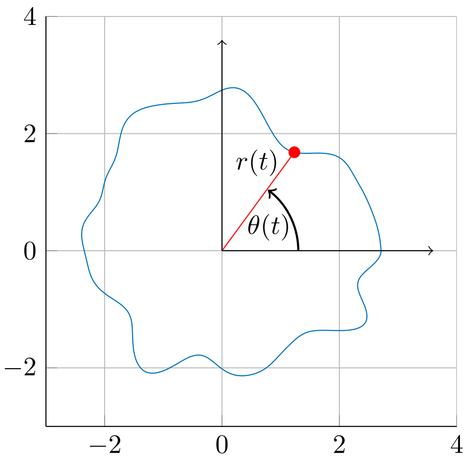
Variációszámítás 3. rész.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két P_1, $P_2 \in \mathbb{R}^3$ pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet. (Speciális esetben: $f : [1{,}2] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$, $P_1(1{,}1{,}0)$, $P_2(2{,}0{,}2)$)

2. (Ismétlés) Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0{,}2]$ intervallumon, $x(0) = x(2) = 0$ feltétel mellett, melyre a görbe alatti terület maximális. Számoljuk ki C_1, C_2, λ értékeit.

3. (*Előadáson szereplő példa újra.*) Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy L $(> 2x_1)$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális?

   Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt, melyre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és
   $$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L$$
   .



[HF$_1$] (Előkészület az *izoperimetrikus feladat* megoldásához.) Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon, mely belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, ahol t jelöli az adott pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. Igazoljuk, hogy a görbe áltak közrezárt terület így számolható:
$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

[HF$_2$] $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:
$$I(\phi) = \iint_D |\,\mathrm{grad}\ \phi(x, y)\,|^2\ \mathrm{d}(x, y).$$

4. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x, t)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$. (Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:
   $$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} {u'_t}^2(x, t)\ \mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^{\ell}\left(\sqrt{1 + {u'_x}^2(x, t)} - 1\right)\ \mathrm{d}x,$$
   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:
   $$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\ \mathrm{d}t.$$
   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u'_x|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$ hullámegyeletet kapjuk.