Analízis III. 5. heti feladatok
2016. október 14.

Variációszámítás 2. rész.

1. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja a (x, y) síkbeli egységkör. Adott két pont (1,0,0) és (-1,0,1). Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston.

2. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

3. (Térbeli Brachistochrone) Adott a térben két pont P_1, P_2, melyeket egy huzallal összekötünk és egy golyót indítunk P_1-ből P_2-be. Feltesszük, hogy a gravitáció a megszokott módon (-z irányban hat). A leérkezéshez szükséges idő, ha az $\{(x, y(x), z(x)),\ x_1 \leq x \leq x_2\}$ görbe mentén halad a golyó:

$$T(y,z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}{z(x) - z_1}} \mathrm{d}x \tag{1}$$

   Milyen görbe mentén lesz az idő minimális?

4. Határozzuk meg a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat az $y \geq 0$ félsíkban összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (Az $y = y(x)$ függvény gráfja alatti terület legnagyobb.)

5. Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám.*

[HF] Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket osszekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, z sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az y tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, y).)
Továbbá, számoljuk ki a görbe egyenletét abban a konkrét esetben, amikor a két pont: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,1,0)$.

6. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.