Analízis III. 5. heti feladatok
2014. október 13.

Ismétlés: Sokaság irányítása = "érintőterek irányítása". 135. oldal, 6.5.3. fejezet.

1. Igazoljuk, hogy a vektortér irányítását definiáló reláció valóban ekvivalencia-reláció.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke.

2. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \binom{x_1}{y_1}$ és $v_2 = \binom{x_2}{y_2}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

3. (Részben az órai anyag folytatása. A 113. oldalon Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, illetve az őket tartalmazó mátrix:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}.$$

Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

4. Mennyi a $v = (1{,}2{,}3)$ és $w = (3{,}2{,}1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

5. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

6. (HF) Igazoljuk, hogy az 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus: ha $\tau, \omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\omega \wedge \tau = -\tau \wedge \omega$.

7. (HF) Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

8. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$ (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

9. Igazolja, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega = e^x \cos(y),$$
$$\omega = xdx + ydy,$$
$$\omega = xyz\ dx \wedge dz$$