Analízis III. 3. heti feladatok
2015. szeptember 25.

1. *(Ismétlés.) Az S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x, y)) \ : \ (x, y) \in D\}$, és $\mathbf{n}$ a felület nornálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor*
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+(t'_x)^2+(t'_y)^2}\, d(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)dS = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))d(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.

2. „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az $x+y+z=0$ sík és a $x^2+y^2 \le 1$ henger metszete és $F(x,y,z) = (y,z,x)$.

[HF$_1$] „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az egységgömb $x \ge 0$ része, és $G(x,y,z) = (y,z,x)$.

3. Igazoljuk a Stokes tétel alapján, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos vektormező, akkor $\forall C$ zárt görbén
$$\oint_C F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$

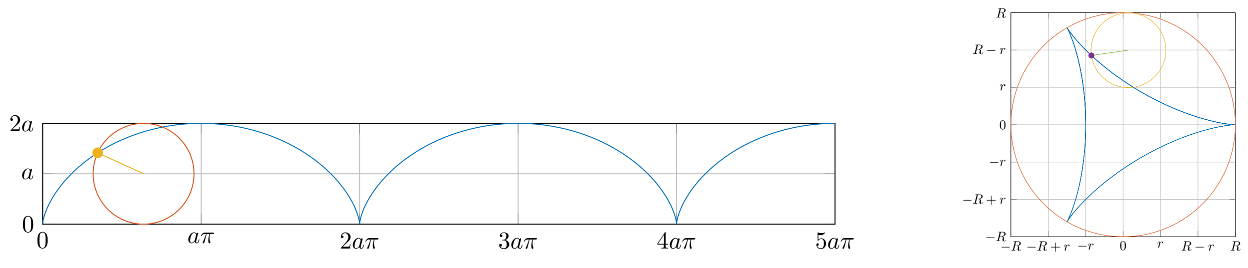
4. Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai (0,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,0,1). Legyen továbbá $F(x,y,z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.

5. Legyen M az $x^2+y^2=4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0,h]$ (h egy paraméter), a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapra $\underline{n}$ felfelé mutat. $F(x,y,z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re
   - közvetlenül, két felületi integrál összegeként
   - Stokes tétellel

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

6. (Green tétel alkalmazás) Határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet.
(A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \sin(t))$, $t \in [0,2\pi]$.)

[HF$_2$] A Green tétel segítségével számolja ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése:
$$\begin{aligned} x(t) &= (R-r)\cos(t) + r\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \\ y(t) &= (R-r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \end{aligned} \quad \xrightarrow[R=3a,\ r=a]{\text{delotoid esetén}} \quad \begin{aligned} x(t) &= 2a\cos(t) + a\cos(2t) \\ y(t) &= 2a\sin(t) - a\sin(2t), \quad t \in [0,2\pi] \end{aligned}$$



1. ábra. A cikloid és a deltoid

7. Legyen $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C F(\underline{r})\, d\underline{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.