

Analízis III. 2. heti feladatok 2016. szeptember 23.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. „Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől”: integráljuk az $f(x, y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.

$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0, 1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0, 2]\}.$$

2. Adott a síkon a C egységnyezet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x, y) = (x, y)$ vektormezőnek C -re vonatkozóan?

Felületi integrál. Fluxus.

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u, v)) : (u, v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + t'_u{}^2(u, v) + t'_v{}^2(u, v)} d(u, v).$$

4. Legyen $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s(u, v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $f(x, y, z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \, dS$ felületi integrált.
 5. Legyen $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s(u, v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $F(x, y, z) := (y, x, z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \, dS$ felületi integrált.
 6. Határozzuk meg $F(x, y, z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M -re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb.
- [HF₁] M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Határozzuk meg F fluxusát M -re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradskij-tétel .

7. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradskij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:

$$\iint_S f(x, y, z) n_3(x, y, z) dS = \pm \iint_D f(x, y, t(x, y)) d(x, y),$$

ahol S egy $t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény felülete, $S = \{s(x, y) = (x, y, t(x, y)) : (x, y) \in D\}$.

- [HF₂] "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x, y, z) = (x^2, y^2, 0)$.

8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

$$(a) \quad F(x, y, z) = (0, 0, yz) \quad (\mathbf{HF}) \quad (b) \quad G(x, y, z) = (x^2, y^2, yz).$$

D3* Legyen $f(x, y, z) = \frac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy $\operatorname{div} F = 0$.

- a) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egység sugarú gömb felületére nézve?
- b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?