Analízis III. 2. heti feladatok
2015. szeptember 18.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. „*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*”: Th. Garrity könyv 89. oldal alján kezdődő példa: integráljuk az $f(x,y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1{,}2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
   $\Gamma_1 = \left\{\gamma_1(t) = (t{,}2t), t \in [0{,}1]\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{\gamma_1(t) = (0.5t, t), t \in [0{,}2]\right\}$.
2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0{,}0)$ és $(1{,}1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Felületi integrál. Fluxus.

3. Határozzuk meg az egységgömb felszínét. (Paraméterezés az előadáson szerepelt.)
4. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u,v,t(u,v)) \ : \ (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
   $$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {t'_u}^2(u,v) + {t'_v}^2(u,v)}d(u,v).$$
5. Legyen $s : [0{,}1] \times [0{,}1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \, \mathrm{d}S$ felületi integrált.
6. Legyen $s : [0{,}1] \times [0{,}1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \, \mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.
7. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x{,}2y{,}5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

8. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradszkij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:
   $$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z) \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y)) \mathrm{d}(x,y),$$
   ahol $S = \left\{s(x,y) = (x,y,t(x,y)) \;\middle|\; (x,y) \in D, \ t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\right\}$
9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2{,}0)$.
10. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és
    (a) $F(x,y,z) = (0{,}0, yz)$ (**HF**) (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

a) $F = \nabla f = ?$ Igazolja, hogy div $F = 0$.

b) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?