# Analízis III. 1. heti feladatok, 2016. szeptember 16.

**Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.**

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden $(x, y, z)$ pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az $F$ vektormező azt az $x$ tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans $\omega$ sebessége van.

2. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket: $\begin{cases} \mathrm{div}(F) = ? \\ \mathrm{rot}(F) = ? \end{cases}$

3. Számítsa ki $F$ divergenciáját és rotációját, ha $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi „szorzat deriválási szabályok”-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot\ \mathrm{div}(F)$.
   (c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot\ \mathrm{rot}(F)$.
   [HF$_1$] $\mathrm{div}(F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}(F)\rangle - \langle F, \mathrm{rot}(G)\rangle$.

**Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.**

5. Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a $\Gamma$ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.

6. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból $P$-be vezet.

7. Számítsuk ki az $F(x, y, z) = (yz \;\; xz \;\; xy)^T$ vektormező vonalintegrálját egy $\Gamma$ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \;:\; 0 \le t \le 3\}$.
   [HF$_2$] $\Gamma$ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás $P_1$-ből $P_2$-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

D1* Tegyük fel, hogy az $F$ vektormezőre $\mathrm{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja: $G(x,y,z) = \int_0^1 t\ F(tx, ty, tz) \times (x\ y\ z)^T dt$. Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x, y, z) = (y\ z\ x)^T$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az $F$ és $G$ differenciálható vektormezőkre $\mathrm{rot}(F) = \mathrm{rot}(G)$. Mit mondhatunk az $F$ és $G$ vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?