

Analízis III. 1. heti feladatok 2015. szeptember 11.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

- Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
 - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
 - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
- Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\mathbf{i} + \frac{z}{x}\mathbf{j} + \frac{x}{y}\mathbf{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket: (a) $\operatorname{div}(F) = ?$, (b) $\operatorname{rot}(F) = ?$
- Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.
- Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi „szorzat deriválási szabályok”-at:
 - $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
 - $\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \operatorname{rot}(F)$.
 - $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \nabla f \rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$.
 - $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F) \rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G) \rangle$.

Ismétlés: Vonalt \mathbb{R}^2 -ben és \mathbb{R}^3 -ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

- Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.
- Számítsuk ki az $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P -be vezet.
- Számítsuk ki az $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
 - $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) : 0 \leq t \leq 3\}$.
 - Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1 -ből P_2 -be vezet.

Potenciálos-e a vektormező?

D1* Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\operatorname{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, és pedig vektorpo-

tenciálja: $G(x, y, z) = \int_0^1 t F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt$. Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az

$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?