Analízis III. 1. heti feladatok, 2016. szeptember 16.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

$$\in \tag{1}$$

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
2. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \ \frac{z}{x}, \ \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket: (a) $\mathrm{div}(F) =?$, (b) $\mathrm{rot}(F) =?$
3. Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.
4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi „szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \ \mathrm{div}(F)$.
   (c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \ \mathrm{rot}(F)$.
   (d) $\mathrm{div}(F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}(F)\rangle - \langle F, \mathrm{rot}(G)\rangle$.

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

5. Integráljuk az $F(x, y) = \left(x^2, y^2\right)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.
6. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.
7. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = \left(2t^2, 3t - 5, t\right) \ : \ 0 \le t \le 3\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

D1* Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\mathrm{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja: $G(x,y,z) = \int_0^1 t \ F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt$. Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\mathrm{rot}(F) = \mathrm{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?