Jehat tedui hell:

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \times \nabla \varphi) = 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times G) = 0 \end{array}}$$

3 keti kási r

Rotáció egy másik definíciója:

$$\boxed{\nabla \times \underline{G} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_{\partial \Delta A} \underline{G}\, d\underline{l}}{\Delta A}}$$

$$\oiint_{(S)} \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\underline{S}$$

$$T_{d\underline{r}}^{d\underline{v}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \ldots & & \ldots \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$d\underline{v} = T_{d\underline{r}}^{d\underline{v}}\, d\underline{u}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \ldots & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} u_z \\ \ldots \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} u_z \end{pmatrix} =$$

Ismerünk csak:

$$\oiint_{\partial V} \nabla \times \underline{G}\, d\underline{S} \overset{G\text{-O}}{=} \iiint_V \nabla(\nabla \times \underline{G})\, dV$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \underline{G}) = 0}$$

Egyszerű ~~számolással~~ számolással

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \\ \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 G_z}{\partial y \partial x} - \ldots \quad \ldots \quad \ldots \right) = 0$$

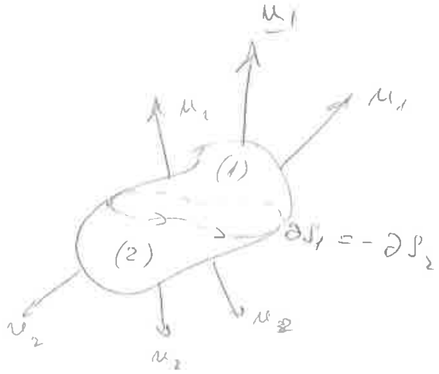
TANAL HF 2

Akkor most nézzük vektorpotenciálosra:

potenciálja   potenciálos

$$f \longrightarrow \nabla f = F$$

$$G \longrightarrow \nabla \times G = F$$



$$\oiint_S F\cdot \underline{n}\, dS = \oiint_S \langle \nabla \times G, \underline{n} \rangle\, dS$$

(Stokes Tétel:

$$\iint_{S_{nyílt}} \langle \nabla \times G, \underline{n} \rangle\, dS = \iint_S \nabla \times G\, d\underline{S} = \oint_{\partial S} F \cdot d\underline{l}$$
)

$$\oiint_S F\cdot \underline{n}\, dS = \iint_{S_1} \underline{F}\, d\underline{S} + \iint_{S_2} \underline{F}\, d\underline{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \underline{G}\, d\underline{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \underline{G}\, d\underline{S} =$$

$$= \oint_{\gamma_1} G\, d\underline{l} + \oint_{\gamma_2} G\, d\underline{l} = \oint_{+\partial S_1} G\, d\underline{l} + \oint_{-\partial S_1} G\, d\underline{l} = 0$$

jobb ötletem nincs:

Schwarcnyi bdl:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = \nabla(\nabla \underline{v}) - \Delta v$$

$$\nabla \varphi \underline{v} = \varphi \nabla \underline{v} + \underline{v}\, \nabla \varphi$$

$$\nabla \times \varphi \underline{v} = \varphi\, \nabla \times \underline{v} + \nabla \varphi \times \underline{v}$$

$$\nabla (\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v}(\nabla \times \underline{u}) - \underline{u}\,(\nabla \times \underline{v})$$

nézzük van:

$$\langle \nabla \times G, \underline{n} \rangle$$

kérdés:

$$(\underline{a} \times \underline{b})\cdot \underline{c} \stackrel{?}{=} \underline{a} \times (\underline{b} \cdot \underline{c})$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 + c_2 b_1 a_3 - c_2 a_1 b_3 + c_3 a_1 b_2 - c_3 b_1 a_2$$

$$\boxed{(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \cdot \underline{c})}$$

Elemenüle előbb a skalárpotenciálos függvényeket:

legyen $u : R^3 \to R$ potenciálfüggvény

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

$$\oint_\gamma \nabla u \, d\underline{l} = \oint_a^b \langle \nabla u(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \left\langle \left(u'_x(\gamma(t)), u'_y(\gamma(t)), u'_z(\gamma(t)) \right), \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \\ \dot\gamma_3(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial x} \cdot \frac{d\gamma_1(t)}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} + \ldots + \ldots =$$

$$\cancel{= \int_a^b \frac{\partial u(\gamma_1(t))}{\cancel{\partial x}\, \partial \gamma_1(t)} \cdot \frac{d\gamma_1(t)}{dt} \cdot \cancel{dt} + \ldots + \ldots =}$$

nem szabad leegyszerűsíteni

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial x} d\gamma_1(t) + \frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial y} d\gamma_2(t) + \frac{\partial u(\gamma(t))}{\partial z} d\gamma_3(t)}_{du(\gamma(t))} \Big] =$$

$$= \int_a^b du(\gamma(t)) = u(\gamma(t)) \Big|_a^b = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = 0$$

q.e.d.

(b):
$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zy \end{pmatrix}$$

$$\oiint_{(\partial M)} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \iint_{\text{tető}} zy \, dS - \iint_{\text{alja}} zy \, dS = 0$$

$$\nabla F = y$$

$$\iiint_{(M)} y \, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^1 dz \int_0^1 r^2 dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta}_{=0} = 0$$

(c)
$$F = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ zy \end{pmatrix} = F_1 + F_2$$

$$\iint F = \iint (F_1 + F_2) = \iint F_1 + \iint F_2 = 0$$ továbbra is.

③ $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos, azaz

$\exists \; G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ilh. $\nabla \times G = F$

$$\oiint_{(S)} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \oiint_{(S)} \langle \nabla \times G, \underline{n} \rangle \, dS =$$

$$= \oiint_{(S)} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} dS \overset{?}{=} 0$$

$$= \cancel{R^3 \sin\theta \Big|_0^{2\pi}} - \cancel{R^3 \frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_0^{2\pi}} + R^3 \cos\theta \Big|_0^{2\pi} + R^3 \frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

másik oldal:

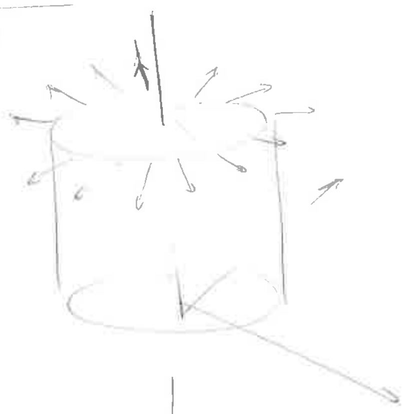
$$\iiint\limits_{(M)} (2x+2y)\, dV = \int_0^1 \iint\limits_{\text{körlap}} (2x+2y)\, dS\, dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2r\cos\theta + 2r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta\, dz =$$

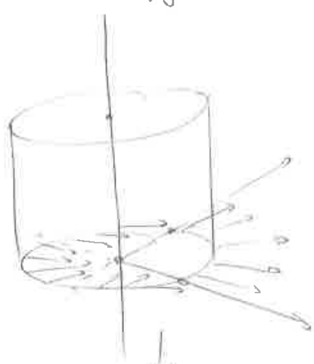
$$= \int_0^1 dz \left[\int_0^1 2r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + \int_0^1 2r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right] =$$

$$= \frac{2}{3} r^3 \Big|_0^1 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta}_{=0} + \frac{2}{3} r^3 \Big|_0^1 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta}_{=0} = 0$$

Ezt értem fizikailag.
[vagy mégse]



nem így!



valahogy így ⇒
„ami befolyik az rögtön kifolyik"

(2) $\partial M = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2=1,\ z\in[0,1]\}$

(a) $F = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

divergencia T:

$$\underset{(M)}{\iiint} \nabla F \, dV = \underset{(\partial M)}{\oiint} F \, dA =$$

$$F = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \nabla F = 2x + 2y$$

$$\underline{n} = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} ; & z \in (0,1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; & z = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; & z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{(\partial M)}{\oiint} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dA = \underset{palást}{\iint} \underline{F} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS + \cancel{\underset{teteje}{\iint} \underline{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS + \underset{alja}{\iint} \underline{F} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS} =$$

$$= \underset{palást}{\iint} (x^3 + y^3) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS = (*)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{J} = r$$

$$(*) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta) \frac{1}{\cancel{r}} \cdot \cancel{r} \, dz \, d\theta =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta \int_0^1 dz + R^3 \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_0^1 dz =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \cos\theta (1 - \sin^2\theta) \, d\theta + R^3 \int_0^{2\pi} \sin\theta (1 - \cos^2\theta) \, d\theta =$$

$$= R^3 \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta - R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta + R^3 \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta + R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta (-\sin\theta) \, d\theta =$$

Anal 3 hf:

2. hét

① M: $R=4$ sugarú gömb felső fele

$$\underline{F}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\phi = \iint_{(M)} \underline{F}\, d\underline{S} = \iint_{(M)} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle dS = \iint_{(M)} \left\langle (y, x, z); \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle dS \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= \iint_{(M)} \left(2xy + z^2 \right) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dS = ⊛$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \cos\theta \\ r\cos\varphi \sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \to J = r^2\cos\varphi \Rightarrow (M) \Rightarrow [0, 2\pi) \times [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$⊛ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^2\cos^2\varphi \cos\theta \sin\theta + r^2\sin^2\varphi \right) r^2\cos\varphi \cdot \frac{1}{r}\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left(2r^3\cos^3\varphi \cos\theta \sin\theta + r^3\sin^2\varphi \cos\varphi \right) d\theta\, d\varphi =$$

$$2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\theta\, d\theta + R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi (1 - \sin^2\varphi)\, d\varphi \cdot \frac{1}{4}(-\cos 2\theta)\Big|_0^{2\pi} + R^3 \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (2\pi) =$$

$$= \underbrace{2R^3 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi \right] \cdot \frac{1}{4}(-1+1)}_{=0} + R^3 \frac{1}{3} 2\pi =$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3}\Big|_{R=4} = \frac{32\pi}{3}$$

$$\int_0^1\int_0^{\pi} f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^{\pi} g(y)\,dy)$$

$$\cancel{\sum_k \sum_i a_i \cdot b_k}$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x\,dx = \int (\sin x)\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x \cos 2x\,dx$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$\cos 2x$

---

(1) $F(x,y,z) = (x^2, 2xy, 0)$

$\Gamma = \{(x,y,0);\ \frac{x^2}{\sqrt{2}^2}+y^2=1\}$ → $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ → ell; $t=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 -$

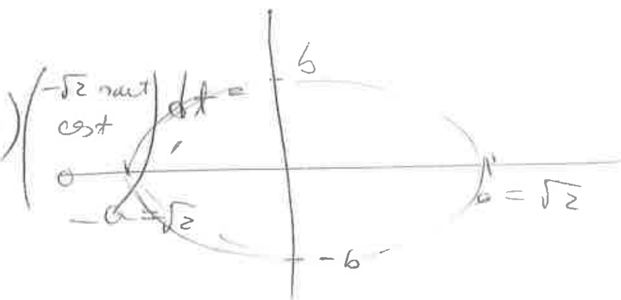
ell; $t=0 \to \frac{1}{2}+0=1$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ ell; $t=0$ ✓

$t=\frac{\pi}{2}$ ✓

$t \in [0, 2\pi]$

$$\text{Cirk} = \int_0^{2\pi} (2\cos^2 t, \sqrt{2}\cos t \sin t, 0)\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt =$$



$$= -\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cos^2 t \sin t\,dt =$$

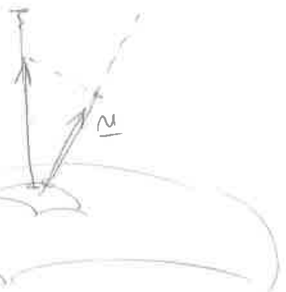
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cos^2 t\,d(\cos t) = \sqrt{2}\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

[illegible]

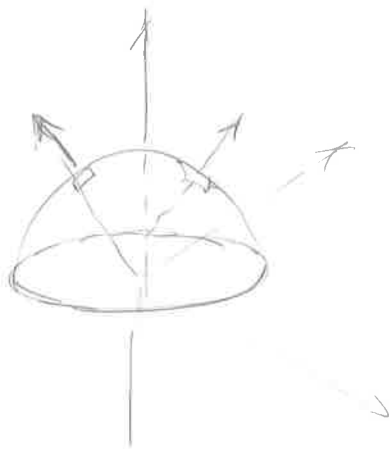
① F fluxusa = ?

$F = (y, x, z)$

$\phi = \iint\limits_M \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS$; $\cancel{\phi = \iint\limits_M F \cdot n \, dS}$

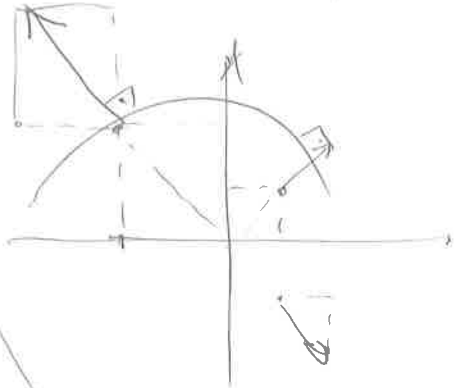


$\underline{n}(x,y,z) = (x,y,z) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

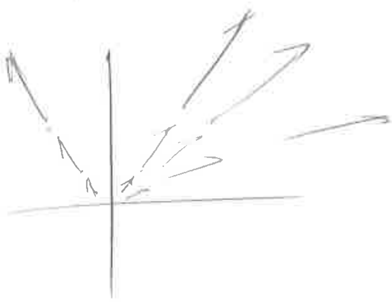


$(y, x, z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$

$= (2xy + z^2) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

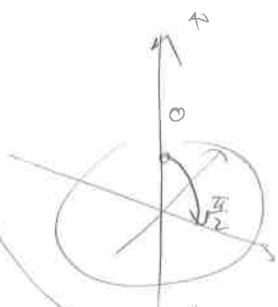


$\phi = \iint\limits_M (2xy+z^2) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dS$



$\cancel{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\varphi \cos\theta \\ r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$



$J = r^2 \sin\varphi$

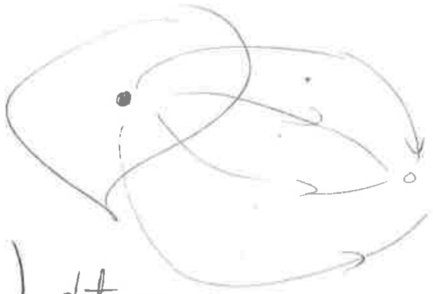
$\iint\limits_{M'} (2r^2 \sin^2\varphi \cos\theta \sin\theta + r^2 \cos^2\varphi) \frac{1}{r} \cdot r^2 \sin\varphi \, dS' =$

határok: $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $r = 4$

$= 64 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^3\varphi \cos\theta \sin\theta + \cos^2\varphi \sin\varphi) \, d\varphi \, d\theta =$

$= 64 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi}$

2. F-re : $\operatorname{div} F = 0$



$$G = \int_0^1 t\, F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 t \begin{pmatrix} f_1(tx) \\ f_2(ty) \\ f_3(tz) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 t \begin{pmatrix} f_2(tx)\cdot z - f_3(tx)\, y \\ x f_3(ty) - z f_1(ty) \\ y f_1(tx) - x f_2(tx) \end{pmatrix} dt =$$

$$\cancel{= \int_0^1 \left(tz\, f_2(tx) - ty\, f_3(tx) \quad tx \right.}$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} tz f_2 - ty f_3 \\ tx f_3 - tz f_1 \\ ty f_1 - tx f_2 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^1 (tz f_2 - ty f_3)\, dt \\ \int_0^1 (tx f_3 - tz f_1)\, dt \\ \int_0^1 (ty f_1 - tx f_2)\, dt \end{pmatrix} \longrightarrow \text{ezt kell rotálni.}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \int_0^1 (tz f_2 - ty f_3)\, dt \\ \int_0^1 (tx f_3 - ty f_1)\, dt \\ \end{pmatrix} = \left(\int_0^1 t f_3 + tx \right.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bt - vc \\ uc - at \\ av - ub \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ u & v & t \end{vmatrix} =$$

$$= i \begin{vmatrix} b & c \\ v & t \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a & c \\ u & t \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix}$$

együtt patgával Anud

Pl: n-dim PROJEKTIV TÉR P^n

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

Ekvivalencia reláció

$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ ha $\exists \lambda$ úh.

$x_i = \lambda y_i \quad , i = \overline{1, n+1}$

$P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$

ekvivalencia osztályok

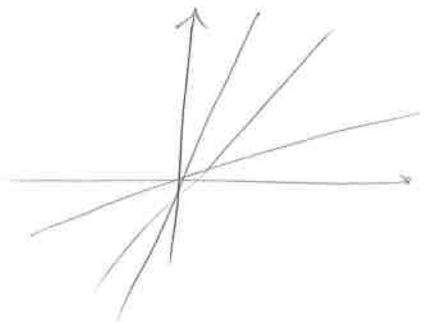
$(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$

$n = 2$: $(1,2,3) \sim (10,20,30)$

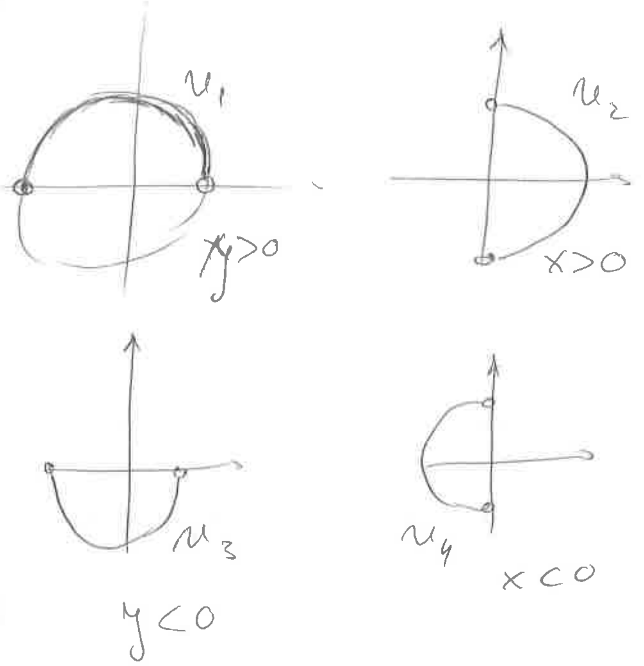
$\sim (-1,-2,-3)$

$\not\sim (1,3,2)$

$n = 1 \Rightarrow$ legyen $\mathbb{R}^{n+1}$



Pl 1 Egységkör



Leképezések:

$u_1 : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$u \longmapsto (u, \sqrt{1-u^2})$

$\phi_1(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$

$\phi_2 : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\phi_2(u) = (\sqrt{1-u^2}, u)$

$u_1 \cap u_2 = \{x_1 > 0, y > 0\}$

$\phi_1^{-1} \circ \phi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\phi_1^{-1}(\phi_2(u)) = \phi_1^{-1}(\sqrt{1-u^2}, u) = \sqrt{1-u^2} \to (-1,1)$ diffható

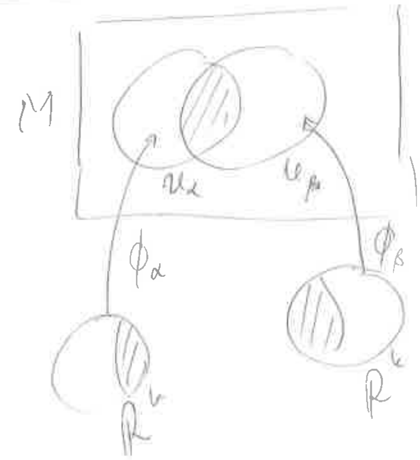
Def: $p \in M$ sokaságnak $p \in U_\alpha$

$\phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^k = (x_1^?, x_k^?)$ lokális koordináták

Def: $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ k-dim. sokaság, ha minden egyes U_α nyílt halmazok, hogy ha $\forall \alpha$ esetén $\exists\ V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ egységgömb $\exists\ \phi: \mathbb{R}^k \longrightarrow M$

$\phi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$ 1-1 értelmű

$V \subset \mathbb{R}^k$ egységgömb melyre



Tfh $\forall \alpha, \beta$ esetén

$U_\alpha \cap U_\beta$

$\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^k$ nyílt

$\phi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^k$ nyílt

Ezek között

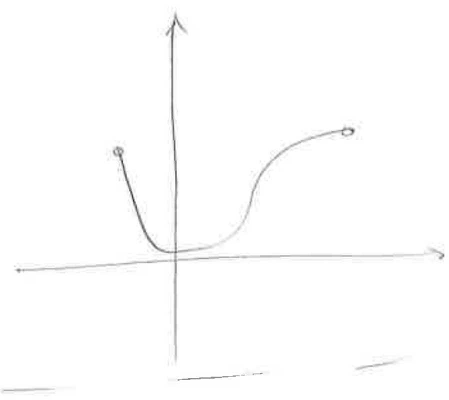
$\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, diff.ható nem szinguláris

(U_α, ϕ_α) : lokális térképek

$\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in J\}$

ATLASZ

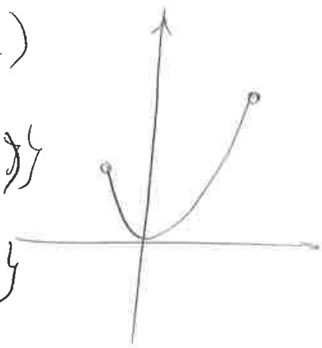
Pl: 1 dim



(t, t^2); $t \in (-1,2)$

$M = \{(t,t^2): t \in (-1,2)\}$

$\bar{M} = \{(t,t^2): t \in [-1,2]\}$

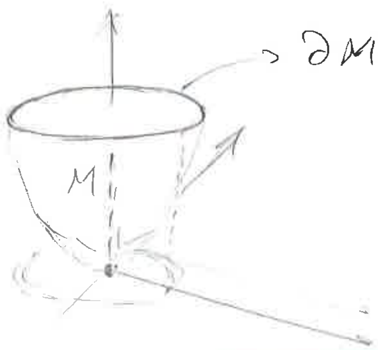


$\partial M = \{(-1,1); (2,4)\}$

∂M : 0 dimenziós sokaság

2 Pl: ("Mély tányér")

$S = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 1\}$



Áll: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim sokaság $\Rightarrow$ akkor ennek határa ∂M : $\longrightarrow (k-1)$ dim sokaság

$\longrightarrow \emptyset$

↳ más eset NINCS

Absztrakt sokaság:

Topológikus térben definiálható

↳ környezet fogalma

↳ nyílt zárt halmaz

↳ nincs hossz

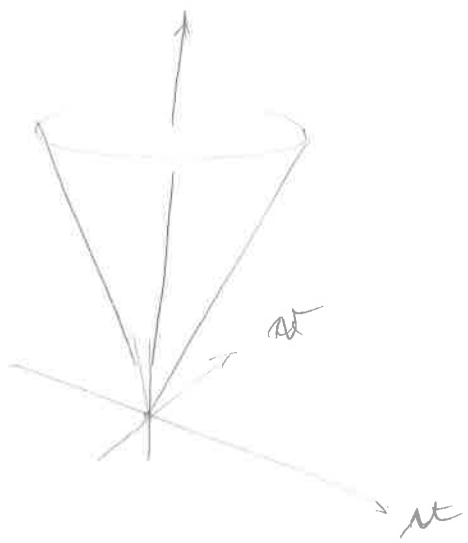
Pl: körvonal

$\phi : t \longmapsto (\cos t, \sin t)$

$D\phi(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ → teljes rangú ; $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Egydimenziós sokaság 2 dimenzióban

2 Pl:



$\phi : (u,v) \longmapsto (u, v, \sqrt{u^2+v^2})$

$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix}$ rang$(D\phi) = 2$

megjegyzés: Origóban és a deriváltat nem értelmezett[4]

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$; k dim sokaság

M lezártja: $\bar{M} = \{ X : \exists (X_n) \subset M$ sorozat ; $\lim X_n = X \}$ nyilván $M \subset \bar{M}$

$\partial M = \bar{M} - M$

$$= -\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi - \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin}{\cos\varphi} \varphi \, d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi =$$

Cél:

Általános Stokes tétel

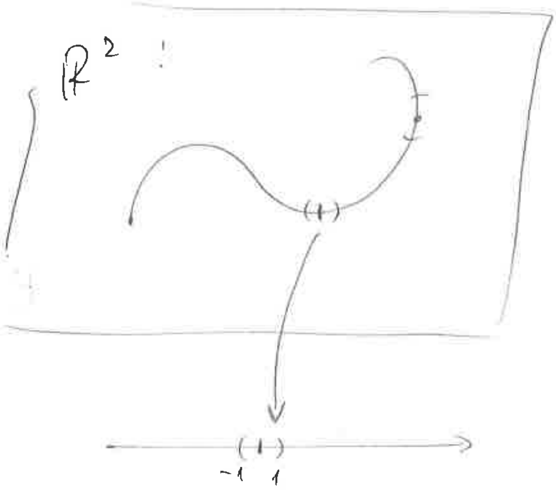
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

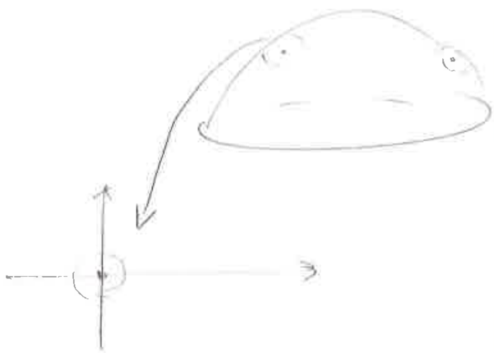
84–87 → mese
6.h fejezet → homály fejezet

M sokaság
ω differenciál forma

$\boxed{\text{SOKASÁG}}$

$\mathbb{R}^n$-ben M lokálisan olyan mint egy alacsonyabb (k) dimenziós tér





$M \subset \mathbb{R}^n$ k dim sokaság, ha
$\forall$ $p \in M$-re
$\exists\, U \subset \mathbb{R}^n$
$\exists\, V \subset \mathbb{R}^k$
$\exists\, \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$
hogy
$\phi(V) = U \cap M$
$D\phi = \left(\ \right) \}n$
teljes rangú

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, $k \leq n$
ha $\forall\, p \in M$-hez $\exists\, U$ környezet és $\exists\, V \subset \mathbb{R}^k$
nyílt halmaz és $\exists\, \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható ü. $\phi(V) = U \cap M$
ahol $D\phi$ Jacobi mátrix teljes rangú

$$D\phi = \overbrace{\left[\ \cdots\ \right]}^{k} \Big\} n$$

① Pl $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$M =$ egységgömb felső fele

Megold:

- Baloldal:

∂M : (x,y) síkbeli egység kör

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$\int_{\partial M} F \cdot T \, ds = \int_0^{2\pi} \left\langle (\cos t, \sin t, 0) ; \begin{pmatrix} -\sin t \\ +\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

- jobboldal:

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cancel{\cos t} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

② pl: ugyanaz $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$\int_{\partial M} F \, T \, d\cancel{t} = \int_0^{2\pi} \left\langle (\sin t, 0, \cos t) ; \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi$$

jobboldal:

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\iint_M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dS = -\iint_M (x+y+z) \, dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \theta \cos \varphi + \cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \right) d\varphi \, d\theta$$

$\cdot \cos\varphi$

↳ mindet kell beszorozni a Jacobival

Integrálos tételek:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a) \qquad [N-L]$$

$$\iiint_M \nabla \underline{F}\,dV = \iint_{\partial M} \underline{F}\,d\underline{A} \qquad [\Delta / G-O]$$

$$\iint_S \nabla \times \underline{F}\,dS = \int_{\partial S} \underline{F}\,d\underline{e}$$

<u>Klasszikus Stokes tétel:</u>

$\underline{F}(x,y,z)$ diff. vektormező

$M \subset \mathbb{R}^3$ felület, sima, $\underline{n}$ normálvektor $|\underline{n}|=1$; $\underline{n} \perp M$

∂M határ sima, zárt görbe; T tangens vektor $|\underline{T}|=1$

$\longrightarrow$ Ekkor: $\displaystyle\int_{\partial M} \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \iint_M (\nabla\times\underline{F})\,\underline{n}\,dS$

<u>Megj</u>: Baloldal kiindulása:

∂M paraméterezése: $\gamma(t)$; $t \in [a,b] \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ érintő vektor: $\dot\gamma(t)$

$$T = \frac{\dot\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$$

$$\int_{\partial M} \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_a^b \langle F(\gamma(t));\dot\gamma(t)\rangle\,dt$$

<u>Def</u> a vektormező cirkulációja (örvényerőssége) a C görbe mentén:

$$\int_C \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\iint \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cancel{\frac{\partial F}{\partial x}} & \cancel{\partial F_1} & \\ & & \end{vmatrix}}$$

ez jött ki:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \\ -\sin\theta \sin\varphi & \cos\theta & \\ & & \end{vmatrix}$$

GVAK 3

Felszínintegrál:

$$\iint |d\underline{S}_u \times d\underline{S}_v| = \iint |S'_u \times S'_v| \, du \cdot dv \to \text{felszín}$$

mozgogé

$\underline{F}(x,y,z)$

$$\text{Fluxus} = \int_{(A)} \langle \underline{F}, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{felületelvektor}}}{d\underline{S}} \rangle \Rightarrow \int \underline{F} \left| \frac{\partial u}{\partial \dots} \right.$$

Divergenciatétel

$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \to$ így is jelölik.

$$\int_{(V)} \nabla \underline{F} \, dV = \oint_{(A)} \underline{F} \, d\underline{S} = \oint_{(\partial V)} \underline{F} \, d\underline{S}$$

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\cancel{S = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}} \quad S = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta\sin\varphi \\ \cos^2\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

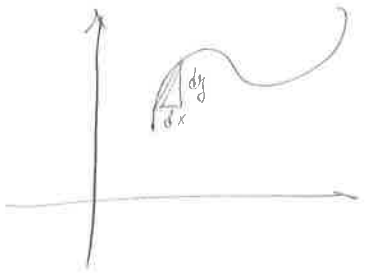
$$\iiint_{(V)} \nabla \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dV = 3 \iiint_{(V)} dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

$$\iint_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \left| \frac{\partial S}{\partial \theta} \times \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right| d(\theta, \varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\theta\sin\varphi \\ \cos^2\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta \sin \dots$$

kamyu @ gmail.com



$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$L = \int dl = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$L = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

Vonalintegrálokról bővebben.

$$\longrightarrow \int_\gamma f\, dl =$$

$$= \int f(\gamma_x(t), \gamma_y(t)) \sqrt{\dot{\gamma}_x^2(t) + \dot{\gamma}_y^2(t)}\, dt$$

pld 1

$$\left.\begin{aligned} f &= x^2 + 3y \\ \gamma(t) &= \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \int_\gamma f\, dt = \int_0^1 (t^2 + 6t)\sqrt{1+4}\, dt =$$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{3}t^3 + 3t^2\right)\Big|_0^1 = \sqrt{5}\,\frac{1}{3} + 3\sqrt{5} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$\int_\gamma f\, dl = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} + 3t\right)\sqrt{\frac{1}{4} + 1}\, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{12}t^3 + \frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{3\cdot 4}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

GY3 | Anal III gyak 3

Divergencia tétellel:

$$\iint_{\partial M} \underline{F}\,\underline{n}\,dA = \iiint_M \nabla F\,dV =$$

$$= \iiint_M (1+2+5)\,dV = 8 \cdot V(\text{Gömb}) = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot 4$$

$$\iiint_M dV = V(M)$$

$$\iint_S dS = T(S)$$

Lemma

$\partial M_1, \partial M_3 \to$ egyszerű, speciális felületek (explicite megadható) : $b(x,y)$, $t(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$\iint_{\partial M} f(x,y,z)\, n_3(x,y,z)\, dS = \pm \iint_D f(x,y,f(x,y))\, d(x,y)$$

Gg

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \overbrace{\iint_D f_3(x,y,t(x,y))\, d(x,y) - \iint_D f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)}^{\text{Newton-Leibniz}} =$$

$$= \iiint_M f_{3z}'\, d(x,y,z) = \iint_D \int_{b(x,y)}^{t(x,y)} f_{3z}'\, dz\, d(x,y)$$

Pl:

$M = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ $\qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{F} \cdot \underline{n} = (x^2+2y^2+5z^2)$

Szám. ki a fluxust! $\qquad |S_u' \times S_v'| = \sin u$

$$\iint_{\partial M} \underline{F}\, \underline{n}\, dA = \iint_{\partial M} (\cos^2 u \cos^2 v + 2\cos^2 u \sin^2 v + 5\sin^2 u)\sin u\, d(u,v) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u \cos^2 v + 2\cos^2 u \sin^2 v + 5\sin^2 u)\sin u\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin u \cos^2 u\, du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v\, dv + 2\int_0^{2\pi} \sin u \cos^2 u\, du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 v\, dv + 5\int_0^{2\pi} \sin^3 u\, du =$$

$$= \ldots = 8\frac{4}{3}\pi$$

Divergencia tétel

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Spec: $\underline{F} : M \to \mathbb{R}^3$ vektormező, diffható

$M \subset \mathbb{R}^3$ térrész, határa ∂M felület ($\partial M \subset \mathbb{R}^3$)

$\underline{n}(\underline{r})$ $\partial M(\underline{r})$ pontjában egy egys. kifelé mut. vek.

$$\iint_{\partial M} \underline{F}\,\underline{n}\, dS = \iiint_M \nabla F(\underline{r})\, d(x,y,z)$$

Biz: (vázlat)

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{r}) \\ f_2(\underline{r}) \\ f_3(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\partial M} (f_1 n_1 + \dots + f_3 n_3)\, dS = \iiint_M (f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z})\, d(x,y,z)$$

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \iiint_M f'_{3z}\, d(x,y,z)$$

M: „egyszerű térrész"

∂M: 3-részre osztályozzuk: $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2 \cup \partial M_3$

$\{n_3 > 0\}$

$n_3 = 0$

$\{n_3 < 0\}$

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \iint_{\partial M_1} f_3 n_3\, dS + \iint_{\partial M_3} f_3 n_3\, dS$$

2. $F(x,y,z) = \underline{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

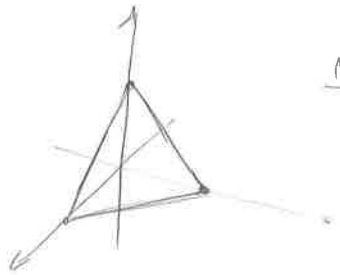
$S = \{ (x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 1 \}$ $\Bigg\}\ \phi = 0$

3Pl:

$F(x,y,z) = \underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S =$ $x+y+z=1$ sík első síknegyedbe eső része

$S = \{ (x,y,z) : x+y+z=1;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \}$



$\underline{n} = (1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}$

$S:\quad z = 1-x-y$

$S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{pmatrix}$

$\phi = \iint_S \underline{F}\, d\underline{A} =$

$= \iint$

$\underline{F} \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Downarrow$

$\iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = \frac{1}{\sqrt{3}} T(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$

Cél: Általános Stokes tétel

1. Spec. eset: Newton-Leibniz formula:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$[a,b] \to (a,b)$ „belseje"

$ \to \{a,b\}$ „határa"

derivált integrálja belül $\overset{\sim}{\Longrightarrow}$ a fv. integrálja „a határon"

$\Rightarrow f(b)-f(a)$"

Spec eset

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D g(u,v,f(u,v)) \sqrt{1 + f_u'^2 + f_v'^2}\, d(u,v)$$

Áll : Ezis fgt-a param.

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező

$S \subset \mathbb{R}^3$ felület

Def : F vektormező S-re vonatkozó fluxusa

$$\iint_{(S)} \underline{F}(x,y,z) \cdot \underline{n}(x,y,z)\, dS = \iint_{(S)} \langle \underline{F}, d\underline{S} \rangle = \iint_D F(s(u,v)) \left| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right| d(u,v)$$

$\underline{n} \to (x,y,z)$ beli egységnyi normálvektora az F-nek

Felt : $\underline{n}$ „folyt" változik

1pl : $F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

egység sugarú gömb : $S = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ \sin u \end{pmatrix}$

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\phi = \iint_S \underline{F} \cdot \underline{n}\, dA = \iint_S (x^2+y^2+z^2) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot dA =$$

$$= \iint_S (\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u) \frac{1}{a}\, d(u,v)$$

$$= \iint_S \frac{1}{a}\, d(u,v) = a\, 4\pi a^2$$

Th. Gravity p 87

Vonalintegrál → Path integral

Def: $C \subset R^n$ görbe, path.

$$\gamma : [a,b] \to R^n$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

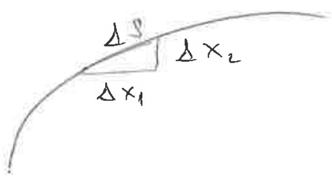
$$C = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\}$$

Tfh. x_i diffható ; $x_i : [a,b] \to R$

Adott $f : R^n \to R$

Def'': $$\int_C f(x_1, \dots, x_n)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

Áll: a definícióbeli integrál független a görbe paraméterezésétől



$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$

Görbe : 1 paraméteres sokaság

Felület : 2 — " — — " —

felület df: anal II

Felület integrál

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(r(u,v))\, |r'_u \times r'_v|\, d(u,v)$$

ANA III 2

Gradiens

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\nabla f = \ldots$

Áll: f mindenhol folytonosan differenciálható

$M = \{ \underline{x} : f(\underline{x}) = c \mid c \text{ rögzített} \}$

f fl. diffható

$x_0 \in M$ tetsz pont ffl. $\nabla f(x_0) \neq \underline{0}$

Ekkor $\nabla f(x_0) \perp M$

Biz: Legyen M ben egy görbe, ami megy x_0-on

$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) \in M \quad \forall t$-re

$\gamma(0) = x_0$

$f(\gamma(t)) = c \quad \forall t \in [-1, 1]$

$\Downarrow$

$\frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle = 0$

$\nabla f(x_0) \cdot \dot\gamma(0) = 0 \implies$ egymásra merőleges

Ism:

F: potenciális

F potenciális $\iff$ $\oint_\gamma F\,d\ell = 0 \quad \forall \gamma$

F ~~potenciális~~ skalárpotenciális $\iff$ $\nabla \times F = 0$

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$

$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

Def: F vektorpotenciális, ha $\exists\, G$ úh. $F = \nabla \times G$

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ -\frac{\partial g_3}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla(\nabla \times G) = 0$$

Áll: ha f vektorpotenciális $\iff$

$\nabla F = 0$

Biz: „$\Leftarrow$" konstruktív. Ifl. $\nabla F = 0$

$$G(x,y,z) := \int_0^1 t\, F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt$$

Pl: $F = (y, z, x) \Rightarrow G = ?$

$G(x,y,z) = \ldots$

Helyette

$$\text{div}\, F = \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot F$$

$$\boxed{\nabla \vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_A \vec{F}\, dA}{\Delta V}}$$

$\text{div}\, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ terjedési sebessége

Rotáció

$\nabla \times F$

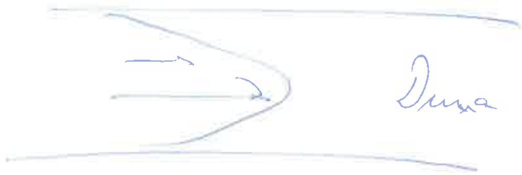
$$\boxed{(\text{rot}\, F)_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_L \vec{F}\, d\ell}{\Delta A}}$$

pl: $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$v_x = v_0\left(1 - \frac{4}{d^2} y^2\right)$

$v_y = 0$

$v_z = 0$



$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_0\left(1 - \frac{4}{d^2} y^2\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +\frac{8 v_0}{d^2} y \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

a Dunán forog a jégtábla mikor lemegy

Szorzat deriválása

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b)$$

Vektormezőknél:

f, g skalárértékű fv.

F, G vektor

a) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \nabla f$

b) $\nabla \bullet (f \cdot F) = \langle F, \nabla f \rangle + f \nabla F$

c) $\nabla \times (f F) = \nabla f \times F + f(\nabla \times F)$

d) $\nabla(F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G)$

Térbeli derivált

$$dy = y' dx \Longleftarrow \Delta y = y'\Delta x + r(\Delta x)\cdot\Delta x \longrightarrow \text{sima függvény}$$

$$d\varphi = \langle \nabla\varphi, d\underline{r} \rangle \longrightarrow \text{skalár fv}$$

$$d\underline{v} = T^{d\underline{v}}_{d\underline{r}} \, d\underline{r}$$

$$T^{d\underline{v}}_{d\underline{r}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

deriválás: szabályok:

láncszabály: $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \end{array}\right\}$ diffható

$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ diffható

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Inverz fv

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

diffható + invertálható

$$DF^{-1}(a) = \left[DF(F^{-1}(a)) \right]^{-1}$$

Derivált

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \implies Df \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ (gradiens) [sorvektor]

$f(x,y,z) \in \mathbb{R}$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$DF \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\mathbf{D}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times 3}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{TENZOR}}$ $\longrightarrow$ „túl sok"

HF ZH-k: okt 4
okt 25
nov 22 → Nagy ZH
dec 13

① All the maths You need (5–6 fejezet)

Vektor Calculus

Vektormező

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$

folyt., diffhatóság

$\mathbb{R}^n$ pontjaiban egy vektor

görbe (paraméteres) is vekt. m. tekinthető

hf: $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ → ábrázold vektorosan (Matlab)
→ és minden

Def: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$x \in D_f$ diffható, ha $\exists A$ mátrix, ha $f(\underline{x}+\Delta\underline{x}) \approx f(\underline{x}) + \underline{A}\Delta\underline{x}$

azaz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\|\Delta x\|} \| f(x+\Delta x) - f(x) - A\Delta x \| = 0$

[a különbség $o(\Delta x)$]

jel: $A = Df \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (sor, oszlop)

Ha $\exists A = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$

Anal 1

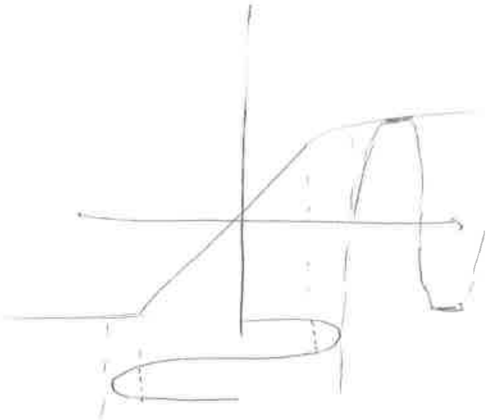
$f(x) = y = \lambda e^{-\lambda x}$

$\frac{y}{\lambda} = e^{-\lambda x}$

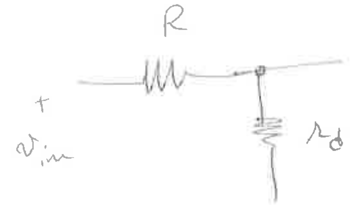
$\ln \frac{y}{\lambda} = -\lambda x$

$x = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{y}{\lambda}$

$x = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\lambda}{y}$



14. old:



 → nagy impedanciájú tekercs

$\Downarrow$

váltóáram gyakorlatilag nem folyik át rajta [nagy az induktivitása]

C_H → zavarjeleket a földbe vezeti

$f = \frac{dF}{dx}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$dx_1(v_1) = 1$$

$$dx_2(v_2) = 2$$

$$dx_1 \wedge dx_2 \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} = \overset{1}{dx_1(v_1)}\, \overset{2}{dx_2(v_2)} - \overset{2}{dx_2(v_1)}\, \overset{3}{dx_1(v_2)}$$

1	2
1	2
2	1

$$dx_1 \wedge dx_2 \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 3\cdot 2$$

$$(dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 2 & 0\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1	2	3
1	2	3
1	3	2
~~3~~	~~1~~	~~2~~
~~3~~	~~2~~	~~1~~
2	3	1
~~2~~	~~1~~	~~3~~

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}\cdot 1 + \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{vmatrix}\cdot 1 + \begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{vmatrix}\cdot 3$$

Szép példa (2)

$$\overset{dr_1}{\begin{pmatrix}dx_1\\dy_1\\dz_1\end{pmatrix}} \times \overset{dr_2}{\begin{pmatrix}dx_2\\dy_2\\dz_2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}dy_1\,dz_2 - dz_1\,dy_2\\dx_2\,dz_1 - dx_1\,dz_2\\dy_1\,dz_2 - dz_1\,dy_2\end{pmatrix} =$$

Gauss - Osztrogradszkij Tétel:

$$\oiint_{(\partial V)} \langle \vec{F}, d\underline{S} \rangle = \iiint_{(V)} \nabla \vec{F} \, dV$$

$$d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ -dx \wedge dz \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \text{ forma}$$

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz \longrightarrow 3 \text{ forma}$$

$$d\underline{l} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \longrightarrow 1 \text{ forma}$$

Stokes Tétel:

$$\oint_{(\partial S)} \langle \vec{F}, d\underline{l} \rangle = \iint_{(S)} \langle \nabla \times \vec{F}, d\underline{S} \rangle$$

Green Tétel:

$$\oint_{\partial S} \langle \vec{F}, d\underline{l} \rangle = \iint_{(S)} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \, dS, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ahol } dS = dx \wedge dy \\ \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \\ S \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Általános Stokes Tétel:} \\ \displaystyle\int_{(M)} d\omega = \oint_{(\partial M)} \omega \end{array}}$$

Biz.:

G - O:

$$d\omega = \nabla \vec{F} \, dV = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$\omega = \langle \vec{F}, d\underline{S} \rangle = F_x \, dy \wedge dx - F_y \, dx \wedge dz + F_z \, dx \wedge dy$$

$$d\omega = +\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy + \frac{\partial F_x}{\partial z} dz \right) dy \wedge dx$$

$$-\left(\ldots + \frac{\partial F_y}{\partial y} dy + \ldots \right) dx \wedge dz$$

$$+\left(\ldots + \ldots + \frac{\partial F_z}{\partial z} dz \right) dx \wedge dy = \nabla \vec{F} \, dV \checkmark$$

Stokes:

ugyanígy: $\omega = \langle \vec{F}, d\underline{l} \rangle = F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz$

$$d\omega = \ldots$$

Green: $\omega = \langle \vec{F}, d\underline{l} \rangle = F_x \, dx + F_y \, dy$

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} dx + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} dx \ \ \right) \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial F_x}{\partial y} dx \wedge dy$$

Fluxus:

$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ "Lip. felület"

$\vec{F} : V \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\phi(S) = \iint_{(S)} \langle \vec{F}, d\underline{S} \rangle = \iint_{(S)} \vec{F} \cdot \underline{n} \, \|dS\|$$

$$= \iint_{D} \left\langle \vec{F}(S(u,v)), \underbrace{\left(\frac{\partial S(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial S(u,v)}{\partial v} \right)}_{} \right\rangle d(u,v)$$

$$= \iint_{D} \left\langle \vec{F}(S(u,v)), \underline{n}(S(u,v)) \right\rangle \underbrace{\underbrace{d(u,v)}_{du \wedge dv}}_{dS}$$

$D \subset \mathbb{R}^2$

a S felületen

Munka:

γ : egyenes és ív, nyílt (nem körkörös)

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\underline{\ell} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, \underline{n} \rangle \, \|d\ell\| =$$

$$= \int_{I} \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), d\underline{\ell}(t) \right\rangle \cdot \frac{dt}{dt} =$$

$$= \int_{I} \left\langle \vec{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \right\rangle dt$$

leggere : $\omega_2 = + h \, dx \wedge dy - g \, dx \wedge dz + f \, dy \wedge dz$

$$d\omega_2 = h'_z \, dx \wedge dy \wedge dz + g'_y \, dx \wedge dy \wedge dz + f'_x \, dx \wedge dy \wedge dz =$$

$$= \nabla \vec{F} \cdot dV$$

Poincaré lemma

$$\boxed{\begin{array}{ll} d(d\omega) = 0 & \nabla \times (\nabla f) = 0 \\ d\omega_0 = \langle \nabla f, ds \rangle & \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \\ d\omega_1 = \langle \nabla \times F, dS \rangle & \nabla \cdot \nabla f = \Delta f \\ d\omega_2 = \nabla \cdot \vec{F} & \end{array}}$$

Külső derivált

$I = (i_1, \dots, i_k)$ — rendezett [illegible]

$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

egy differenciál k-forma: $\omega = \sum_{\forall I} f_I \, dx_I$

akkor $f_I =$

legyen $\omega_0 = f(x,y,z)$

$d\omega_0 = df = \underline{\nabla f \cdot d\underline{r}}$

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz = \vec{F} \cdot d\underline{r}$

$$
\begin{aligned}
d\omega_1 &= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\
&= (\cancel{f'_x\, dx} + f'_y\, dy + f'_z\, dz) \wedge dx + \\
&\quad + (g'_x\, dx + \cancel{g'_y\, dy} + g'_z\, dz) \wedge dy + \\
&\quad + (h'_x\, dx + h'_y\, dy + h'_z\, dz) \wedge dz \\
&= (g'_x - f'_y)\, dx \wedge dy + \\
&\quad + (h'_x - f'_z)\, dx \wedge dz + \\
&\quad + (h'_y - g'_z)\, dy \wedge dz = \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ -dx \wedge dz \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} = \\
&= \underline{\langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, d\underline{S} \rangle}
\end{aligned}
$$

próba:

$d(\vec{F} \cdot d\underline{r}) =$

$= (\vec{F}'_x\, dx + \vec{F}'_y\, dy + \vec{F}'_z\, dz) \wedge d\underline{r} =$

$= \vec{F}'_x \begin{pmatrix} 0 \\ dx \wedge dy \\ dx \wedge dz \end{pmatrix} + \vec{F}'_y \begin{pmatrix} dy \wedge dx \\ 0 \\ dy \wedge dz \end{pmatrix} + \dots =$

legyen $d\underline{r}_1 = \lim_{\Delta \to 0} \Delta \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{pmatrix}$

$d\underline{r}_2 = \lim_{\Delta \to 0} \Delta \underline{r}_2 = \begin{pmatrix} dx_2 \\ dy_2 \\ dz_2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} dx_1 & dx_2 \\ dy_1 & dy_2 \\ dz_1 & dz_2 \end{bmatrix}$

legyen $d\vec{S} = d\underline{r}_1 \times d\underline{r}_2 = \begin{pmatrix} dy_1\, dz_2 - dz_1\, dy_2 \\ dx_2\, dz_1 - dx_1\, dz_2 \\ dx_1\, dy_2 - dy_1\, dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dy \wedge dz(d\underline{r}_1, d\underline{r}_2) \\ -dx \wedge dz(d\underline{r}_1, d\underline{r}_2) \\ dx \wedge dy(d\underline{r}_1, d\underline{r}_2) \end{pmatrix}$

2. K - formula $\longrightarrow$ anichet integralunk

$$dx_I(A) = dx_{I_1} \wedge \dots \wedge dx_{I_k}(A) = \det \begin{pmatrix} A_{I_1} \\ \dots \\ A_{I_k} \end{pmatrix}$$

Def:

ω k forma : is a real valued function

$$\omega : M_{n \times k}(R) \longrightarrow R$$

satisfying:

- multilinearity : $\omega(A_1, \dots, \lambda B + \mu C, \dots, A_k) =$

$$= \lambda \omega(A_1, \dots, B, \dots, A_k) + \mu \omega(A_1, \dots, C, \dots, A_k)$$

T: The k forms ~~of~~ on a vector space R^n form a vector space of dimension $\binom{n}{k}$. The elementary k - forms are an orthonormal basis for this.

jel: $\Lambda^k(R^n)$

$$(\tau \wedge \omega)(A) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \tau(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(k)}) \, \omega(A_{\sigma(k+1)}, \dots, A_{\sigma(k+l)})$$

$$\boxed{dx \wedge dy = - dy \wedge dx}$$

együltalában $\boxed{\omega_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} \alpha_i dX_i}$

$\int$ - as soboslagov ; ω k-forma

$M \subset \mathbb{R}^n$, M k-dim. sk.

~~$M = \left\{ M(u) = \begin{pmatrix} \phi_1(u) \\ \phi_k(u) \end{pmatrix} \in M \;\middle|\; u \in D \subset \mathbb{R}^k \right\}$~~

$$\int_M \omega = ?$$

$$\cancel{\int_M \omega = \int_D \omega(M(u))}$$

$$\boxed{\begin{gathered} M \subset \mathbb{R}^n, \; M \text{ k-dim. sobosag} \\ M = \left\{ M(u) = \begin{pmatrix} \phi_1(u) \\ \vdots \\ \phi_n(u) \end{pmatrix} \in M \;\middle|\; u \in D \subset \mathbb{R}^k \right\} \\ \int_M \omega = \int_D \omega(D M(u)) \; u_1 \wedge \dots \wedge u_k \end{gathered}}$$

konkretno:

1) $$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\underline{l} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \begin{pmatrix} dx(\dot\gamma(t)) \\ \vdots \\ dz(\dot\gamma(t)) \end{pmatrix} dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \dot\gamma_x(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_z(t) \end{pmatrix} dt$$

2) $$\int_{(S)} \vec{F} \cdot d\underline{S} = \int_D \vec{F}(S(u,v)) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dy \wedge dz (DS) \\ -dx \wedge dz (DS) \\ dx \wedge dy (DS) \end{pmatrix}}_{\left| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right|} du \wedge dv$$

3) $$\int_{(V)} \vec{F} \, dV \xrightarrow{\text{transf.}} \int_{R'} \vec{F}(\underline{r}(x',y',z')) \, dx \wedge dy \wedge dz \, (D\underline{r}) \, dx' \wedge dy' \wedge dz' =$$

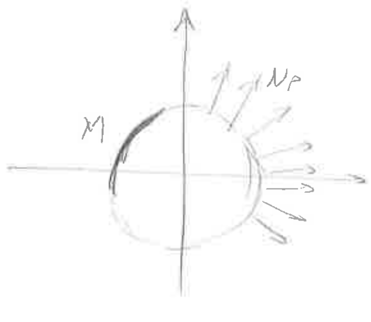
$$= \int_{R'} \vec{F}(\underline{r}) \det(J) \, dx' \wedge dy' \wedge dz'$$

Normatér :

① példa:

$$M = \{ \phi = x^2+y^2-9=0 \}$$

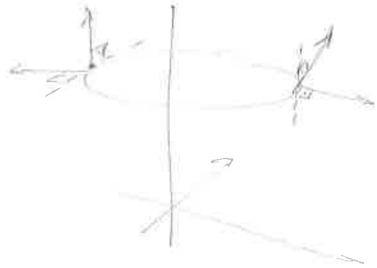
$$N_p = \{\nabla\phi(p)\}$$



$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

② példa

$$M = \{ \phi_1 = x^2+y^2+z^2-9=0 \} \cap \{ \phi_2 = x^2+y^2+(z-3)^2-9=0 \}$$



$$N_p = \{\alpha\nabla\phi_1(p) + \beta\nabla\phi_2(p)\}$$

Def: $N_p(M)$ normáltere az M-nek p-ben:

$$N_p(M) = \{\alpha_1\nabla\phi_1(p) + \dots + \alpha_{n-k}\nabla\phi_{n-k}(p) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \in \mathbb{R}\}$$

ez altere az $\mathbb{R}^n$-nek [minden p-ben külön-külön.]

Def: $T_p(M) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \perp N_p\}$

például: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$; $\dot\gamma(t)$ érintő irányú

$s(u,v) = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ \vdots \\ x_n(u,v) \end{pmatrix}$; $\frac{\partial s}{\partial u}$; $\frac{\partial s}{\partial v}$ érintő irányú

Def: ha M param. megadású $M = \{ u(\underline{u}) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ \vdots \\ x_n(u) \end{pmatrix} \mid \underline{u} \in \mathbb{R}^k \}$

akkor $T_p(M) = \{ \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial u_1} + \dots + \alpha_k \frac{\partial u}{\partial u_k} \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \}$ altere $\mathbb{R}^n$-nek

Def 1: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim manifold if

$\forall p \in M$:

$\exists\, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$\exists\, V \subset \mathbb{R}^k$

$\exists\, \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

parameteres megoldás

úh. $\phi(V) = M \cap \mathcal{U}$

és $D\phi$ → Jacobian matrix: teljes rangú

Def 2: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim manifold if

$\forall p \in M$

implicit megoldás

$\exists\, \mathcal{U}$ open set

$\exists\, (n-k)$ db diffható függvény

ú. h.

$$M \cap \mathcal{U} = \{\phi_1 = 0\} \cap \{\phi_2(x_1, \dots, x_n) = 0\} \cap \dots \{\phi_{n-k} = 0\}$$

és:

$$J = \left[\nabla \phi_1 \,|\, \dots \,|\, \nabla \phi_{n-k}\right] \neq 0 \;\; \forall p \in M \cap \mathcal{U}$$

azaz lineárisan függetlenek

általában: Def: $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$ k-dim sokaság, ha

$\forall \alpha$: $\mathcal{U}_\alpha$ nyílt halmazra

$\exists\, V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ nyílt(?)

$\exists\, \phi_\alpha : V_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ bij.

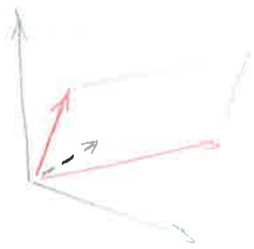
és: $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : \phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \to \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ diffható

Thomas Garrity : [Általános Stokes]

1. Sokaságok:

$$\boxed{\text{Terület}\,[\underbrace{\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \dots \mid \underline{v}_k}_{A_{k\times n}}] = \sqrt{\det(A\cdot A^T)}}$$

Bizonyítás: [vázlatos]



legyen $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

úgy forgatom el a koordinát rendszert, hogy a felesleges koordináták 0-ák legyenek:

ötlet: $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$-ra $\longrightarrow$ Gramm-Schmidt ortogonalizá

$\Downarrow$

$v_1 = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ 0 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A' = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'^T \cdot A' = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & 0 \\ b_1' & b_2' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}}_{B}{}^2$$

$$\sqrt{\det(A'^T \cdot A')} = \sqrt{\det(B^2)} = \det B \quad (\text{q.e.d.})$$

Jacobi determinánsos differenciálformás levezetése!

Legyen $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ legyen $\mathcal{C}$ = egységkörlap

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(x,y)\, d(x,y) = ?$$

Korrekt felírás: $I = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{f(x,y)\, dx \wedge dy}_{\omega\ (2\text{-forma})}$

legyen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Phi(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$ $\qquad D\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}$

$$(r,\theta) \in I = [0\ 1] \times [0\ 2\pi]$$

$$\Phi(I) = \mathcal{C}$$

$$dx \wedge dy = d\Phi_1(r,\theta) \wedge d\Phi_2(r,\theta) =$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} d\theta\right) \wedge \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r} dr + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} d\theta\right) =$$

$$= \cancel{\ldots dr \wedge dr} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} dr \wedge d\theta + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \underbrace{d\theta \wedge dr}_{= -dr \wedge d\theta} + \cancel{\ldots d\theta \wedge d\theta} =$$

$$= \det(D\Phi(r,\theta))\, dr \wedge d\theta$$

Tehát:

$$I = \int_{\mathcal{C}} \underbrace{f(x,y)\, dx \wedge dy}_{\omega} = \int_I f(\Phi(r,\theta)) \cdot \det(D\Phi(r,\theta))\, dr \wedge d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 f(\Phi(r,\theta)) \det(D\Phi(r,\theta))\, dr \right] d\theta$$

2016 PhD szept
Anal 3
Jacobi determ

Sokaság:

$\mathbb{R}^n$-ben k dim. sokaság lokálisan „k dim." euklideszi

Pl: $\mathbb{R}^3$-ban $k=1$

$$\phi_\alpha : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$$

$$U_\alpha = \{\phi(t) : t \in (-1,1)\}$$

(U_α, ϕ_α) ↖

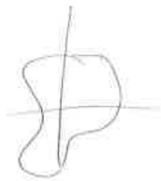
Paraméteres megadás

egy k dim implicit egyenlettel egy k-1 vagy 0 dim sokaság adható meg

l db k dim implicit egyenlettel egy k-l vagy 0 dim sokaság adható meg

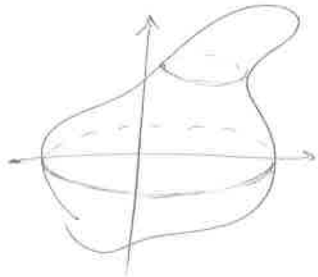
Másfajta megközelítés:

Pl görbe amikor: $F(x,y)=0$



$\mathbb{R}^2$-ben $k=1$ $F(x,y)=0$

$\mathbb{R}^3$-ban: $k=2$ $F(x,y,z)=0$



$$k=1 \left\{ \begin{array}{l} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{array} \right\}$$

Sokaság implicit megadása

$\mathbb{R}^n$-ben $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim-s sokaság (6.6.2 tétel)

$\forall p \in M$, $\exists U$ környezete

$\exists$ $n-k$ db n vált-s fv

$$\{f_1(x_1,\dots,x_n)=0\} \cap \{f_2(x_1,\dots,x_n)=0\} \cap \dots \cap \{f_{n-k}(x_1,\dots,x_n)=0\} =$$

$$M \cap U$$

Tfh. $\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_{n-k}(p) \in \mathbb{R}^n$

$$\text{rang}\,|\nabla f_1,\dots,\nabla f_{n-k}| = n-k$$

Pl: $S^1_E = \{\mathbb{R}^2\text{-beli egységkör}\}$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$S^1 = \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Def: M. k dim. sokaság

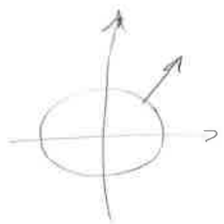
$p \in M$-beli NORMÁL TÉR

$N_p = \{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\}$ által kifeszített altér

n-k dimenziós altér $\mathbb{R}^n$-ben

Pl: $\nabla f(x_0, y_0)$

$\nabla f(x_0, y_0) = \{(x_0, y_0)\}$



Def: p-beli tangens tér [érintő tér]

$T_p = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{v} \perp N_p\}$

k dim. altér

Megj: Ha ~~...~~ M-et paraméteresen adjuk meg

$\forall p \in M$-ben $\exists \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diff

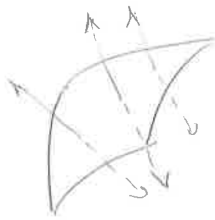
$$D\phi = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1 \\ \dots \\ \nabla\phi_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$ az oszlopvektorok adják a tangens t. (T_p-t)

a normáltér meg merőleges a tangens térre.

$N_p = \{\underline{v} \mid \underline{v} \perp T_p\}$

Sokaság irányítása

az érintővektorok folytonosan változnak



→ itt az irányítást a normálvektor adja meg

Def: a felület irányítható, ha ez folytonosan megválasztható

Áll: V vektortér n dimenziós

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ – bázis [egyik]

$\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset V$ – bázis

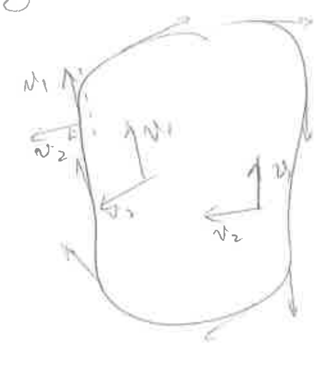
$a_i = \sum_j a_{ij} w_j$

$\det(A) \neq 0$ → + / → −

→ ekvivalencia reláció a bázisok között (+, a másik −)

Sokaság irányítása ≡ X_p irányítása folytonos módon

Sokaság ill. határának irányítása



$$\int_M d\omega = ?$$

Differenciál formák

$\mathbb{R}^n$-ben k dim. térfogat [mérték]

$\mathbb{R}^n$-ben $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$

„Paralelogrammát" feszít ki

Áll: ezek „mértékét" $[v_1, v_2, \dots, v_n] = A \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Ezek által kifeszített paralelogramma: =

$$= \left[\det(A^T A)\right]^{\frac{1}{2}}$$

NAGYON SZÉP

MÉRTÉK MEGHATÁROZÁS

k = 1:

$$\left[\det (v_1, v_2, \dots, v_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_i v_i^2} \quad \text{valóban}$$

k = n:

$$\sqrt{\det A^T \det A} = \det A$$

$\mathbb{R}^3$-ban:

koordinátákat:

x_1, x_2, x_3

1. lépés: Elemi differenciál formák

<u>Def</u>: Elemi 1 forma

dx_1
dx_2 $\quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ leképezés
dx_3 $\quad v \in \mathbb{R}^3$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} dx_1(\underline{v}) = v_1 \\ dx_2(\underline{v}) = v_2 \\ dx_3(\underline{v}) = v_3 \end{cases}$$

<u>Def</u>: Elemi 2 formák

$$\left.\begin{array}{l} dx_1 \wedge dx_2 \\ dx_1 \wedge dx_3 \\ dx_2 \wedge dx_3 \end{array}\right\} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

WEDGE szorzat

$$dx_1 \wedge dx_2(\underline{v}, \underline{w}) = dx_1 \wedge dx_2 \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

$$dx_2 \wedge dx_3(\underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$-ben $:(x_1, .., x_n)$

Elemi k-forma

k db index kiválasztása

$1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots < i_k \le n$ $\quad$ $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$

ha $\le$! akkor 0 lenne

$I = (i_1, i_2, .., i_k)$

$dx_I : \mathbb{R}^{n \times k} \to \mathbb{R}$

$dx_I(A) = \begin{pmatrix} \cdots \\ \vdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}$

elemi formákból $\binom{n}{k}$ db van

Anal III

(2) $\oint_C F(r)\,dr = 0$

$$\oint_{(S)} F\,dA = \int_{(V)} \nabla F\,dV$$

$$\oint_{\gamma} F\,dl = \iint_{(S)} \nabla \times F\,dA$$

$\nabla f = F$

$$\oint F\,dr = \oiint_{(S)} \nabla \times F\,dr = \oiint_{(S)} \nabla \times (\nabla f)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dots = 0$$

$$\boxed{\nabla \times (\nabla f) = 0}$$

ha:

$$\oint_{(S)} F(r)\,dS = \oint_{(S)} (\nabla \times G)\,dS = \int_{(V)} \underbrace{\nabla(\nabla \times G)}_{=0}\,dV$$

$S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$:

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

normvektor: [hogy mondom ki]

$\iint F \cdot dS$

$dS = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial s}{\partial u} & & \end{vmatrix}$ → egyből ezt kell írni: $\begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$

$$\iint F \left| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right| dS = \iint \left\langle F, \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\rangle$$

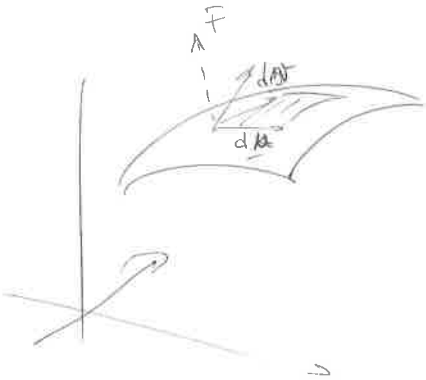
$$s = \begin{pmatrix} 2r \sin\varphi \cos\theta \\ 3r \sin\varphi \sin\theta \\ r \cos\varphi \end{pmatrix}$$

---

tehát van vele egy $F: \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}(\underline{s})$

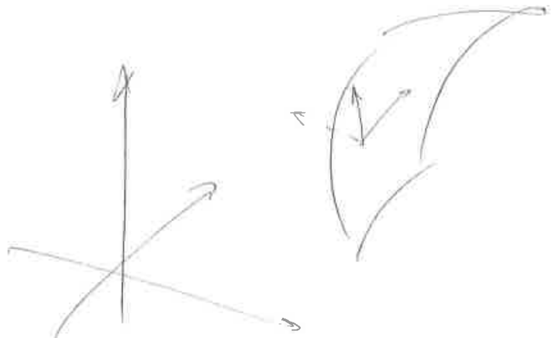
$$S(u,v) = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

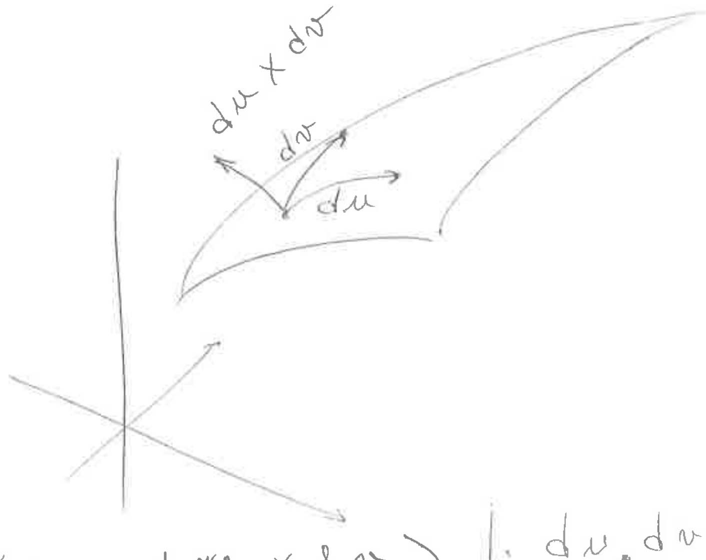
$$\iint_{(S)} F \, d\underline{S} =$$



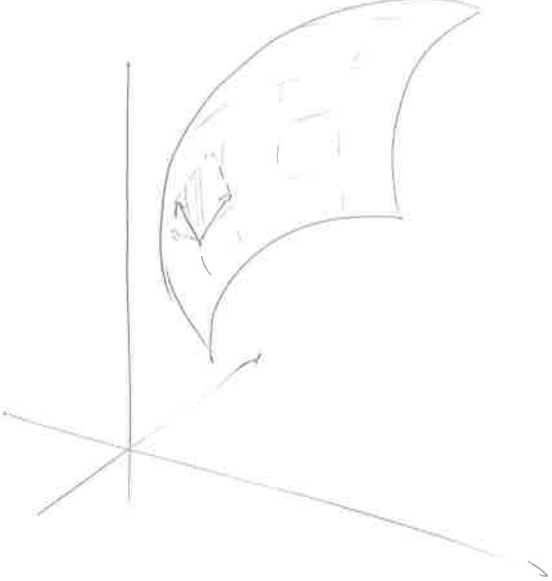
$$\sum \langle \underline{F}, d\underline{x} \times d\underline{y} \rangle$$

$$\iint_{(S)} \langle F, d\underline{S} \rangle$$

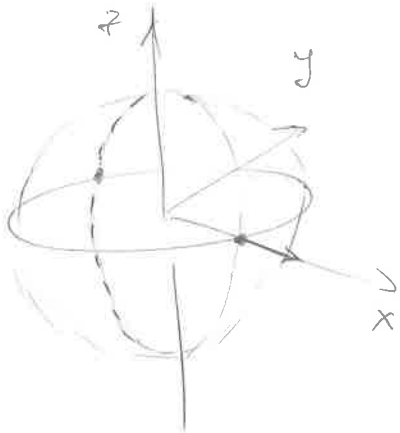




$$\sum \langle \underline{F}, \Delta u \times \Delta v \rangle \Big| \cdot du, dv$$



legyen pl: $S(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$



$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

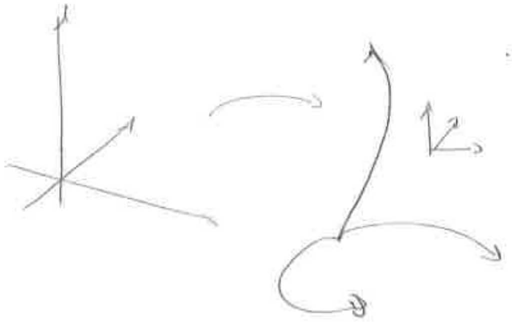
$$\frac{\partial S}{\partial \theta} \times \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\theta \\ -\sin\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi \cos\theta \\ \cos^2\varphi \sin\theta \\ \sin\varphi \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ha $\varphi = 0, \ \theta = 0$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} \times \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tehát igen $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \to$ ez pont az $\underline{n}$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$



nove volume $\iiint_R f(r)\,dV$

leggyle $r = \begin{pmatrix} x(u,v,\cancel{z}) \\ \\ \end{pmatrix} \Rightarrow dr = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial \cancel{x}}{\partial z}dz \\ \\ \end{pmatrix}$

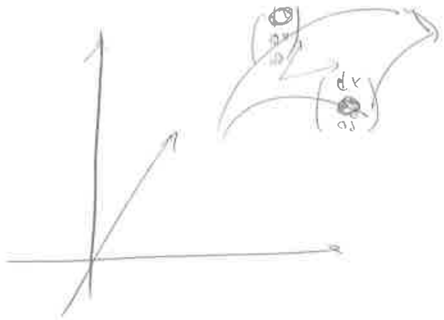
$$dV = \begin{vmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix}$$

$$\cancel{dV' = \left| \frac{\partial x}{\partial u}du + \partial \right.}$$

$$dV' = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial \cancel{x}}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial z}dz \right)\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \ldots \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial z} \end{pmatrix} \Big(dr' \cdot$$

nuis

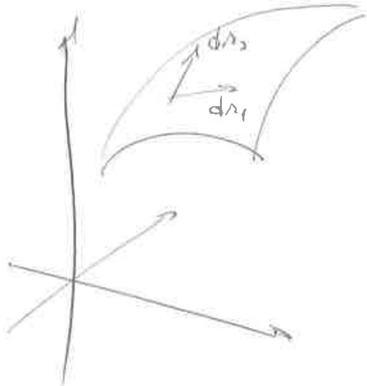


$$r = \Big($$

$$S = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

$$dS_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \partial \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z}{\partial u} \cdots & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$



$$\underline{r} = S(\underline{u})$$

$$\sum (\underline{v}, dr_1 \times dr_2) =$$

$$= \sum \Big(\underline{v}(S(\underline{u})), dS(\underline{u}_1) \times dS(\underline{u}_2) \Big) =$$

$$= \sum \left\langle \underline{v}(S(\underline{u})), \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial S_1}{\partial v_1} dv_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial S_3}{\partial u} du_1 + \frac{\partial S_3}{\partial v_1} dv_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial S_1}{\partial v_2} dv_2 \\ \cdots \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \sum \langle v(S(u)), \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u_1}, \frac{\partial S_1}{\partial v} \\ \vdots \end{pmatrix} d\underline{u} \times$$

$$\underline{x} = F(\underline{u})$$

$$\sum \langle \underline{v}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial S_1}{\partial v_1} dv_1 \\ \frac{\partial S_2}{\partial u} du_1 + \frac{\partial S_2}{\partial v} dv_2 \\ \cdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial S_1}{\partial v_2} dv_2 \\ \frac{\partial S_2}{\partial u} du_2 + \frac{\partial S_2}{\partial v} dv_2 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial S_2}{\partial u} du_1 du_2 +$$

① Egységgömb : bizonyítsa be, hogy sokaság :

$$\phi(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$(x, y) \longmapsto \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$$

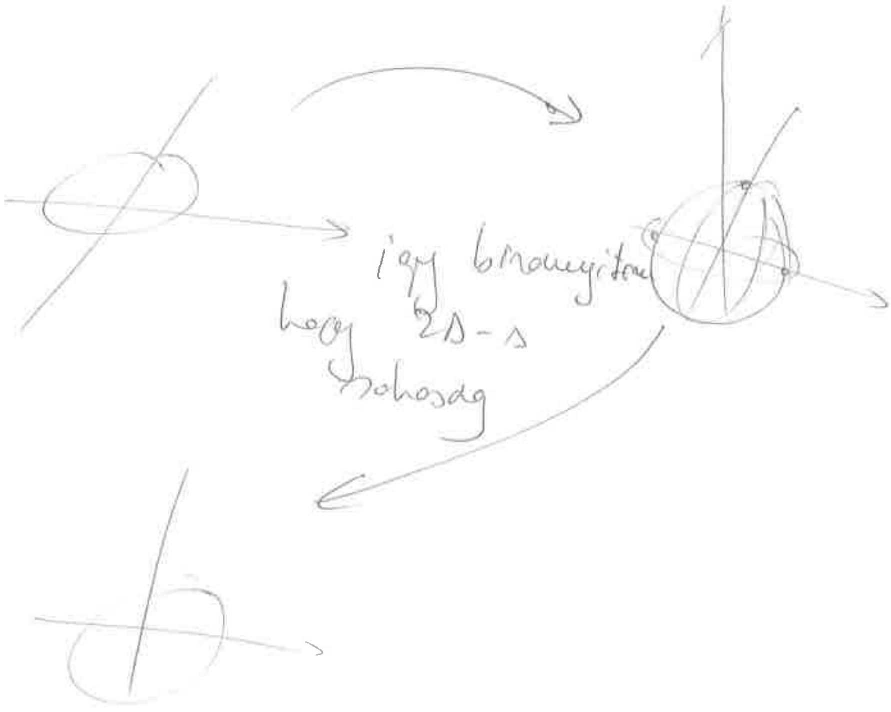
(x, y)

$$\nabla \circ \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial F_y} \end{pmatrix}$$

lényeg: az egységgömb feltételt meg nézzük hogy le

feltételezni az egységkörrel :

Bz be. hogy 2 dim. sokaság



Projektív tér:

$\mathbb{R}^{n+1}$

$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(x_0 : x_1 : \dots : x_n)}$$

$\boxed{\text{Google: Projektív tér}}$

$\mathbb{R}^n$ $(u_1, u_2, \dots, u_n)$

$\phi_0 = (1, u_1, u_2, \dots, u_n)$

$\phi_1 = (u_1, 1, u_2, \dots, u_n)$

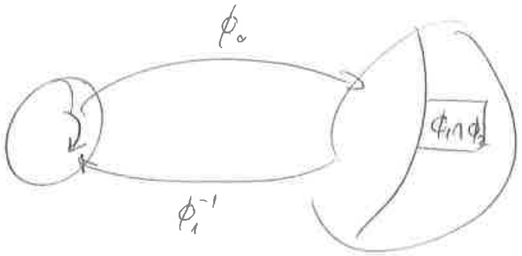
$\dots$

$\phi_n = (u_1, \dots, u_n, 1)$

$\phi_1^{-1}\phi_0 \to$ metszet.

$\phi_0 \equiv \left(\frac{1}{u_1}, 1, \frac{u_2}{u_1}, \dots, \frac{u_n}{u_1}\right) \longrightarrow$ így

ϕ_0 és ϕ_1 azonos alakú lett, csak az első koord. vált.



Elemi formák $\mathbb{R}^n$-ben

ANAL 15

Elemi 1 forma:

dx_i

Elemi 2 forma:

pl: $dx_1 \wedge dx_2 (v\ w) = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$

Elemi k forma

$|I| = k$

$I \subset \{1, 2, \dots n\}$

$dx_I (A)$

$dx_I (A) = \begin{vmatrix} \cdots \\ \vdots \end{vmatrix}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Általános k forma

$\omega : \mathbb{R}^{n \times k} \longrightarrow \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times k}$: A multilineáris

$A = (A_1, A_2, \dots, A_k)$

$$\left.\begin{aligned} &\omega(A_1 + B_1, A_2, \dots, A_k) = \omega(A_1, A_2, \dots, A_k) + \omega(B_1, A_2, \dots, A_k) \\ &\omega(\lambda A_1, \dots, A_k) = \lambda\, \omega(A_1, \dots, A_k) \end{aligned}\right\}$$

alt.

olyan mint a determináns...

Spec esetek: elemi k formák

Látható, hogy ezek (ω) vektorteret alkotnak

$(\omega + \tau)(A) = \omega(A) + \tau(A)$

Anal 5 e.a

Vektortér-féle:

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to$ k formák vektortere

Pl: $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$

$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$

$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right) = \alpha_1$

$\omega\left(\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right) = \alpha_k$

$\Downarrow$

$$\omega(\underline{v}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, dx_k(\underline{v})$$

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, dx_k$$

$\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$-ben bázis

elemi 1 formák $dx_1, \ldots, dx_n$

$\dim(\Lambda^1(\mathbb{R}^n)) = n$

Hasonlóan:

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to$ bázist alkotnak elemi k formák

$\dim(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)) = \binom{n}{k}$

k formákon műveletek:

összeadás, $\cdot\lambda$, külső szorzat (ékszorzat) [wedge product]

$\omega \to k$ forma

$\tau \to l$ forma

$\omega \wedge \tau \to k+l$ forma

Def:

$$(\omega \wedge \tau)(A) = \sum \omega(A_{\sigma(1)}, \sigma(k)) \cdot \tau(A_{\sigma(k+1)}, \dots, \sigma(n)) (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma)}$$

$$A = \underbrace{\left(\; | \; | \; | \; | \; | \; \right)}_{k+l}$$

$\sigma(1) \dots \sigma(k)$ → kiválasztott k db-ot

$\sigma(k+1)$ $\sigma(n)$ → maradékot.

Pl: két elemi 1-es:

$\omega = dx_1$

$\tau = dx_2$

$\omega \wedge \tau (A_1, A_2)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$$

$(1,2) \to (1,2) \to +\sigma(1) = 1$

$(1,2) \to (2,1) \to -\sigma(2) = 2$

$\omega \wedge \tau = +$

$$dx_1 \wedge dx_2 = dx_1(A_1) \cdot dx_2(A_2) - dx_2(A_1)\, dx_1(A_2) =$$

$$= \begin{vmatrix} dx_1(A_1) & dx_1(A_2) \\ dx_2(A_2) & dx_2(A_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \det(A) = dx_1 \wedge dx_2$$

Elemonat tulajdonságai:

~~Irrrrr~~

1. $dx_i \wedge dx_i = 0$

2. $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$

3. asszociatív:

$$(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k = dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)$$

Biz: 1, 2, 3 → könnyen

Áll: Ált. formulák esetén is igazak ezek.

Differenciál k forma

Helytől függő k forma

0 forma: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható függvény

differenciál 1 forma:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i$$

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható fv-ek

Pl: $\omega = x_1^2 \, dx_1 + \sin x_2 \, dx_2$

Differenciál 2 forma

$$\sum_{i<j} f_{ij} \, dx_i \wedge dx_j$$

$f_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható

pl $(\sin x_1) x_2 \, dx_1 \wedge dx_2$

Differenciál k forma:

Di: $\omega = \sum_I f_I \, dx_I$

dx_I elemi k forma

$I \subset \{1, .., n\}$ $I = i_1 < i_2 .. < i_k$

$f_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff.

Differenciál formák

- " + "
- " · "
- " $\wedge$ " $\to$ mindent mindennel
- külső deriválás

$\omega = f_1 \, dx_1 + f_2 \, dx_2 + f_3 \, dx_3$

$\tau = g_1 \, dx_1 + g_2 \, dx_2 + g_3 \, dx_3$

$\omega \wedge \tau = (f_1 g_2 - f_2 g_1)(dx_1 \wedge dx_2) + (f_1 g_3 - f_3 g_1) \, dx_1 \wedge dx_3 +$
$+ (f_2 g_3 - g_2 f_3)(dx_2 \wedge dx_3)$

Külső deriválás:

$d : \omega \longrightarrow d\omega$

k forma $\qquad$ k+1 forma

1. lehépzés:

ω legyen 0 forma:

$\omega = f(x_1, .., x_n)$

$d\omega \to 1$ forma

Def: $d\omega = f'_{x_1} dx_1 + \dots + f'_{x_n} dx_n = \langle \nabla f, d\underline{x} \rangle$

2. lépés:

egyetlen tag

$\omega = f_I \, dx_I$

Def: $d\omega = df_I \wedge dx_I$

Pl: $\omega = (x_1^2 + 2x_2)\, dx_2$

$$d\omega = (2x_1\, dx_1 + 2\, dx_2) \wedge dx_2 =$$
$$= 2x_1\, dx_1 \wedge dx_2 + 0 =$$
$$= 2x_1 \mid$$

3. lépés:

$\omega = \sum f_I \, dx_I$

$d\omega = \sum df_I \wedge dx_I$

folyt: $d(d\omega) = (2\, dx_1) \wedge (dx_1 \wedge dx_2) = 0$

$\boxed{\text{Poincaré lemma: } \forall\, \omega\text{-ra: } d(d\omega) = 0}$

HF: $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$

$\boxed{\text{Számold ki: } d(df(\underline{x})) = \dots}$

Diff. formák, vektormezők $\mathbb{R}^3$-ban.

lesz: dx, dy, dz

$dx \wedge dy, \; dx \wedge dz, \; dy \wedge dz$

$dx \wedge dy \wedge dz$

T_0, T_1, T_2, T_3
olyan függvények
melyek egy dif. form.
egy függvényt rendelnek

Megfeleltetés:

T_0 0-formák $\longrightarrow$ skalár fv.

$\omega = f(x,y,z)$

$T_0(\omega) = f(x,y,z)$ diffható

T_1 1-formák $\longrightarrow$ vektormezőt

$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$T_1(\omega) \Longrightarrow \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

T_3 3 forma $\longrightarrow$ skalár függvény

$\omega = f \cdot (dx \wedge dy \wedge dz)$

$T_3(\omega) = f$

T_2 2 forma $\longrightarrow$ vektormezőt

$\omega = f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz$

$T_2(\omega) = \begin{pmatrix} h \\ -g \\ f \end{pmatrix}$

Külső derivált:

0-f esetén!

$\omega = f$

$d\omega = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$

$$T_1(d\omega) = (f'_x, f'_y, f'_z) = \nabla T_0(\omega)$$

$$\boxed{T_1(d\omega) = \nabla T_0(\omega)}$$

1 forma esetén:

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$d\omega = f'_y\,dy \wedge dx + f'_z\,dz \wedge dx$$
$$g'_x\,dx \wedge dy + g'_z\,dz \wedge dy$$
$$h'_x\,dx \wedge dz + h'_y\,dy \wedge dz$$

$$T_2(d\omega) = \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_2(d\omega) = \nabla \times T_1(\omega)}$$

$$T_2(d\omega) = \nabla \times T_1(\omega)$$

2. forma:

$$\omega = f\,dx \wedge dy + g\,dx \wedge dz + h\,dy \wedge dz$$

$$d\omega = f'_z\,dz \wedge dx \wedge dy + g'_y\,dy \wedge dx \wedge dz + h'_x\,dx \wedge dy \wedge dz$$

$$T_3(d\omega) = \nabla \cdot T_1(\omega) = \cancel{\text{grad}}\ \text{div}\, T_2(\omega)$$

$$\boxed{T_3(d\omega) = \nabla \cdot T_1(\omega)}$$

Köv:

Poincare lemma:
$$d(d\omega) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{rot}(\text{grad}\, f) = 0 \\ \text{div}(\text{rot}\, F) = 0 \end{cases}$$

$\int_M \omega = ?$ | $k = 3$ esetén: $M \subset \mathbb{R}^3$ diff. 3-as $f\,dx\,dy\,dz$ } 3-as integrál $\Rightarrow \iiint_M f\,dx\,dy\,dz$

$$\omega = \sum_{\forall I} f_I \, dx_I$$

pl: $x\,dx + z\,dy + 0\,dz \to \mathbb{R}^3$-ban differenciál 1 forma

$xy\,dx\,dy + 3\,dx\,dz + 4x\,dy\,dz \to \mathbb{R}^3$ ban differenciál 2 forma

$f(x,y,z) \to \mathbb{R}^3$ ban diff 0 forma

$$d\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f \, dx_i$$

$$\underset{(\omega_{n+1})}{d\omega_n} = \sum_{\forall I} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f_I \, dx_i \right) \wedge dx_I$$

pl

$\omega := e^x \cos(xy)$

$$d\omega_0 = \left[e^x \cos(xy) - y e^x \sin(xy)\right] dx - x e^x \sin(xy)\, dy$$

$$d(d\omega_0) = \dots dx \wedge dx - \left[e^x \sin(xy) + x e^x \sin(xy) + xy\, e^x \cos(xy)\right] dy$$

$$\omega_0 = f(x,y)$$

$$\omega_1 = d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$d\omega_1 = d(d\omega_0) = \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx \wedge dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \wedge dy} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx \wedge dy$$

pl 2:

$$\omega_1 = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

$$d\omega_2 = (0 \cdot dx + z \cdot dy + y\,dz) \wedge dx + (z\,dx + 0 \cdot dy + dz)\,dy +$$

$$+ (y\,dx + x\,dy) \wedge dz =$$

$$= z\,dy \wedge dx + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy +$$

$$\omega_2 = xyz\, dx\, dy \longrightarrow d\omega_2 = (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz) \wedge dx\, dy =$$

$$= xy\, dz \wedge dx \wedge dy$$

$\boxed{d(d\omega) = 0}$ Poincare lemma

$$\omega = f(x,y,z)\, dx$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right) \wedge dx =$$

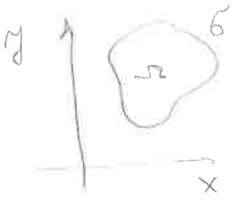
$$= \frac{\partial f}{\partial y} dy\, dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx$$

$$d(d\omega) = \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, dz} dz\right) \wedge dy\, dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} dz}\right) \wedge dz \wedge dx =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \underset{\text{1 inverzió}}{dz \wedge dy} \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \underset{\text{ellentétes kapott}}{dy \wedge dz} \wedge dx = 0$$

Green-t



$$\oint_\sigma [P\, dx + Q\, dy] = \iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dx\, dy$$

$$\oint_\sigma -y\, dx + x\, dy = \oint_\sigma \left[-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt}\right] dt =$$

$$= \oint_\sigma \left\langle \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \dot\sigma \right\rangle dt$$

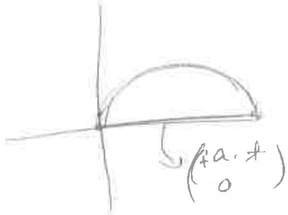
Ciklois:

$x = a(\theta - \sin\theta)$

$y = a(1 - \cos\theta)$; legyen $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \longrightarrow$ mert ezáltal megkapjuk a görbe által bezárt terület kétszeresét

$$T = -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a(1-\cos\theta) \\ a(\theta-\sin\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(1-\cos\theta)a \\ a\sin\theta\end{pmatrix} d\theta + \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}0\\ a\cdot t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} dt =$$

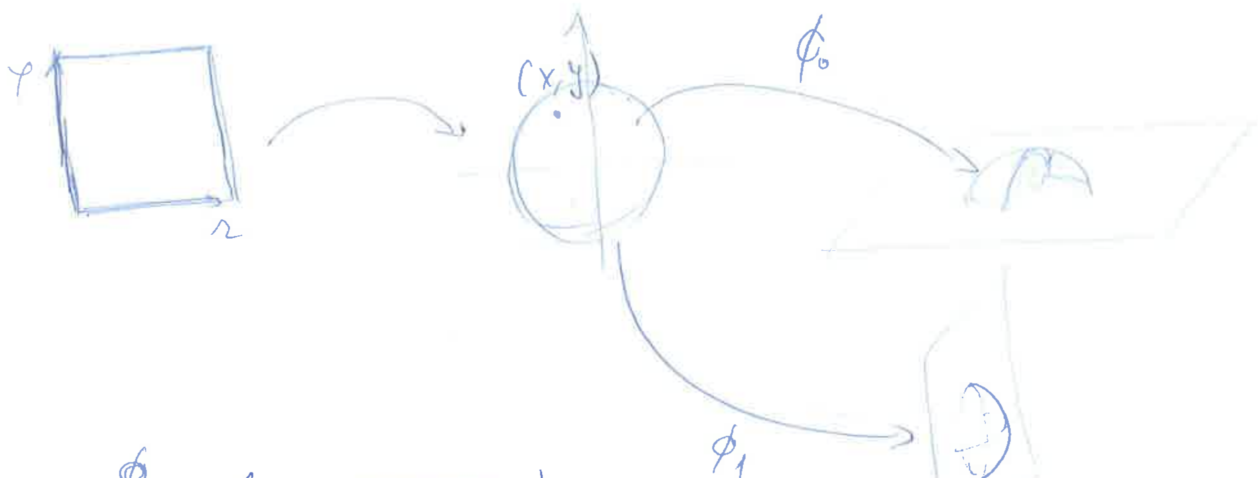
$$= \int_0^{2\pi}\left(-a^2 + 2a\cos\theta + a\theta\sin\theta\right)d\theta =$$



$$= -a^2 2\pi + 0 - a\theta\cos\theta\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} a\cos\theta\, d\theta =$$

$$= -a^2 2\pi + a 2\pi + 0 + 0 =$$

$$= -$$



$$(x,y) \xrightarrow{\phi_0} \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$(x,y) \xrightarrow{\phi_1} \left(\sqrt{1-x^2-y^2}, y, x\right)$$

$$(x,y) \xrightarrow{\phi_0} \left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right) = \left(\sqrt{1-(1-x^2-y^2)-y^2}, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{1-\underbrace{\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2}_{x_2}-\underbrace{y^2}_{y_2}}, \underbrace{y}_{y_2}, \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2}}_{x_2}\right) \xrightarrow{\phi_1^{-1}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2}, y\right)$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-x^2-y^2} \\ y \end{pmatrix}$$

$\omega_0 = f(x,y,z)$

$$d\omega_0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

$\omega_1 = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$$d\omega_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \frac{\partial R}{\partial y}dz\wedge dy +$$

$$+ \frac{\partial P}{\partial x}dx\wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\wedge dz =$$

$$= \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$(dx_i \wedge dx_j)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_j & b_j \\ a_i & b_i \end{vmatrix}$$

$$dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Anal gyak 6}}$

$$d_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

pl $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

$$= \sum_{\sigma \in S(k)} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \eta(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k)})\, \omega(A_{\sigma(k+1)} \dots A_{\sigma(k+l)})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 & & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & \cdot & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & & 4 \end{pmatrix}$$

pl: $(dx_1 \wedge dx_3) \wedge dx_2 = *$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \checkmark$

$1\ 3\ 2 \to \checkmark$

~~2 1 3~~

$2\ 3\ 1 \quad \checkmark$

~~3 1 2~~

~~3 2 1~~

$$* = (1\cdot(-1) - 4\cdot 4)\cdot 7 - (4-0)\cdot 2 + (1\cdot 1 - 0)\, 2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot |7| - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} |2| + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} |2|$$

↳ lehet, hogy ez nem [illegible] ...

$$\boxed{dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1}$$

↳ Bizonyítsd be!

$\boxed{\text{Anal gyak}}$

Integrálás sokaságon

M : k dim sokaság ≈ k dim. gömb

(ω) diff. k formák : ≈ k dim mérték
(terület, hossz, térfogat)

$$\int_M \omega = ? \equiv \text{k dimenziós integrál}$$

Pl: $\mathbb{R}^2$-ben $k=1$

Eddig
$$\int_\gamma \underline{F}(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_a^b F_x\, dx + F_y\, dy = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

1 formák:

$$\omega = f\, dx = f(x,y)\, dx$$
$$\tau = g\, dy = g(x,y)\, dx$$

1 dim sokaság:

$$M = \{\sigma(u) ; u \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$\sigma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$$

$$\int_M \omega = \int_M f(x,y)\, dx = \int_a^b f(x(u), y(u)) \frac{dx}{du} \cdot du$$

helyettesítés: $(x,y) \longrightarrow \sigma(u) = (x(u), y(u))$
$dx \longrightarrow x'(u)\, du$
$M \longrightarrow (a,b)$

$$\int_M \tau = \int_a^b g(x(u), y(u)) \frac{dy}{du} du$$

Paraméteres megadás $\sigma : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\underline{l} \rangle = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y)$$

$$F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \mathbb{P}(x,y)$$

$$\underline{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$\langle F, d\underline{l} \rangle = P\,dx + Q\,dy \quad \text{dif } 1\text{-form}$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

$$d\omega = d\left(P\,dx + Q\,dy\right) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy =$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x} dx} + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \cancel{\frac{\partial Q}{\partial y} dy} \right) \wedge dy =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$

dx, dy, dz

$f(x)$

$f'(x) = \dfrac{df}{dx}$

$df = f'(x)\, dx$

f: 0 forma

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz = \nabla f \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}_{d\underline{r}}$

d. 1 forma: $d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$

$\left(\cancel{\dfrac{\partial P}{\partial x} dx} \dots + \dfrac{\partial P}{\partial z}\right) \wedge dx + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dots + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) \dots =$

$f(x,y,z)$

$df = \langle \nabla f, d\underline{r} \rangle$

$= \left\langle \mathrm{Rot}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ -dx \wedge dz \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} \right\rangle$

$d\underline{r} = d\underline{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

d. f 2 form.

$df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dy + \dfrac{\partial f}{\partial z} dz$

$$D\sigma(u) = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix}$$

$$dx(D\sigma) = x'$$

$$dy(D\sigma) = y'$$

$\omega(D\sigma)\, du \to 1$ dim.

<u>Ált.-san:</u> $\mathbb{R}^n$

k dim sokaság

adott egy térkép

$\phi : D \to \mathbb{R}^n$ diffható függvény ; $\phi(u_1, u_2, \dots, u_k) = \begin{array}{c} k \\ \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \end{array}$

$D \subset \mathbb{R}^k$ (≈ gömb)

Jacobi mátrix $\quad D\phi = \begin{array}{cc} k & \\ \begin{bmatrix} \leftarrow \rightarrow \\ \nabla\phi_i \\ \leftarrow \rightarrow \\ \leftarrow \rightarrow \\ \leftarrow \rightarrow \end{bmatrix} & n \end{array}$

ω diff. k forma

$$\omega\left(\begin{array}{cc} k & \\ \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} & n \end{array} \right) \to \mathbb{R}$$

$$\int_M \omega := \int_D \omega(D\phi)(u_1, \dots, u_k)\, du_1\, du_2 \dots du_k$$

Ált STOKES tétel:

$M \subset \mathbb{R}^n$ k dim. sokaság

∂M : k-1 dim sokaság

ω diff k-1 forma, ekkor!

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

1 Speciális esetek:

N - L : $n=1, k=1$

Stokes : $n=3, k=\cancel{1}$

Div, G - O : $n=3, k=\cancel{2}$ (Gyak)

Green T : $n=2, k=\cancel{1}$

Stokes T: (klasszikus)

$S \subset \mathbb{R}^3$ felület ; ∂S zárt görbe

$S = \{(u,v) \mid \dots\}$

F vektor mező, diffható

$$\iint_S \nabla \times F(\underline{r})\, d\underline{S} = \oint_{\partial S} F(\underline{r})\, d\underline{r}$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \longleftrightarrow \omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$\int_{\partial S} F(\underline{r})\, d\underline{r} = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$d\omega \approx \nabla \times F$

$$\begin{aligned} d\omega = &(\nabla \times F)_3\, dx \wedge dy \\ &-(\mathrm{rot}\, F)_2\, dx \wedge dz \\ &+(\mathrm{rot}\, F)_1\, dy \wedge dz \end{aligned}$$

ω 1 forma $\longleftrightarrow F$ $d\omega$ 2 forma $\longleftrightarrow \nabla \times F$
ω 2 forma $\longleftrightarrow F$ $d\omega$ 3 forma $\longleftrightarrow \nabla F$
ω 0 forma $\longleftrightarrow f$ $d\omega$ 1 forma $\longleftrightarrow \nabla f$

$M \equiv S$ felület

paraméterezés:

$$M = \phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u,v) \end{pmatrix} (u,v) \in D$$

$$D\phi = \begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

$$\int_M d\omega = \iint_D$$

$$(\nabla \times F)_3 \, dx \wedge dy = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (\nabla \times F)_3$$

$$\int_M d\omega = \iint_D \left(\operatorname{rot} F_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (\operatorname{rot} F)_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{vmatrix} + (\operatorname{rot} F)_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{vmatrix} \right) d(u,v)$$

$$= \iint_D (\nabla \times F) \begin{pmatrix} -\varphi'_u \\ -\varphi'_v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v)$$

$$\iint_D \omega(D\phi) \, d(u,v)$$

<u>Spec eset</u>:

$\mathbb{R}^3$-ban

$M \subset \mathbb{R}^3$ 3-dim sokaság = térrész

ω 3forma $f(x,y,z) \, dx \wedge dy \wedge dz$

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

<u>Ált Stokes tétel</u>:

$n = 2$, $k = 2$

$\mathbb{R}^2$-ben: $\omega = f dx + g dy$

$$d\omega = \cancel{\ldots} = (g'_x - f'_y) \, dx \wedge dy$$

2 - dim. időség : Ω

határa : $\partial\Omega = C$ zárt görbe

$\boxed{\text{Green tétel}}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány határa egy zárt görbe

Adott $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ diffható

Áll:

$$\oint_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega} (Q'_x - P'_y)\,d(x,y)$$

Ha F skalárpotenciálos:

azaz $\exists\, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diffható, melyre $F = \nabla f$

Green:

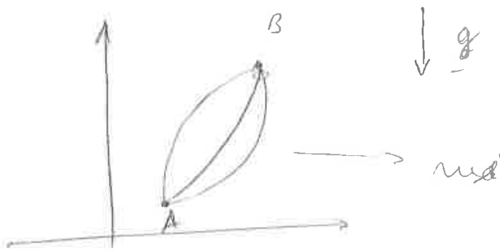
$$\oint_{\partial\Omega} F(\underline{r})\,d\underline{r} = \iint_{\Omega} (f''_{yx} - f''_{xy})\,d(x,y) = 0$$

$\boxed{\text{VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS}}$

Courant John : Ch 9

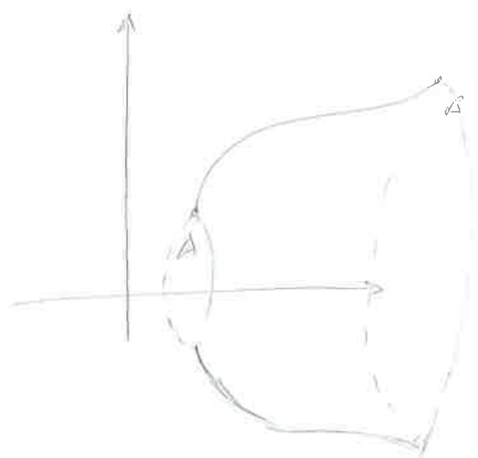
Példák:

① Bernoulli (1696-os probléma)



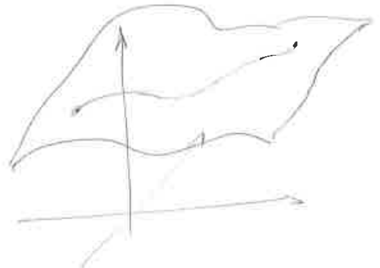
mikor lesz a legrövidebb az idő?

(2)



→ mikor lesz minimális a felülete?

(3)



Adott egy felület, nem két pont,

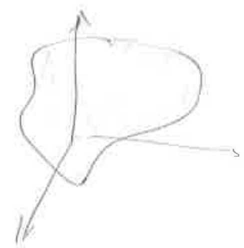
$P_1, P_2 \in S$

legyen $\widetilde{P_1 P_2} \subset S$

↓

legyen min

(4) $\mathbb{R}^3$-ban adott egy görbe, adott



→ minimális felszínű felületet, aminek ez a határa

1) : Mat formula:

ha $y = y(x)$; $y(x_0) = y_0$

$y(x_1) = y_1$

(x_1, y_1)

$\downarrow$ + grav

(x_0, y_0)

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y')^2(x)}}{\sqrt{y(x)-y_0}}\, dx$$

2) $\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$

$\phi(x_0) = y_0$ → láncgörbe

$\phi(x_1) = y_1$

$$\text{Felszín} = \int_{x_1}^{x_2} \phi(x) \sqrt{1+\phi'^2(x)}\, dx$$ → ezt kell minimalizálni

3) Feladat: megengedhető függvények halmaza:

$$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \text{ diffhatóak } \text{és } \phi(x_0) = y_0,\ \phi(x_1) = y_1\}$$

adott $x_0, x_1; y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

Adott egy $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ [funkcionál]

keressük a min. és maximumot

$\min I(\phi);\ \phi \in \mathcal{C}$

ahol I spec alakú

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx$$

F egy 3 vált függvény.

Variációszámítás:

C. J, II/2, Gh 4

$\left(\begin{matrix}(x_0, y_0) \\ (x_1, y_1)\end{matrix}\right)$ adottak

$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ \phi(x_i) = y_i,\ \phi$ kétszer diff$\}$ megengedhető

függvények.

Adott $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx \longrightarrow \text{min, vagy max}$$

Jelölés: F változói: $F(x, u, u')$ $\downarrow$ ez csak jelölés

Tfh. $u \in \mathcal{C}$-n felveszi a minimumot

$I(u) \leq I(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow$ u-tól tetsz. irányba perturbálva I csökken

irány: $\mathcal{C}_0 = \{\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, diffható $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}$

$\eta \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow u + \varepsilon\eta \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tetsz

$I(u + \varepsilon\eta) \geq I(u) \quad \forall \varepsilon$-ra

Def: egy valós fv-t

$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta)$

η FIX

$G(0) \leq G(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon$-ra $\Rightarrow G'(0) = 0$

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F\big(x, u(x)+\varepsilon\eta(x), u'(x)+\varepsilon\eta'(x)\big)\,dx$$

levezetés

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \big(F'_u \cdot \eta(x) + F'_{u'}\,\eta'(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}\,\eta'\,dx + \int_{x_0}^{x_1} F'_u\,\eta(x)\,dx =$$

$$= \cancel{F'_{u'}\,\eta\Big|_{x_0}^{x_1}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}F'_{u'}\,\eta\,dx + \int_{x_0}^{x_1} F'_u\,\eta(x)\,dx =$$

[az η-t úgy választottuk, hogy a végpontokba 0 legyen]

$$= \int_{x_0}^{x_1} \Big(F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'}\Big)\,\eta\,dx$$

$\forall \eta \in C_0$-ra

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \Big[F'_u\big(x, u(x), u'(x)\big) - \frac{d}{dx}F'_{u'}(\quad)\Big]\,\eta(x)\,dx$$

Lemma: $\int_a^b f(x)\,\eta(x)\,dx = 0$ $\boxed{\forall\, \eta}$-ra amely végpontokban nulla

$$\Downarrow$$

$$f(x) \equiv 0$$

Tehát:

$$F'_u\big(x, u(x), u'(x)\big) - \frac{d}{dx}F'_{u'}\big(x, u(x), u'(x)\big) = 0$$

másodrendű differenciál egyenlet

(T) ha u optimum, akkor

$$L[u] = F'_u(\,) - \frac{d}{dx}F'_{u'}(\,) = 0$$

Euler egyenlet

elv: „első variáció 0"

Példa:

(x_0, y_0) (x_1, y_1)

$\phi(x)$ őket összekötő görbe

melyiknek a legrövidebb a hossza

Szép példa

Fv graf hossz. $I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+\phi'^2(x)}\, dx$

$$F(x,u,u') = F(u') = \sqrt{1+u'^2}$$

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = -\frac{d}{dx} \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}$$

$F'_u = 0$ opt-ban $L[u] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F'_{\cancel{u}} \equiv c$

$\Downarrow$

$F(u') = \sqrt{1+u'^2}$

$F'_{u'} = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}$

Ebből

$$F'_{u'}(\cancel{x}, u, u') = \frac{u'(x)}{\sqrt{1+(u'(x))^2}} \equiv C$$

$$\Downarrow$$

$$u'(x) = C \Rightarrow u = Cx + D$$

$L[u]=0$ másodrendű D.E.

Spec. esetek:

① $F(x,u,\cancel{u'})$

$F'_u - \emptyset = 0$

$\Downarrow$

$F'_u(x,u(x)) = 0 \longrightarrow$ implicit megoldási fv.

② $F(x,u')$

$+\frac{d}{dx}F'_{u'} = 0$

azaz $F'_{u'}(x,u') = C \in \mathbb{R}$

$u' = \dots$

$\int u' = \int \dots$

$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0 \quad \int dy$

$\int F'_y\,dy - \int \frac{d}{dx}F'_{y'}\,dy = \int dy$

$F - \int \frac{dF'_{y'}}{dx}\, y'\,dx = \cancel{f(x)}\, C$

$F - y'F'_{y'} = C$

$\hookrightarrow$ Csúnya levezetés

③ $F(\cancel{x},u,u') = F(u,u')$

Def az $E(\cancel{u}, u')$ ~ energiajellegű dolog

?saját?

$\left(E(u,u') = F - u'F'_{u'}\right)$

szebb

$E(x) = F(u(x),u'(x)) - u'(x)F'_{u'}(u(x),u'(x))$

$E'(x) = F'_u\cdot u' + \cancel{F'_{u'}u''(x)} - \cancel{u''(x)F'_{u'}} - u'(x)\left(F''_{u'u}u' + F''_{u'u'}u''\right) =$

$= \dots$

$= F'_u\cdot u' - u'\frac{d}{dx}F'_{u'} = u'\left(F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'}\right) = 0$

$\Rightarrow E'(x) = 0$ miatt $E(x)$ konstans

Euler egyenlet helyett:

$$F(u,u') - u'(x^*)\, F'_{u'}(u,u') = c$$

pl legkisebb felszínű forgástest:

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x) \sqrt{1+\phi'^2(x)}\, dx$$

szép példa

$$F(u,u') = u\sqrt{1+u'^2}$$

$$F'_{u'} = \frac{u\, u'}{\sqrt{1+u'^2}}$$

$$u\sqrt{1+u'^2} - u' \frac{u\, u'}{\sqrt{1+u'^2}} = c \quad \Big| \cdot \frac{1}{u}$$

$$\sqrt{1+u'^2} - \frac{(u')^2}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{c}{u} \Big| \sqrt{1+u'^2}$$

$$1+u'^2 - u'^2 = c\,\frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}$$

~~1 = 0 ⟹ hülye vagy, fiam!~~

$$1 = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{u}$$

$$u' = \sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2} \implies u(x) = c \cdot ch\left(\frac{x-b}{c}\right)$$

Anal 3 gyak

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{X} F(x, \phi, \phi')\,dx$$

$$\phi \in \{C^2 ;\ \phi(x_0) = y_1 ;\ \phi(x_1) = y_2\}$$

perturbáció $\eta \in \mathfrak{F} ;\ \phi \in \mathfrak{F}$

$$G(\varepsilon) = I(\phi + \varepsilon\eta)$$

$$G'(0) = 0 \quad \forall \eta$$

$$L(u) = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'}$$

---

pl: $F := (y')^2 - 4y$

$y(x) = ?$ min.

$$\int (y')^2 - 4y\,dx$$

$$L(y) = \underbrace{-4}_{F'_u} - \underbrace{2y''}_{\frac{d}{dx} F'_{u'}} = 0$$

$$y'' = -2$$

$$y' = -2x + c$$

$$y = -\cancel{2}x^2 + cx + d$$

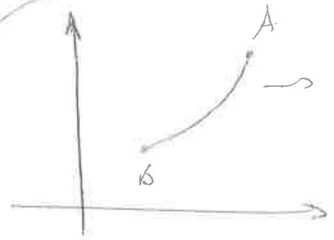
$$F := (y')^2 + 4y^2$$

$$L(y) = -8y - 2y'' = 0$$

$$y = -\frac{1}{4} y'' \implies y = A\cos 2x + B\sin 2x$$

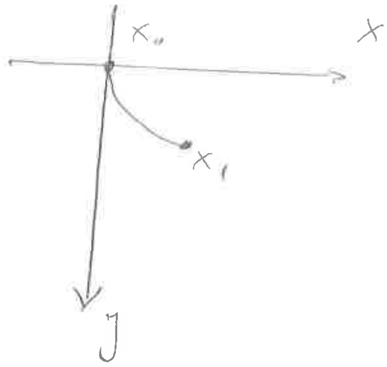
$$\cancel{y = \frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\cancel{4\,dx^2 =}$$



→ leggyorsabban jut el A-ból B-be

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}}\,dx$$



↓ egyszerűsítjük:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx$$

Step példa

$$\boxed{\begin{array}{l} F(y,y') \\ \quad \hookrightarrow F = C + y'\cdot F'_{y'} \end{array}}$$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = C + y'\cdot\frac{y'}{y\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} = C + \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\cancel{(y')^2} = C\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2} + \cancel{(y')^2} \quad \Big|^2$$

$$\Rightarrow 1 = yc^2(1+(y')^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{c^2y}-1} = y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-yc^2}{y}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \int dx = \int\sqrt{\frac{y}{1-c^2y}}\,dy$$

legyen $x = \sqrt{\dfrac{y}{1-c^2y}}$

$$x^2 = \frac{y}{1-c^2y}$$

$$x^2 - c^2x^2y = y$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{c^2x^2+1-1}{1+c^2x^2} = y$$

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{1+c^2x^2} = y \quad \Big|\, d$$

$$+\frac{1}{c^2}\,\frac{2xc^2}{(1+c^2x^2)^2}\,dx = dy$$

helyettesítés

Szép példa

$$\int x\,\frac{1}{c^2}\,\frac{2xc^2}{(1+c^2x^2)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\int x\,\frac{-2xc^2}{(1+c^2x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{c^2}\int x\left(\frac{1}{1+c^2x^2}\right)'dx =$$

próba:

$$\left(\frac{1}{1+c^2x^2}\right)' = -\frac{2c^2x}{(1+c^2x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{c^2}\left[\frac{x}{1+c^2x^2} - \int\frac{1}{1+c^2x^2}\,dx\right] =$$

nincs / ide még kell helyettesítés

$$= -\frac{1}{c^2}\,\frac{x}{1+c^2x^2} + \frac{1}{c^4}\int\frac{1}{\frac{1}{c^2}+x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{c^4}\,\frac{x}{\frac{1}{c^2}+x^2} + \frac{1}{c^4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{c}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\frac{1}{c}} = -\frac{1}{c^4}\,\frac{x}{\frac{1}{c^2}+x^2} + \frac{1}{c^3}\,\mathrm{arctg}(cx)$$

No figyelj:

$$\int \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}}\,dt = \int \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \sin 2u \, du =$$

$t := \sin^2 u$

$dt = 2\sin u \cos u \, du$

$dt = \sin 2u \, du$

$$= \int \frac{\sin u}{\cancel{\cos u}} 2\sin u \cancel{\cos u} \, du =$$

$$= 2\int \sin^2 u \, du =$$

$$= \frac{2}{c^2} \int \frac{1-\cos 2u}{2} \, du =$$

$$= \frac{2}{c^2} \left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} \right)$$

és valahogy kijön a ciklois

$K = \frac{1}{c^2}$

$x = \frac{K}{2}(\varphi - \sin\varphi) \longrightarrow$ Bernoulli problema

$y = \frac{K}{2}(1 - \sin\varphi)$

Anal 3

Variációszámítás

Courant John II / 2 7. fejezet

Alapfeladat: $\mathcal{C} = \{ \phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ diff, $\phi(x_0)$, $\phi(x_1)$ adott $\}$

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')\, dx$$

szükséges felt:
u ban min.

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$$

Általánosítások:

(1) több függvényt keresünk egyszerre
Pl térben két pontot összekötő görbék közül a legrövidebb

$\cdot\ (x_1, y_1, z_1)$

(x_0, y_0, z_0)

$(x, y(x), z(x))$; $y(x_0) = y_0$
$z(x_0) = z_0$

min: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [y'(x)]^2 + [z'(x)]^2}\, dx$

ált: n db függvényt keresünk

$\mathcal{C} = \{ (\phi_1, \dots, \phi_n) : \phi_j\ [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ diffható, rögzítettek a végpontok [külön-külön] $\}$

$$I(\phi_1, \dots, \phi_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1, \dots, \phi_1', \dots)\,dx$$

mellékfeltétel

Tfh. van egy $(u_1, \dots, u_n)$ optimum

$\phi_j = u_j + \varepsilon \eta_j$; ~~$\eta_j \in C$ megengedett~~

η_j végpontokban 0, ha eredeti fixálva

$$I(\phi_1, \dots, \phi_n) \geq I(u_1, \dots, u_n)$$

$G(\varepsilon) = I(\vec{\phi})$ inkább: $G(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$

$G'(0) = 0$ Jelölés: $\delta I(0) = 0$

első variáció

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(T) Szükséges felt.} \\ n \text{ db Euler egyenletet fogunk kapni} \\ \text{Jelölés: } F(x, \vec{u}, \vec{u}') \\ F'_{u_j} - \dfrac{d}{dx} F'_{u_j'} = 0 \end{array}}$$

DER

Példa folyt.

$$I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx \longrightarrow \min$$

$$F(x, y, z, y', z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \\ \dfrac{d}{dx} F'_{z'} = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} F'_{y'} = C_1 = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \\ F'_{z'} = C_2 = \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \end{array}\right.$$

I ha van egy $\int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot x, \dot y)\, dt$

legyen $G(\varepsilon, \delta) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x+\varepsilon\eta, y+\delta\mu, \dot x+\varepsilon\dot\eta, \dot y+\delta\dot\mu)\, dt$

$$G'_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} (F'_x \eta + F'_{\dot x} \dot\eta)\, dt \Longrightarrow F'_x - \frac{d}{dt} F'_{\dot x} = 0$$

$$G'_\delta = \int_{t_1}^{t_2} \dots\, dt \Longrightarrow F'_y - \frac{d}{dt} F'_{\dot y} = 0$$

szükséges: $DG = \underline{0} \Longrightarrow \begin{cases} F'_x - \frac{d}{dt} F'_{\dot x} = 0 \\ F'_y - \frac{d}{dt} F'_{\dot y} = 0 \end{cases}$

II legyen $G(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x+\varepsilon\eta, y+\varepsilon\mu, \dot x+\varepsilon\dot\eta, \dot y+\varepsilon\dot\mu)\, dt$

$$G'_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} (F'_x \eta + F'_y \mu + F'_{\dot x} \dot\eta + F'_{\dot y} \dot\mu)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(F'_x - \frac{d}{dx} F'_{\dot x}\right)\eta + \left(F'_y - \frac{d}{dx} F'_{\dot y}\right)\mu \right] dt = 0$$

próba :

$$E = F(x,\dot{x},y,\dot{y}) - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}}$$

$$\dot{E} = F'_x\dot{x} + \cancel{F'_{\dot{x}}\ddot{x}} + F'_y\dot{y} + \cancel{F'_{\dot{y}}\ddot{y}} - \cancel{\ddot{x}F'_{\dot{x}}} - \dot{x}\frac{d}{dt}F'_{\dot{x}} - \cancel{\ddot{y}F'_{\dot{y}}} - \dot{y}\frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} =$$

$$= F'_x\dot{x} + F'_y\dot{y} - \dot{x}\frac{d}{dt}F'_{\dot{x}} - \dot{y}\frac{d}{dt}F'_{\dot{y}} =$$

$$= \dot{x}\Big(\underbrace{F'_x - \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}}}_{=0}\Big) + \dot{y}\Big(\underbrace{F'_y - \frac{d}{dt}F'_{\dot{y}}}_{=0}\Big) = 0 \Longrightarrow$$

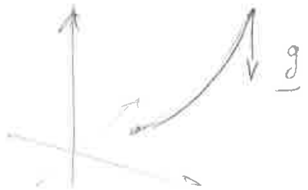
$$\Longrightarrow \dot{E}(t) = 0 \Longrightarrow E(t) = C$$

$$F(x,\dot{x},y,\dot{y}) - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = 0$$

$$\begin{cases} y'(x) = C \\ z'(x) = D \end{cases}$$ → mert c_1, c_2 nem függ x-től

$$y(x) = Cx + C_1$$
$$z(x) = Dx + D_1$$
→ négy ismeretlen, négy feltétel

nehezebb példa:



vagy lehet úgy is, hogy

g az y irányába

$$I(y,z) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{y}}\, dx$$

$\boxed{\text{gyakorlaton}}$!

Spec eset:

$F(\cancel{x}, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')$

Energia konstans

(T) Ekkor az optimumban

$$F - \sum_{i=1}^{n} u_i' F_{u_i'} = \text{constans}$$

~~...~~ meg így

Hamiltonrendszerek

Mechanikai rendszer: n db jellemzője

$q_1, \ldots, q_n$

pl 1 pont mozog → 3 koordináta

pl: 2 pont egyenes tov → $n = 5$

dinamikus rendszer legyen, $q_j = q_j(t)$

sebességek: $\dot{q}_j(t)$

Hamilton elv

Helyzeti energia: $U(q_1, \dots, q_n)$ $\quad \dot q_j$-től nem függ

Mozgási energia: $T(\dot q_1, \dots, \dot q_n)$ $\quad$ feltesszük, hogy q_j-től nem, és, hogy egy kvadratikus alak

$$T(\dot{\bar q}) = \langle \dot q, A \dot q \rangle$$

Adott a kezdő és végpont

Mozgás = ?

Hamilton elv

minimalizálója

$$\boxed{\min: \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt,}$$

ha szabadon mozognak erre fognak haladni

Euler egyenletek

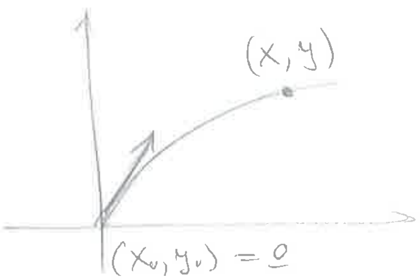
$$F(t, q, \dot q) = T(\dot q) - U(q)$$

$$F'_{q_j} - \frac{d}{dt} F'_{\dot q_j} = 0$$

$$(T - U)'_{q_j} = \frac{d}{dt} (T - \cancel{U})'_{\dot q_j}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} T'_{\dot q_j} - T'_{q_j} = -U'_{q_j}}$$ Lagrange egyenletek

Hamilton elve konkrét példa :



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = ?$$

$$T(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = T(1, \dot{y}(t)) = T(\dot{y})$$

$$\mathcal{U}(x, y) = \mathcal{U}(\cancel{x}, y) = \mathcal{U}(y)$$

$$I(y) = \int_{t_0}^{t_1} (T - \mathcal{U})\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(T(\dot{y}) - \mathcal{U}(y)\right) dt$$

Hamilton elve egyszerű használata

$$\begin{cases} T(\dot{y}) = \dfrac{m\dot{y}^2}{2} \\ \mathcal{U}(y) = mgy \end{cases}$$

$$I(y) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy\right) dt$$

Euler : $\quad F'_y - \dfrac{d}{dt} F'_{\dot{y}} = 0$

de t nincs :

$$F - \dot{y} F'_{\dot{y}} = -C \implies$$

$$\implies \left(\frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy\right) - \dot{y}(m\dot{y}) = -C \implies \dot{y} = \sqrt{\left(\frac{C}{gm} - y\right) 2g} \quad ; \; c := \frac{C}{gm}$$

$$\implies \int_0^t \frac{dy}{\sqrt{c - y}} = \int_0^t \sqrt{2g}\, dt \implies \sqrt{c - y} = \sqrt{c} - t\sqrt{\frac{g}{2}} \quad \Big|^2 \implies$$

$$\implies y = -\frac{g}{2} t^2 + t\sqrt{gc}\,\Big|_{c = \frac{C}{gm}} = -\frac{g}{2} t^2 + t\sqrt{\frac{C}{m}}$$

[valóban egy parabolát kaptunk]

$\boxed{\text{Hami. el}}$

$$\begin{cases} E = F - \sum \dot{q}_i F_{\dot{q}_i} = C \\ F = T - U \end{cases} \implies$$

$$\implies E = T - U - \sum \dot{q}_i \frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_i} =$$

$$= T - U - \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = C$$

$T = \underline{\dot{q}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\dot{q}}$ = homogén kvadratikus alak $\implies$

$$\implies \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

tehát $T - U - 2T = C \implies$

$\implies T + U = -C$ [azaz konstans]

Energia megmaradás elvi törvénye

Most : spec. eset

$$F - \sum_{j=1}^{n} u_j' F_{y_j'}' = C$$

$$\Longrightarrow \quad T - U - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \cdot \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

T : kvadratikus alak

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T$$

$$T - U - 2T = C$$

$$-(U + T) = C \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ helyzeti + mozgási = konstans

2. Alt

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi', \phi'')\, dx$$

Módszer : u optimum $\Rightarrow$

$$I(u + \varepsilon\eta) \geq J(u)$$

T Szükséges

$$L[u] = F_u' - \frac{d}{dx} F_{\dot{u}}' + \frac{d^2}{dx^2} F_{\ddot{u}}'$$

$\rightarrow$ negyedrendű ODE

Hosszú Ákos ...

3. alt : Több dimenzióban

$D \subset R^2$

$\Gamma = \partial D$

Adott $u(x,y) : (x,y) \in \partial D$

megengedett függvények halmaza

$$I(\phi) = \iint_D F(x,y,\phi,\phi'_x,\phi'_y)\, d(x,y) \longrightarrow \min$$

Stacionaritás

$$I(u + \varepsilon\eta) = G(\varepsilon)$$

T u stac...

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y}$$

jelölés: $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$

pl: $\iint_D (u'^2_x + u'^2_y)\, d(x,y)$

Euler egyenlet:

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = u_x^2 + u_y^2$$

$$L[u] = \frac{\partial}{\partial x}(2u'_x) + \frac{\partial}{\partial y} 2u'_y =$$

$$= 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta u = 0$$

Pl: $u(x,y)$ fv. felszíne minimuma.

$$\iint_D \sqrt{1+(u'_x)^2+(u'_y)^2}\, d(x,y)$$

ha u konstans $\Rightarrow \begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases}$

de esetleg nem megengedhető

PLATEAU probléma

∂D-n $u(x,y)$ adott

Euler egyenlet:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u'_x}{\sqrt{1+u'^2_x+u'^2_y}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u'_y}{\sqrt{1+u'^2_x+u'^2_y}} = 0$$

PDE: $\rightarrow$ nehéz! nem megoldható

---

4. feltételes feladat:

Tipikus feladat:

görbét keresünk

$(x(t), y(t), z(t)) \in S$

$\forall t$-re $G(x,y,z)=0$

keressük a minimumát

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\, dt \rightsquigarrow \text{legyen } z = g(x,y)$$

1. lehetőség: visszavezetjük a 3-asra

$\dot{z} = g'_x \cdot \dot{x} + g'_y \cdot \dot{y}$

$I(x,y,z) = I_0(x,y) =$

2 lehetőség:

Lagrange multiplikátor

(T) Ha $(x(t), y(t), z(t))$ optimum akkor $\exists\, \lambda(t)$

$$\frac{d}{dt} F'_{\dot x} - F'_x = \lambda G'_x$$

$$\frac{d}{dt} F'_{\dot y} \dots = \lambda G'_y$$

$$\frac{d}{dt} F'_{\dot z} - F'_z = \lambda G'_z$$

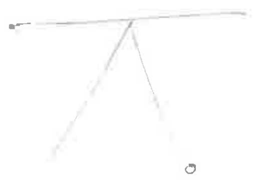
$$G(\;) = 0$$

$$I(x,y,z,\lambda) = \int_{t_0}^{t_1} \left(F(\;) - \lambda G(\;)\right) dt$$ $\to$ ezt kell megoldani

Pl: felületek közti távolság $\to$ 2 feltétel van

meg

STABILITÁS ELMÉLET



$$\dot x(t) = f(x(t))$$

$$x(0) = \bar x$$

Mo: $x(t, \bar x)$

Spec eset: $x(t, \bar x) = \bar x$

Egyensúlyi helyzet: $\dot x = f(x)$

ha $f(0) = 0$ $\to$ stabil / instabil

$\bar x = 0$ egyensúlyi

Anal 3 gyak
szünet után
2

① : $I(\phi_1, \dots, \phi_n) = \int_{x_1}^{x_n} F(x, \phi_1, \dots, \phi_n, \phi_1', \dots, \phi_n')\, dx$

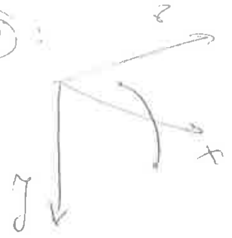
$\phi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$F'_{\phi_j} - \frac{d}{dx} F'_{\phi_j'} = 0 \quad , j = \overline{1,n}$

② : $I(\phi) = \int \dots \int_{(D)} F(x_1, \dots, x_n, \phi, \phi'_{x_1}, \dots, \phi'_{x_n})\, dx_1 \dots dx_n$

$F'_\phi - \sum \frac{d}{dx_i} F'_{x_i} = 0$

Példa :



$\longrightarrow \quad T \stackrel{?}{=} \int \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{y}\, dx =$

$\cancel{= \int \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{y}}\, dx}$

$\Downarrow$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{z'^2}{\sqrt{\ }\sqrt{\ }}}_{= 1} = C \sqrt{\ } \ \sqrt{\ } \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 1 + y'^2 + z'^2 = \frac{1}{c^2 y}$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{c^2 y} - 1 - z'^2} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{c^2 y} \underbrace{-1-k^2}_{=: C}}$

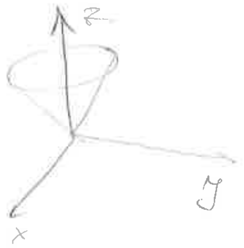
$z := kx + b$

$z' = k$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1}{c^2 y} - C}$

$\cancel{y = \int \sqrt{\frac{1}{c^2 y} - C}\, dx} \Rightarrow \quad \int dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2 y} - C}}\, dy$

Příklad 2



$\longrightarrow$ $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = r$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt = \int\sqrt{(\dot r\cos\theta - r\cdot\dot\theta\sin\theta)^2 + \dots}\;dt =$$

$$= \int\sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \dot z^2}\,dt \underset{t=r}{=} \int\sqrt{2+r^2\dot\theta^2}\,dr$$

$\downarrow$

málo času

$$F'_\theta - \frac{d}{dr}F'_{\dot\theta} = 0$$

$$F'_{\dot\theta} = C \Rightarrow \frac{r^2\dot\theta}{\sqrt{2+r^2\dot\theta^2}} = C \Longrightarrow \dot\theta = \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{r^4 - Cr^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{2C}}{r\sqrt{r^2 - C}}\,dr$$

Vyřešení integrál

$ch^2x - sh^2x = 1$

$ch^2x - 1 = sh^2x$

$z := ch^2 x$

$$\int \frac{\sqrt{2C}}{ch^2 t}\,ch\,t\,dt = \int\frac{\sqrt{2C}}{1+sh^2 t}\,ch\,t\,dt = \sqrt{2C}\,\mathrm{arctg}(sh\,t)\Big|_{\text{hatn}}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}(sh\,t)\sqrt{2C}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int x^3 e^{\ln x}\,dx = \int \left(\frac{x^4}{4}\right)' e^{\ln x}\,dx = \\
&= \frac{x^4}{4} e^{\ln x} - \frac{1}{4}\int x^3 e^{\ln x}\,dx \Rightarrow \\
&\frac{5}{4}\int x^3 e^{\ln x}\,dx = \frac{x^4}{4} e^{\ln x} \\
&\int x^3 e^{\ln x}\,dx = \frac{x^4}{5} e^{\ln x}
\end{aligned}}$$

Szép integrál!

$$\left[\frac{x^4}{5} e^{\ln x}\right]' = \frac{4x^3}{5} e^{\ln x} + \frac{x^4}{5x} e^{\ln x} = x^3 e^{\ln x} \checkmark$$

(1) $y' = \frac{2}{x} y + 2x^3$

$$\cancel{y = c e^{2\ln x} + 2\frac{x}{5} e^{4\ln x} e^{2\ln x}}$$

1. $y' = \frac{2}{x} y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}\,dx \Rightarrow y = Ce^{2\ln x}$ dx

2. $c' e^{2\ln x} = 2x^3$

$c' = 2x^3 e^{-2\ln x}$

$$2\int x^3 e^{-2\ln x}\,dx = \frac{x^4}{4} e^{-2\ln x} + \frac{2}{4}\int \frac{x^4}{x} e^{-2\ln x}\,dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} e^{-2\ln x} + \frac{1}{2}\int x^3 e^{-2\ln x}\,dx$$

$$\int x^3 e^{-2\ln x}\,dx = \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} e^{-2\ln x} = \frac{1}{6} x^4 e^{-2\ln x}$$

$c = \frac{1}{3} x^4 e^{-2\ln x}$

$y_p = \frac{1}{3} x^4 \cancel{e^{-2\ln x}}\, \cancel{e^{+2\ln x}} = \frac{x^4}{3}$

konstans hiba

próba: $\frac{4}{3} x^3 = \frac{2}{3} x^3 + 2x^3$

$y = y_h + y$

① $y' = \frac{2}{x} y + 2x^3$

1. $y' = \frac{2}{x} y$

$y_h = c\, e^{+2\ln x}$

$c' e^{+2\ln x}$

$y' = a(x) y + b(x)$

$y_h = c e^{\int a(x)\, dx}$

$c' e^{\int a(x)\, dx} = b x$

$c = \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx$

$y = \left[C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx} dx \right] e^{\int a(x)\, dx}$

ell: $y' = b(x) \cancel{e^{-\int a(x) dx}} \cancel{e^{\int a(x)\, dx}} + a(x)\left(C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx} dx \right) e^{\int a(x)\, dx}$

$a(x) y + b(x) = b(x) + a(x)\left(C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx} \right) e^{\int a(x)\, dx}$

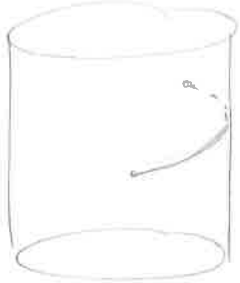
Tehát:

$$\boxed{\begin{gathered} y' = a(x) y + b(x) \\ \Downarrow \\ y = \left[C + \int b(x) \left(e^{-\int a(x)\, dx} \right) dx \right] e^{\int a(x)\, dx} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} y_h' = a(x) y_h \\ y_p' = a(x) y_p + b(x) \\ \hline (y_h + y_p)' = a(x)(y_h + y_p) + b(x) \end{gathered}}$$

3 pl

$\theta = \varphi$



$$\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\, dt = \int \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}\, dt \Big|_{z:=t} =$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot\cos\varphi \\ 1\cdot\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$= \int \sqrt{\dot{\theta}^2+1}\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2+1}} = c$$

$$\dot{\theta}^2 = c^2\dot{\theta}^2 + c^2$$

$$\dot{\theta}^2 = +\frac{c^2}{1-c^2}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$$

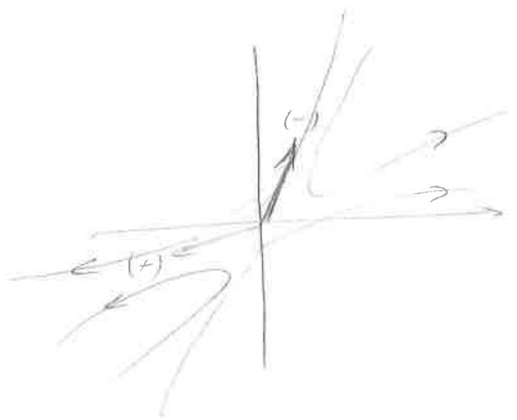
$$\underline{\theta = t\cdot C + \beta}$$

4) pl

$$\dot{x} = -4y$$
$$\dot{y} = -4x - 3y \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\cancel{\lambda^2 + 3\lambda}$

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow < 0 \\ \searrow > 0 \end{matrix}$$



$$V = x^2 + xy + \frac{5}{2} y^2$$

$$\dot{V} = -2xy - 4y^2 - 4x^2 - 3xy = \cancel{-4x^2 - 4y^2 - 5xy}$$

$-15y^2$

$$\dot{W} = -x^2 - y^2$$

$W = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 \Rightarrow \dot{W} =$ csúnya lin.$(\alpha, \beta, \gamma) = -x^2 - y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha, \beta, \gamma = \ldots$

$W = -\frac{3}{32} x^2 + y^2 \longrightarrow$ látható, hogy x irányába elmegy a parabola.

Anal III
13 gyak.

$$\begin{pmatrix} -3 & a+1 \\ a & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{milyen lesz}$$

- stabil
- instabil
- nyereg
- csomó stb...

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

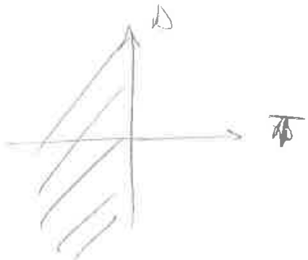
$\left.\begin{matrix} T < 0 \\ D > 0 \end{matrix}\right\}$ → stabilitás feltétele, hogy a sajátértékek < 0

$D = \frac{T^2}{4}$

$T^2 - 4D < 0$

$\frac{T^2}{4} < D$

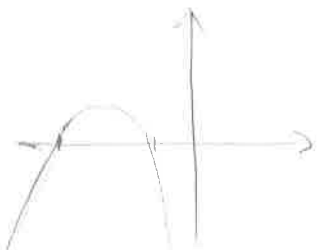
$= -7 = T < 0$ —



Det: $12 - a - a^2 = 0$

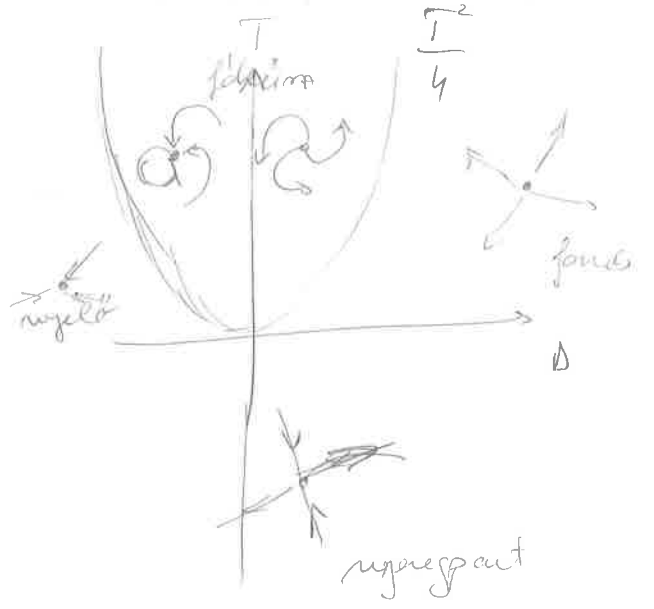
$\downarrow \quad \downarrow$

$-4 \quad 3$



akkor lesz ez a stabil, ha $a \in (-4, 3)$

milyen fog ez csavarni?

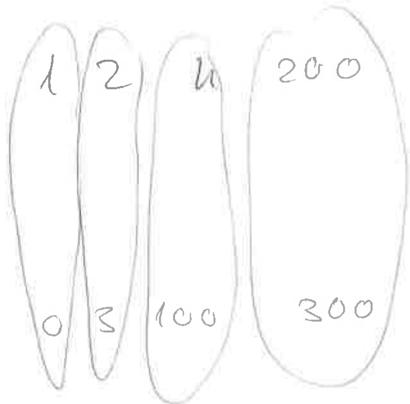


1 100 200 300

1 2 3 4

1 200
2 4

0 3



Def:
egy fel. korrekt kitűzésű: ha
(1) $\longrightarrow$ létezik megoldás
(2) $\longrightarrow$ egyetlen megoldás
(3) $\longrightarrow$ és a megoldás folytonosan függ az emes pa... -itől

pl: 1) $A \underline{x} = \underline{b}$, $\det A \neq 0$

2) $\left.\begin{array}{l} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$ korrekt. kit. fel, ha $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ folyt és x-ben Lipschitzes

a kiindulási hibák a megoldás numerikus meghatározásánál ne növekedjenek korlátlanul

azaz ha a kezdeti hibák $\longrightarrow 0$-hoz $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ az végeredmény hibája $\longrightarrow 0$ lesz ③

pl: ①* $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad \|A - \tilde{A}\| \leq \delta_1$

$\tilde{\underline{A}}\,\tilde{\underline{x}} = \tilde{\underline{b}}$ $\qquad \|b - \tilde{b}\| \leq \delta_2$

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \text{formula}(\delta_1, \delta_2, A)$$

② $\dot{x} = f(t,x)$ $\quad x(0) = x_0$

$\dot{y} = g(t,y)$ $\quad y(0) = \tilde{y}_0$

$t \in [0,T]$

$|x_0 - y_0| \leq \Delta$

$\max \|f - g\| \leq \varepsilon$

$\|x(t) - y(t)\| \leq ?$

GRONWALL - egyenlőtlenség

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\,ds$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g(s, y(s))\,ds$$

Lipschitz konstansa L

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_0^t \left[f(s,x) - f(s, y(s)) + f(s, y(s)) - g(s, y(s)) \right] ds$$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq |x_0 - y_0| + \int_0^t \left[L|x(s) - y(s)| + \varepsilon \right] ds \leq \Delta + L \int_0^t (x(s) - y(s))\,ds + \varepsilon T$$

Kapjuk: $\phi(t) = |x(t) - y(t)|$

$$\phi(t) \leq \Delta + \varepsilon T + L \int_0^t \phi(s)\,ds \quad \Big|_{t=T} \quad ①$$

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{L \cdot \phi(t)}{\Delta + \varepsilon T + L \int_0^t \phi(s)\,ds} \leq 1 \quad \Big/ \int_0^T dt$$

$$\left[\frac{1}{L} \ln \left(\Delta + \varepsilon T + L \int_0^t \phi(s)\,ds \right) \right]_0^T \leq T$$

$$\frac{1}{L} \ln \left(\Delta + \varepsilon T + L \int_0^T \phi(s)\,ds \right) / (\Delta + \varepsilon T) \leq T$$

$$\Delta + \varepsilon T + L \int_0^T \phi(s)\,ds = (\Delta + \varepsilon T)\, e^{TL} \quad ②$$

$$\longrightarrow \phi(t) \leq (\Delta + \varepsilon T) e^{Lt}$$

$$\|x(t) - y(t)\| \leq (\Delta + \varepsilon T) e^{Lt} \quad \forall t \in [0, T]$$

megj.: sokféle stabilitás van

közös gyökerük

kicsi hibákra, zavarásokra mértékletesen teljesen

reagál, nem borul(?) ... fel

kicsi változásokhoz reagál

mérsékelten reagál

Def.: egyensúlyi helyzet stabilitása

$\vec{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

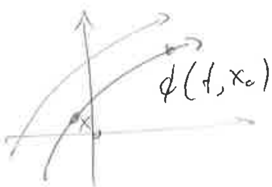
$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

adott: $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ autonóm de. f.h.

$\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ megoldásoperátor értelmes

$\phi(t, x_0) = x(t)\big|_{x(0) = x_0}$



$\exists$ megoldás

ϕ folytonos és $t \in \mathbb{R}$-re értelmes

legyen $\bar{x}$ egyensúlyi helyzet $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = 0 \iff \phi(t, \bar{x}) = \bar{x} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ nem mozdul el

stabilitás, aszimptotikus stabilitás

def: $\bar{x}$ stabil, ha $\forall \varepsilon \; \exists \delta$, hogy $|x - \bar{x}| < \delta$ esetén az teljes, hogy $|\phi(t, x) - \bar{x}| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

egyenletesen a $t \in [0, \infty)$ intervallumban $[0, T]$-re automatikusan [illegible] volna

def: $\bar{x}$ vonzó, ha $\exists \, \eta_0 > 0$ hogy $|x - \bar{x}| < \eta_0$ esetén a $\phi(t, x) \to \bar{x}$, ha $t \to \infty$

def: $\bar{x}$ aszimptotikusan stabil, ha stabil és vonzó

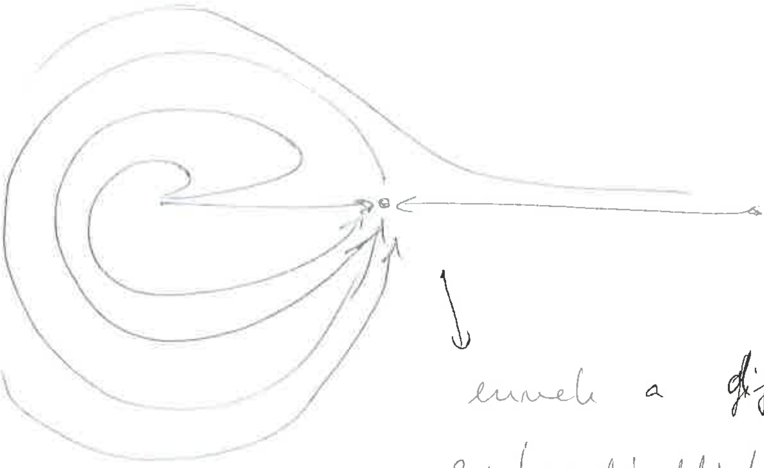
pl.: stabil de nem vonzó

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\quad \ddot{x} + x = 0$ rugó $\quad \frac{y(t)^2}{2} + \frac{x^2(t)}{2} =$ áll. megm.

$\Downarrow \begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$

$$\frac{2\cdot\dot x\cdot\ddot x}{2} + \frac{2x\dot x}{2} = \dot E(t) \Longleftarrow \dot x(\ddot x + x) = \dot E(t)$$

pl vonzó de nem stabil



ennek a diff. egyenlete polárkoordinátákban meg lehet adni

Példák:

$\dot x = A x$

tfh. $\underline{A}$-nak $\exists\ \underline{s}_1,\dots,\underline{s}_n$ lin. füg. sajátvektora

$\downarrow$

mindig így van, ha $\lambda_i \neq \lambda_j$ $i \neq j$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{s}_n$ ált. megold.,

$c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$

$\downarrow$

általában $\underline{s}_k \in \mathbb{C}^n$

valós változat: $e^{\lambda t}\underline{s} = e^{(\alpha+i\beta)t}\underline{s}$

$e^{\bar\lambda t}\bar{\underline{s}} = e^{(\alpha-i\beta)t}\bar{\underline{s}}$

$\Downarrow$

lin. független

A legyen valós mátrix

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} Re\left(e^{\lambda t}\underline{s}\right) \\ Im\left(e^{\lambda t}\underline{s}\right) \end{array}\right\}$ valós alapmegoldások a többszörös sajátértékek bonyolultabb vizsgálathoz vezetnek (többszörös sajátf.ent.)

$e^{\lambda t} \rightsquigarrow t e^{\lambda t}$

megj.: a stabilitás szempontjából az $e^{\lambda t}$, $t \geq 0$ viselkedése számít

$$|e^{\lambda t}| = |e^{(\alpha + i\beta)t}| = e^{\alpha t} |\cos\beta t + i \sin\beta t| = e^{\alpha t} \xrightarrow[t \to \infty]{\alpha < 0} 0$$

<u>Tétel</u>:

1. $\dot{x} = Ax$

$\bar{x} = \underline{0}$ egyensúlyi helyzet ~~…~~ bikusan $\overset{\text{asz.}}{\text{stabil}}$

ha $\forall i$ $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$

sőt ez esetben

$|x(t)| \leq |\text{konst}\, x(0)\, e^{-\omega t}|$

$\max \operatorname{Re}(\lambda_i) < -\omega < 0$

2. ha $\exists$ λ^* melyre $\operatorname{Re}(\lambda_{i^*}) > 0 \Longrightarrow$ instabilitás van sőt $\exists$ ∞-hez tartó megoldás

3. ha $\max \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ további vizsgálat kell

csak az $e^{\lambda t}$ vizsgálata kell

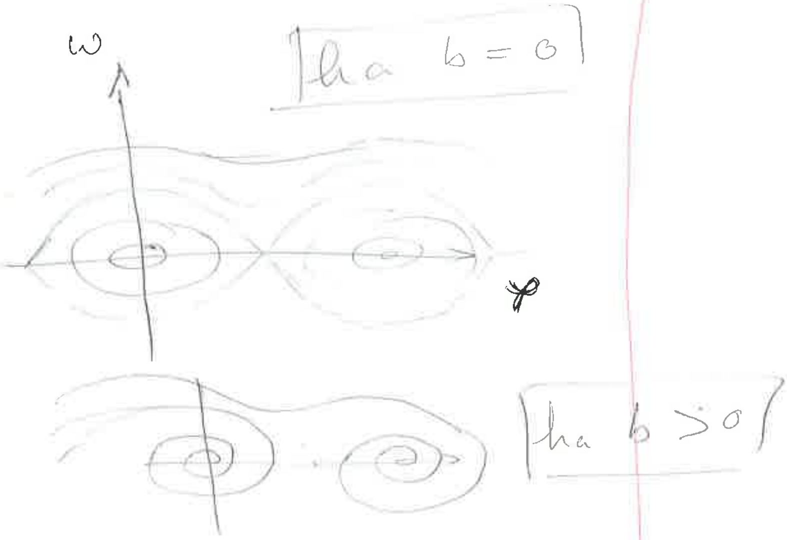
Rugó:

$m\ddot{x} = F$

$F = -kx - b\dot{x}$

rugóerő   csillapítás
súrlódás
$\sim v$-vel

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$



Rezgőkör:

$b \rightsquigarrow R$

$m \rightsquigarrow L$

$k \rightsquigarrow \frac{1}{C}$

spec. típ. $m = 1, k = 1$

$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$

$x(t) = e^{\lambda t}$ — próbafv.

$\lambda^2 + b\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4}}{2}$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -by - x \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi \\ y &= \dot{x} = \dot{\varphi} = \omega \end{aligned}}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & +1 \\ -1 & -b-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda b + 1 = 0$

$b \geq 0$ esetek:

$b = 0$ $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$0 < b < 2$ $x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t$ → lágy lecsengés

$b = 2$ $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

$b > 2$ $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ → hamiság lecsengés

$\uparrow$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

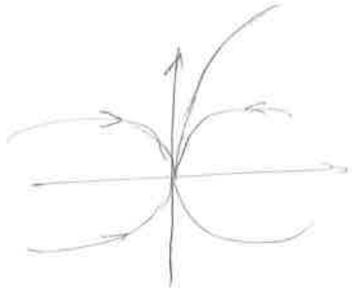
Anal III
gyak
12

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad \Big| \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot x} = \underline{A}\,\underline{x} \longrightarrow c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{v}_2$$

s.e: $-2 \pm i$

$$\underset{\text{nyoma}}{\lambda^2 - T\lambda} + \underset{\text{det-a}}{D} = 0$$



ezeket még lerajzolhatod

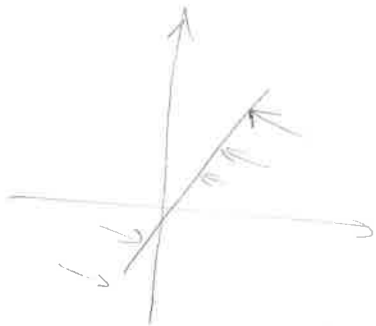
$$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} \longrightarrow \text{s.e:}$$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ - re is

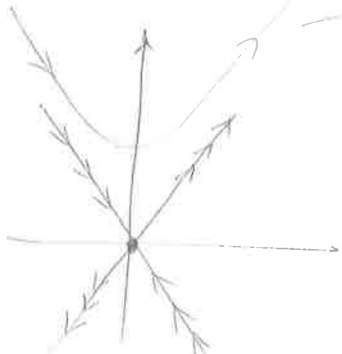
$e^{\lambda}\cos \quad e^{\lambda}\sin$

$2, -3$

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$



hiperbola



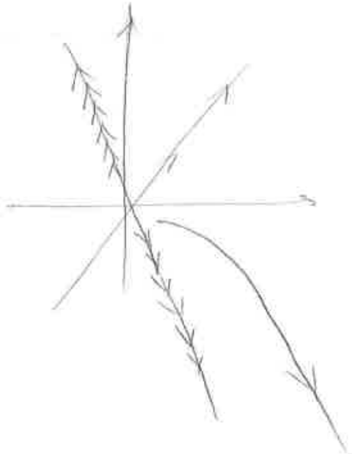
pl egy „nyereg jellegű" lejtő:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

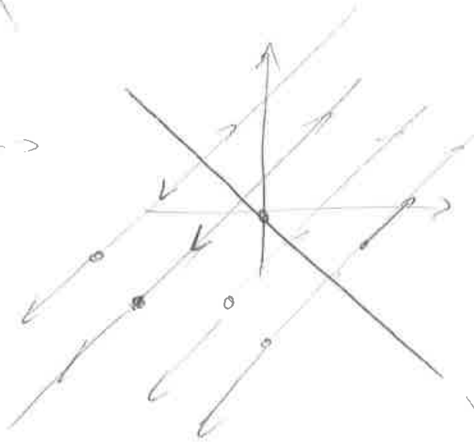
$$\begin{pmatrix}6 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix}7 & 2\\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}\end{matrix} \longrightarrow \text{minden hely } +$$

⇓

minden helyi taszítani fog



$$\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -6 & 7\end{pmatrix} \longrightarrow \overset{1}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} \Longrightarrow$$

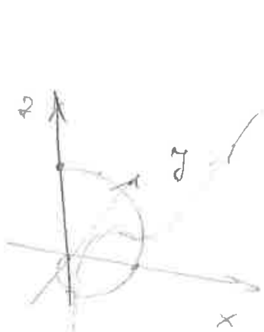


$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad Spa = \begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$-\lambda^3 + \text{Trace}\cdot\lambda^2 - Spa\cdot\lambda + \Delta = 0$$

$3 \qquad -2 \pm i$

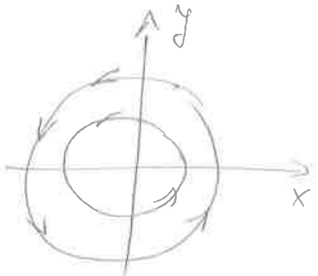
$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$



ha az (x z) síkban van akkor
nem megy el a jenőbe

$\dot{r} = 0$

$\dot{\varphi} = r+1$



$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 2\cos t & (1) \\ \dot{y} = -x - 2y - 2\sin t & (2) \end{cases}$$

Hf. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

→ megoldjuk a homogént ebből majd megoldjuk valahogy az inhomogént

$x = A\cos t + B\sin t$

$\dot{x} = -A\sin t + B\cos t$ (3)

csod lujon: $y \overset{(1+3)}{=} \dots$

$\dot{y} = \dots \quad (2) \Rightarrow \dots$

→ stabilitás definícióját tagadjátok

$\ddot{x} = -b\dot{x} - x$

$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$

$[\, L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \,]$

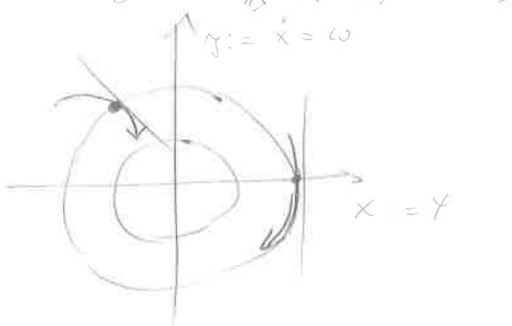
$E = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} \Big|_{m=1, k=1}$ $\boxed{ea. \ 12}$

$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$

$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + x \cdot \dot{x} = -b\dot{x}^2 - \cancel{x \cdot \dot{x}} + x \cdot \dot{x} \Rightarrow$

$\dot{E} = -b\dot{x}^2$

$b = 1$



$E(t) = \frac{1}{2}(\dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2}x^2(t)$

mozgási — rugóban tárolt

$\dot{E}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{2}2\dot{x}x = \dot{x}(-b\dot{x}) = -b(\dot{x})^2 = -(\dot{x})^2 \le 0$

megoldás görbe mentén

csökken az energia

köv: $E(t) \to 0$, $t \to \infty$, $\delta > 0$

$\dot{E}(t) = 0 \iff E(t) \equiv E(0)$

példa: legyen $V(x, \dot{x}) = \alpha x^2 + \beta x y + \gamma y^2$

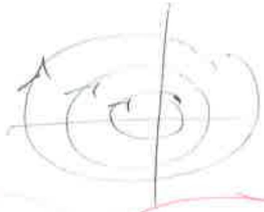
Az energia feltételekben feltételeik a mozgás.

A mozgás az energia szintvonalakon valósul meg

vizsgálom az $\ddot{x} + x = 0$ egyenletet

$\dot{x} = y$

$\dot{y} + x = 0$ $\to$ $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$



$\ddot{x} + x = 0$

$\dot{x} = y$

$\dot{y} = -x$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}}$$

$\to$ energia megmaradás következménye

Tétel $H(x,y) = \text{const}$

Biz: $\frac{d}{dt} H(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\frac{\partial H}{\partial y} - 2y\frac{\partial H}{\partial x} = 2xy - 2yx = 0$

$$H(x,y) = E(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Hamilton fv.

$H(x(t), y(t)) = \text{const}$

$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Lyapunov :

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\dot{y} = g(y)$

y^* stabil, $\quad g(y^*) = 0$

$\forall$ $\exists$ koordináta transzform : $x = y - y^*$

$\dot{x} = g(x + y^*) = f(x)$

$f(0) = 0$

Biz :

$\dot{y} = g(y) \Rightarrow (x + y^*)' = g(x + y^*) =: f(x)$

$\dot{x} = f(x)$

$g(y^*) = f(0) = 0$

így mostantól csak az origóban kell stabilitást vizsgálni

Na most a Lyapunov az Origóban vizsgál!

$x^* = 0$ ül. $f(0) = 0$

$\dot{x} = f(x)$

legyen: $V(\underline{x})$ = kvadratikus alak

$$\dot{V}(x) = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{d x_i}{dt} = \langle \nabla V, \dot{x} \rangle = \langle \nabla V, f(x) \rangle$$

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V, f(x) \rangle$$

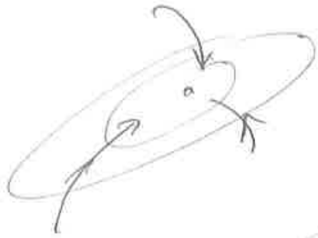
ha $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ környezet akkor stabil

ha $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ akkor <u>as.</u> stabil

$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = -x^2 - (y)^2$ ezt keressük

V? α, β, γ? nem körökkel dolgozunk,

hanem ellipszisekkel



ha $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x - y \end{cases} \iff \ddot x + \dot x + x = 0$

$$\frac{d}{dt} V(x,y) = 2\alpha x \dot x + \beta \dot x y + \beta x \dot y + 2\gamma y \dot y =$$

$$= 2\alpha x y + \beta y^2 + \beta x(-x-y) + 2\gamma y(-x-y) \overset{?}{=} -x^2 - y^2$$

x^2	$-\beta$	-1
xy	$2\alpha - \beta - 2\gamma$	0
y^2	$\beta - 2\gamma$	-1

ilyet szeretnénk kapni $\dot V$-re

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$V(x,y) = \frac{3}{2} x^2 + xy + y^2 \to$ ellipszis-e?

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\to$ „+" definit $\Rightarrow$ ellipszisek lesznek

Tétel Ljapunov módszere stabilitás vizsgálatra

1) Kvadratikus

$\dot{x} = Ax$ afh $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \;\forall i$

$\| e^{At} x \| = \text{konst} \cdot e^{-\alpha t} |x| \to$ exponenciális becslés

ellen $\exists\, V = V^T > 0$ pos. def. szim. mátrix hogy

$V(x) = \underline{x}^T V \underline{x}$ olyan tul.-ú, hogy $\frac{d}{dt} V(x(t)) = -\|x(t)\|^2$

$\downarrow$

Euklideszi norma

azaz ha kiszámítom ezt a deriváltat

$$\dot{x}^T V x + x^T V \dot{x} = x^T A^T V x + x^T V A x =$$

$$= x^T (A^T V + VA) = x^T I x \Leftrightarrow A^T V + VA = -I$$

$\hookrightarrow$ kvadratikus alakokra vonatkozó tétel

V az ismeretlen, mátrix egyenlet.

Biz:

$$AX + XB = C$$

$$X = -\int_0^\infty e^{At} C e^{Bt}\, dt$$

$$\| e^{At} \| \text{ és } \| e^{Bt} \| \leq C e^{-\alpha t}$$

$$A\cancel{X} + XB = -\int_0^\infty A e^{At} C e^{Bt} + e^{At} C e^{Bt} B \, dt =$$

$$= -\int_0^\infty (e^{At} C e^{Bt})' \, dt = -e^{At} C e^{Bt} \Big|_0^\infty = C$$

ha pedig: $A^T V + VA = I$

$$V = \int_0^T e^{A^T t} e^{At}\, dt \quad + \text{ definit}$$

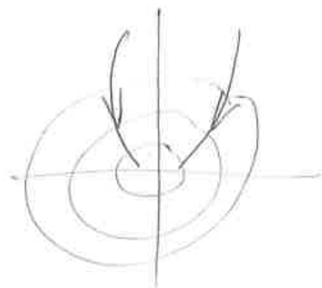
$$x^T V x = \int_0^\infty x^T e^{A^T t} e^{At} x\, dt = \int_0^\infty \underbrace{(e^{At}x)^T \cdot e^{At}x}_{\|e^{At}x\|^2}\, dt > 0$$

+ definit

ha $x > 0$

példák:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \rightarrow \text{stabil-e az origó?}$$



(Lin:) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

$V(x,y) = x^2 + y^2$ négyzetfüggvény

$$\frac{d}{dt} V(x,y) = 2x \cdot \dot{x} + 2y\dot{y} \Big|_{\substack{\dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3}} = -x^4 - y^4 < 0$$

$\downarrow$

az energia a rendszerben csökken

grad $V = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$

szintfelület normálvektora

$\dot{x} = f(x)$

[illegible] komponense van

ha $\langle \operatorname{grad} V, f(x) \rangle < 0 \Rightarrow$ tompaszög $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a szintfelületet befelé metszi

Def:

adott $\dot{x} = f(x)$ megoldás operátor $\phi(t,x)$

$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Ljapunov fv. E-re nézve, ha

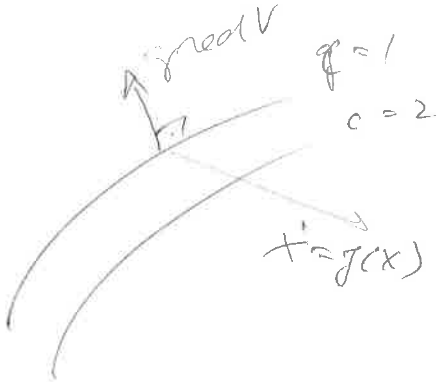
$V \in C^1$ és

$$\frac{d}{dt} V(\phi(t,x))\Big|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(\phi(t,x)), \dot{\phi}(t,x) \rangle\Big|_{t=0} = \langle \operatorname{grad} V(x), f(x) \rangle \leq 0$$

$$\dot{\phi}(t,x) = f(\phi(t,x))\Big|_{t=0} \;;$$

$$\dot{\phi}(0,x) = f(\phi(0,x)) = f(x)$$

ha < 0 akkor erős Ljapunov fv.



a diff. egy. megoldása nélkül át az egészet vizsgálhatjuk

a szintfelületek mentén a megoldás [illegible]

Tétel, ha

V szintfelületei folytonosan [illegible] körbezárnak egy pontot és V erős Ljapunov fv. a pontban szigorú minimuma van, akkor x_0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil

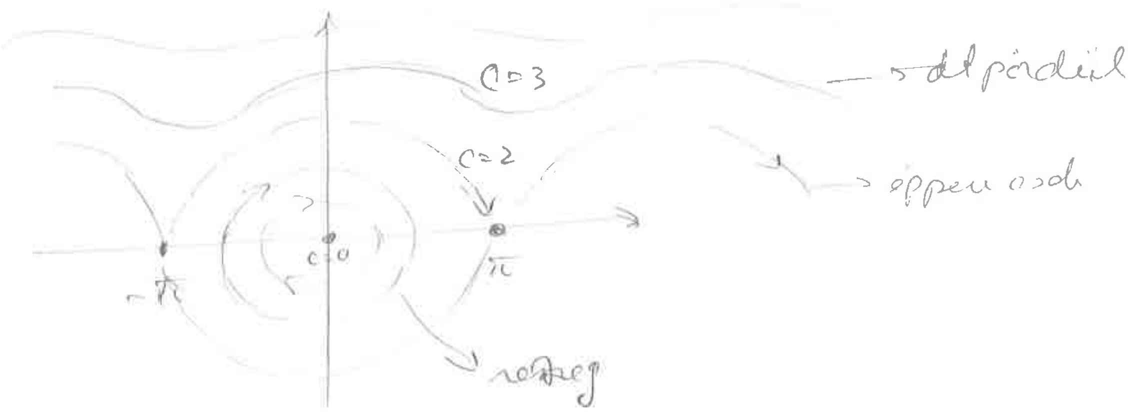
→ vesd össze energiaminimumra való törekvés

→ ha nem erős Ljapunov fv. ⇒ stabilitás

$\ddot{x} + \sin x = 0$ hajóhinta

$$E(t) = \underbrace{\frac{1}{2}(\dot{x})^2}_{\overset{m:=1}{=}\ \frac{mv^2}{2}} + \underbrace{1 - \cos x}_{mgh}$$

$$\dot{E}(t) = \dot{x}\ddot{x} + (\sin x)\dot{x} = (\ddot{x} + \sin x)\dot{x} = 0$$



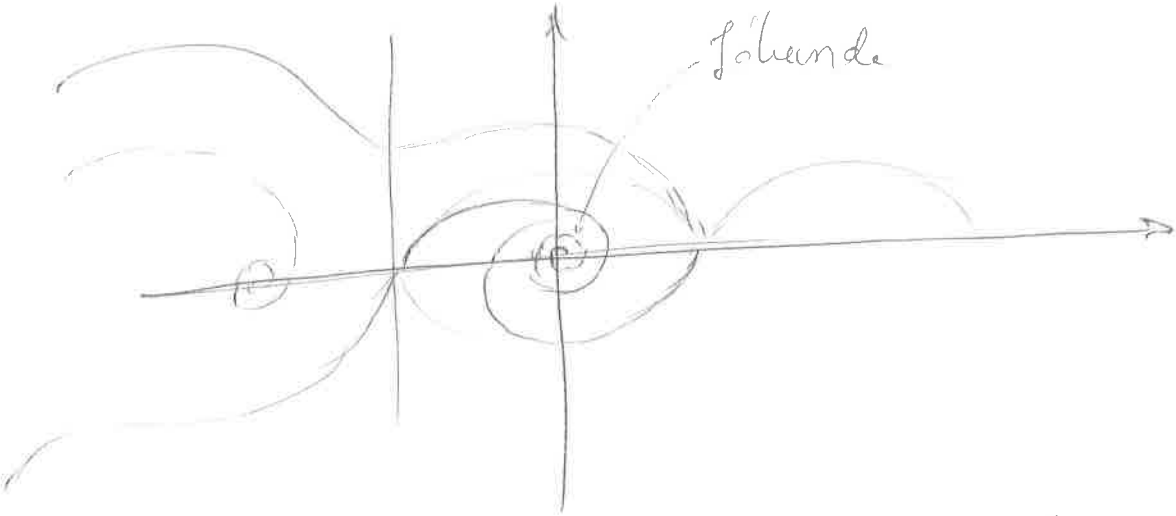
szintvonalakon történik a mozgás

közegellenállás → csak mind befelé

a szintvonalak befelé mutatnak

c = 0 → nyugalmi hely   c = 2 pontja nyeregp.

$\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + \sin x = 0$



hang átesés után fog az ún. csúcs felé menni

Ljapunov: a V segédfv. képes garantálni a stabilitást

A segédfv. tipikusan energia jellegű

1) maga az energia sok esetben

2) $\dot{x} = Ax$ és $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \ \forall i \Rightarrow \exists V$ kvadratikus

példa: ÚJRA:

$$\dot{x} = y - x^3$$
$$\dot{y} = -x - y^3$$

próbálkozás $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$

itt pl. jó az $V(x,y) = x^2 + y^2$

$\left.\begin{array}{l}\dot{x} = y\\ \dot{y} = -x\end{array}\right\}$ stabil de nem aszimptotikusan stabil

a nemlinearitás tagok befolyásolhatják a (de)stabilizálást

E_1: $\dot{x} = y - x^3$, $\dot{y} = -x - y^3$ $\to$ $\dot{V}_{E_1} = -x^4 - y^4 \leq 0$ es fol

E_2: $\dot{x} = y + x^3$, $\dot{y} = -x + y^3$ $\to$ $\dot{V}_{E_2} = x^4 + y^4 > 0$ $\to$ elnaltunk a fenibe

~~Az ig~~ Ha linearis a rendszer tehát van altalanos recept!

köv: aszimptotikus stabilitás megőrződik akkor is ha egy kicsit megv. az egyenletet

(T) az aszimpt stab ha Ljapunov fv sokkal könnyebben ellenáll a kis perturbációknak

(N) $\dot{x} = Ax + a(x)$; $a(0) = 0$, $a'(0) = 0$, $a \in C^2 \Rightarrow |a(x)| \leq Q\|x^2\|$

(L) $\dot{x} = Ax$ tfh. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \ \forall i$

$\Rightarrow x_j = 0$ aszimpt. stabil N-re nézve is

tudjuk, $\exists V$ hogy $A^T V + VA = -I$

$$\dot{V}_{(N)} = \dot{x}^T V x + x^T V \dot{x} = (Ax + a(x))^T V x + x^T V (Ax + a(x)) =$$

$$= (a(x))^T V x + x V a(x) + x^T (A^T V + VA) x \leq 2QC\|x\|^3 - \|x\|^2 < 0$$

Linearizálás Ljapunov-val

legyen $\dot{x} = f(x) = [A + G(x)]\, x$

$G(x) \to 0$, ha $x \to 0$

ekkor A Hurwitz; legyen $Q > 0$

megoldjuk: $PA + A^T P = -Q \longrightarrow P = \ldots$

$V(x) = x^T P x$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} =$$

$$= f^T(x) P \cancel{x} + x^T P f(x) =$$

$$= x^T [A + G(x)]^T P x + x^T P [A + G(x)]\, x =$$

$$= x^T [AP + PA] x + 2 x^T G(x) P x \cancel{\leq}$$

$$= -x^T Q x + 2 x^T G(x) P x \leq -x^T Q x + 2 \|x\|^2 \|P\| \, \|G(x)\|$$

$\forall\, \gamma > 0 \;\exists\, r > 0$:

$$\|G(x)\| < \gamma, \quad \forall\, \|x\| < r$$

$$x^T Q x \geq \lambda_{min}(Q) \|x\|^2 \iff -x^T Q x \leq -\lambda_{min}(Q) \|x\|^2$$

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{min}(Q) \|x\|^2 - 2\gamma \|P\| \|x\|^2 \neq$$

$$\leq \left[-\lambda_{min}(Q) - 2\gamma \|P\| \right] \|x\|^2$$

legyen $\gamma < \dfrac{\lambda_{min}(Q)}{2\|P\|} \implies$

$\implies \dot{V}(x) < 0$

Ljapunov

Pl:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x + (x^2-1)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - y + x^2 y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \left[A + G(x)\right] \underline{x} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

leggen $Q = I$

$$PA + A^T P = I \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_{min}(P) = 0.691$

$$V(x) = x^T P x = 1.5x^2 - xy + y^2$$

$$\dot{V}(x) = 3x\dot{x} - \dot{x}y - x\dot{y} + 2y\dot{y} =$$

$$= -3xy + y^2 + x(-x + y - x^2 y) + 2y(x - y + x^2 y) =$$

$$= \cancel{-3xy} + y^2 - x^2 + \cancel{xy} - x^3 y + \cancel{2xy} - 2y^2 + 2x^2y^2 =$$

$$= -y^2 - x^2 - x^3 y + 2x^2 y^2 = -(x^2+y^2) - x^2 y(x - 2y)$$

$$\leq -\|\underline{x}\|^2 - |x^2||y|\,|x-2y| =$$

$$= -\|x\|^2 - |x|\,|xy|\,|x-2y| \leq -\|x\|^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x^4\|^4$$

ha $\|x\|^2 \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}} \stackrel{\text{def}}{=} r^2\right)$ akkor $\dot{V}(x) < 0$

Példa: inga

(1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a \sin x \end{cases}$

$V(x) = a(1-\cos x) + \frac{y^2}{2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x) > 0 \quad \text{ha } x \in [-2\pi, 2\pi] \end{cases}$

$\dot{V}(x) = \dot{x} a \sin x + y \dot{y} =$

$= a y \sin x - a y \sin x = 0 \Longrightarrow$ az origó stabil

(2) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a \sin x - b y \end{cases}$

$V(x) = a(1-\cos x) + \frac{y^2}{2}$

$\dot{V}(x) = a y \sin x + y(-a \sin x - b y) = -b y^2 \Longrightarrow$ as. stabil

Lyapunov

Anal 3
e.a. N14

Def: u harmonikus, ha

$$\Delta u = 0$$

a harmonikus fv-ek vektorteret adnak

$$S_a(r) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\| = r \}$$

Tétel: (Mean Value Theorem)

u harmonikus $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad u(a) = \frac{1}{A(S_a(r))} \int_{S_a(r)} u(x)\, dx$$

D tartomány, amin meg akarjuk oldani

- Dirichlet feltétel

$$f : \partial D \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = u(x) \quad , x \in \partial D$$

- Neumann

$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} = \langle \text{grad}\, u , \underline{n} \rangle$$

- Kevert

$$f(x) = \alpha \cdot u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial \underline{n}}$$

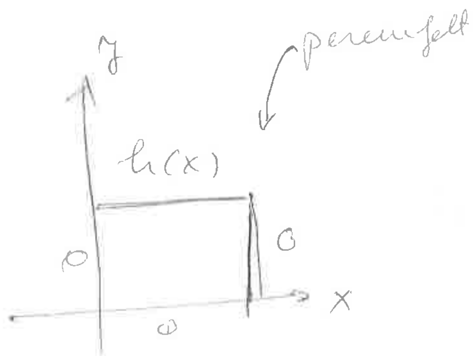
Hővezetés egyenlete

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$u(x,t): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ha már beállt a hőmérséklet eloszlás



első megközelítés

$$u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$$

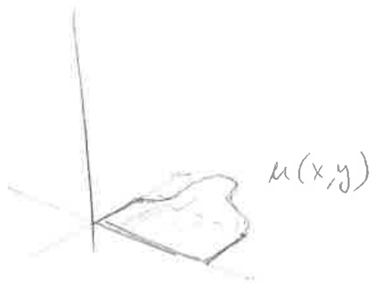
$f(0) = 0$

$f(1) = 0$

$g(0) = 0$

$g(1) \quad f(x) = h(x)$

$$g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

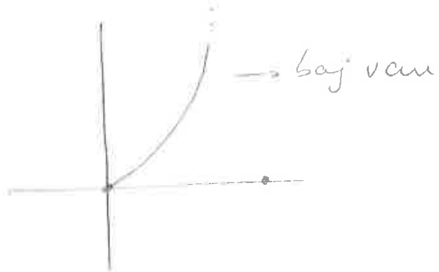


$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} = - \frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{g} = \text{konstans} = -c^2$$

csak x — csak y

mert $f(0) = f(1) = 0$

ha „+" akkor konvex + pozitív



$$f''(x) = -c^2 f(x) \Rightarrow f(x) = A \sin cx + B \cos cx$$

$$g''(y) = c^2 g(y) \Rightarrow g(x) = \mu_1 e^{cx} + \mu_2 e^{-cx}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = 0 \\ \mu_2 = -\mu_1 \\ A \sin cx = 0 \Rightarrow c = k\pi \end{array}\right\}$$ kezdeti feltételekből

$$\tilde{u}(x,y) = \lambda_1 (\sin k\pi x) \cdot \mu_1 \cdot (e^{k\pi y} - e^{-k\pi y})$$

$\lambda_1 := A$

$\lambda_2 := B$

$$\tilde{u}(x,1) = C_k (e^{k\pi} - e^{-k\pi}) \sin(k\pi x)$$

$$u(x,y) = \sum_{k \geq 0} c_k (e^{k\pi y} - e^{-k\pi y}) \sin(k\pi x)$$

$$u(x,1) = \sum_{k \geq 0} c_k (e^{k\pi} - e^{-k\pi}) \cdot \sin(k\pi x) = h(x)$$

$$c_k (e^{k\pi} - e^{-k\pi}) = 2\int_0^1 [\sin k\pi x] \, h(x) \, dx$$

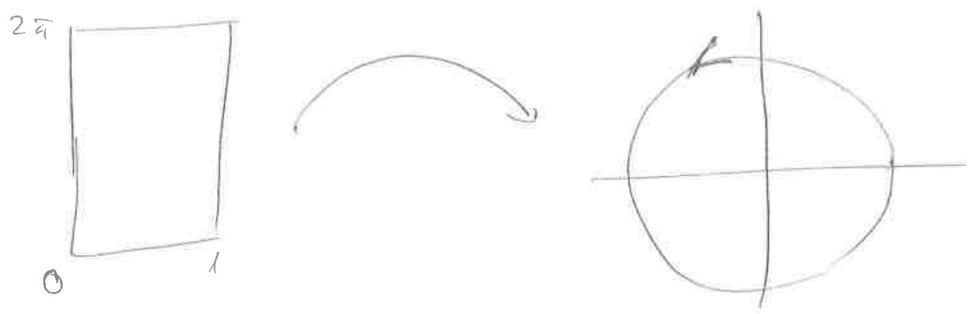
$$u(x,y) = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\frac{2}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} \left[\int_0^1 h(s) \sin k\pi s \, ds\right]}_{c_k} (e^{+k\pi y} - e^{-k\pi y}) \sin k\pi x$$

<u>Hővezetés stacionárius esetben, 2 dimenzióban</u>

<u>Laplace : körön</u>

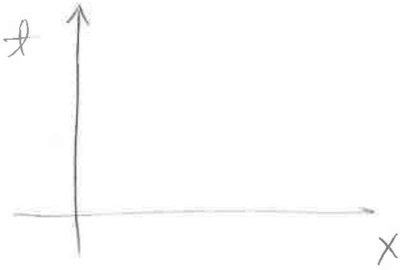
$\Delta u = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} W(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0 \end{array}}$$



Hővezetés stac eset 2D

Hővezetés nem stac: 1D-ben



$h(x,t)$

$h(x,0) = f(x)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Fourier-tr

x szerint

→ x szerint

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$k \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$-u^2 k \mathcal{F}(h) = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(h)$$

$$-u^2 k H = \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$-u^2 k \partial t = \frac{\partial H}{H} \Rightarrow -u^2 t k = \ln H + \ln C(u)$$

$$H = C(u) \cdot e^{-u^2 t k}$$

$\Delta u = 0$

Ennek az a lényege, hogy ha egy forgatást végrek akkor nem függ a Laplace izé

$x_1, x_2 \to$ az egyik bázisban

$y_1, y_2 \to$ a másik bázisban

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \text{transzformációs mátrix}$$

[ortonormált]

$\Downarrow$

$A \cdot A^T = I_2$

$$\underline{P_y} = A\,\underline{P_x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{21}\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = a_{11}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{21}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = a_{12}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2a_{12}a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{22}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

próba:

$$A\cdot A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12} + a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\mathcal{F}(h(x,0))(u) = \mathcal{C}(u)$$

peremfelt:

$$\mathcal{F}(h(x,0))(u) = \mathcal{F}(f(x))(u)$$

$$\mathcal{F}(h(x,t))(u) = \mathcal{F}(f(x))(u)\, e^{-ku^2t} \longrightarrow !$$

$$\mathcal{F}(g(x,t))(u) := e^{-ku^2t}$$

$$\mathcal{F}(h(x,t))(u) = \mathcal{F}(f(x))(u) \cdot \mathcal{F}(g(x,t))(u)$$

$$\mathcal{F}(h(x,t))(u) = \mathcal{F}(f(x) * g(x,t))(u)$$

$$\Downarrow$$

$$h(x,t) = f(x) * g(x,t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{\frac{-x^2}{4kt}}\right) = e^{-ku^2t}$$

$$h(x,t) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

<u>másik</u>

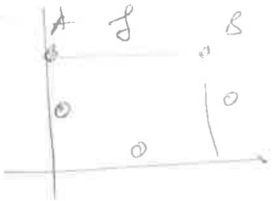
$$h(x,0) = h(x,1)$$

$$\text{"}h'(x,1) = h'(x,0)\text{"}$$

$$h(0,y) = c$$

Анал $\overline{a_1}$

$\Delta u = 0$ $\longrightarrow$ Dirichlet feltt



$u(x) = f(x)$

$u = X(x)\,Y(y)$

$\Delta u = X''Y + Y''X = 0$

$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2\pi^2$ $\longrightarrow$ mert A és B pontban is 0-kell legyen

$X'' = -\lambda^2 X$

$\Downarrow$

$X = A\lambda \sin(\lambda\pi x)$

cos nem lehet mert $\cos 0 \neq 0$

$Y'' = (n\pi)^2 Y$

$Y = A_1 e^{n\pi y} + A_2 e^{-n\pi y}$

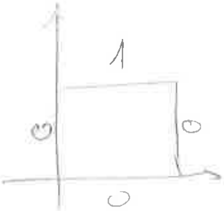
$A_1 = -A_2$ $\longrightarrow$ $Y = A \sinh(n\pi y)$

$u(x,y) = f \rightarrow \sum \alpha_k \sin(k\pi x)$

$u(x,y) = \sum \frac{\gamma_k \sin(k\pi x)\,\mathrm{sh}(k\pi y)}{2}$ $\Big\}\ y=1$

$\rightarrow \gamma_k = \frac{\alpha_k}{\mathrm{sh}(k\pi)}$

(1)



$\Delta u = 0$

$$u = \sum \frac{A_k}{sh(k\pi)} \cdot \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

$$A_k = 2\int_0^1 1 \sin(k\pi x)\,dx = -2\cdot \frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 = \frac{4}{k\pi} \quad \forall k \not\vdots 2$$

(2) $f = x^2 - x$

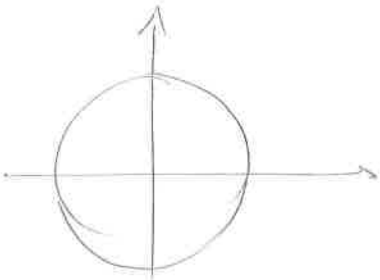
$$A_k = 2\int_0^1 (x^2-x)\sin(k\pi x)\,dx =$$

$$= 2(x^2-x)\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (2x-1)\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\,dx =$$

$$= -2(x^2-x)\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 + 2(2x-1)\frac{\sin k\pi x}{(k\pi)^2}\Big|_0^1 + \frac{4\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{4}{(k\pi)^3}; \text{ ha } k \not\vdots 2$$

(3) $\Delta u = 0$



u korlátos

$$\begin{cases} x^2+y^2 < a^2 \\ u = f \end{cases}$$

$$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\Delta'' w = \partial_r^2 w + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 w + \frac{1}{r}\partial_r w = 0$$

"

$\Rightarrow \partial_r^2 w + \ldots + \frac{1}{r}\ldots = \Delta u$

$w'_r = u_x\cos\theta + u_y \sin\theta$

$w''_{rr} = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy} \ldots$

$w'_\theta =$

$w''_{\theta\theta} = \ldots$

$$u(a\cos\theta, a\sin\theta) = h(\theta)$$

$$R''T + \frac{T''\cdot R}{r^2} + \frac{R'T}{r} = 0$$

ahol: $W = R(r)\,T(\theta)$

$$\underbrace{\frac{R'' r^2}{R}} + \underbrace{\frac{r R'}{R}} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$R := r^k \;;\; r^{-k} \quad \Rightarrow \quad R := C_1 r^k + \cancel{C_2 r^{-k}}$$

mert korlátos és 0-ban értelmes?

nem értelmezett 0-ban, mert: $\frac{1}{r^k} \to \infty$

$$k^2 = \lambda$$

$$T = A_1 \cos k\theta + A_2 \sin k\theta$$

$$T(0) = T(2\pi) \Rightarrow k = \text{egész szám}$$

$$W = \sum r^k (A_k \cos k\theta + B_k \sin k\theta)$$

$$f'' = -f\lambda^2$$

$$f = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow A \sin \lambda = 0$$

$$\lambda = k\pi \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

$$f = A \sin \pi x$$

$$A \sin 2\pi x$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x$$

$$f = \frac{x^2 - x}{g(1)}$$

$$g'' = \lambda^2 g$$

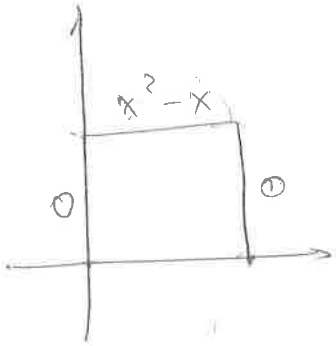
$$g = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}$$

$$g(1) = C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}} = \frac{1}{C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}} \cdot (x^2 - x)$$

$$A_k = 2 \int_0^1 (x^2 - x) \sin(k\pi x)\, dx$$

④ $\Delta u = 0$



$u'_y(x,0)=0$

$$\begin{cases} u(x,1) = x^2-x \\ u(0,y)=0 \\ u(1,y)=0 \\ u^*(x,0) = h(x) \\ h(0)=h(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)g(1)=x^2-x \end{cases}$$

felt $u(x,y) = f(x)\,g(y)$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g}$$

$$\begin{cases} f(x)\,g(1) = x^2-x \\ f(0)\,g(y)=0 \\ f(1)\cdot g(y)=0 \\ f(x)\,g(0)=h(x) \\ h(0)=h(1)=0 \end{cases}$$

$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$g\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\,\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

$$g f'' = -f g''$$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = C$$

$$f(x) = \frac{x^2-x}{g(1)}$$

$$f''(x) = \frac{2}{g(1)}$$

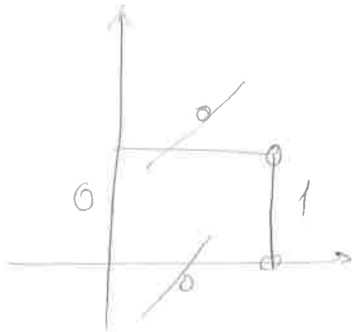
$$\frac{f''}{f} = \frac{\frac{2}{g(1)}}{\frac{x^2-x}{g(1)}} = \frac{2}{x^2-x} < 0$$

$x^2-x<0$

$(x^2-x)''>0$

$$\frac{(x^2-x)''}{x^2-x} \cancel{<} 0 \qquad x\in[0,1]$$

(1) (a) $\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 1 \\ u(x,1) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$



$$u = f(x)\, g(y)$$

$$\begin{cases} f(0)\, g(y) = 0 \\ f(1)\, g(y) = 1 \implies g(y) = \dfrac{1}{f(1)} \\ \cancel{f(x)\, g(1) = 0} \\ \cancel{f(x)\, g(0) = 0} \end{cases}$$

$$g'(y) = 0$$
$$g''(y) = 0$$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = 0$$

$$f'' = 0 \implies f = Cx + D$$

$$\cancel{g''=0} \qquad g = \frac{1}{C+D}$$

$$f(0)\cdot g(y) = \frac{\cancel{C\cdot 0} + D}{C+D} = 0 \implies \begin{cases} D = 0 \\ C \neq 0,\ \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{cases}$$

$$u = f\cdot g = Cx \cdot \frac{1}{C}$$

$$u(x,y) = x$$

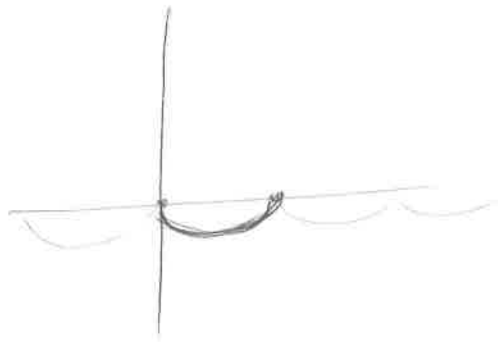
$$u(x,y) = f(x) \cdot g(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \cdot \left(C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1 A_k}{\cancel{C_1}} \sin k\pi x \cdot \left(e^{\lambda y} + \frac{C_2}{C_1} e^{-\lambda y}\right)$$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \left(C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}\right) = x^2 - x$$

$$A_k \left(C_1 e^{\lambda} + C_2 e^{-\lambda}\right) = 2\int_0^1 (x^2 - x) \sin k\pi x \, dx =$$



$$\sum A_k \sin k\pi x$$

POLCZ PÉTER

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos\frac{k\pi}{T}x \, dx}$$

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Beam egyenlet: $u'_t + u'''_{xxx} = 0$

Hő / hullámegyenlet

Transzport egyenlet

Laplace

EIKONAL egyenlet: fény terjedése

$$|\nabla u| = 1$$

Minimális felület

$$\nabla\left(\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = 0$$

Conservation law

$$u'_t + D\bar{F}(u) = 0$$

Def: Jól kondicionált (WELL POSED)

$\exists$ megoldás, egyértelmű, stabil

$\downarrow$

folytonosan függ a paraméterektől

Nem jól kondicionált = rosszul kondicionált (ILL POSED)

(M) Jól kondicionált $\not\Longrightarrow$ Jobb

Megoldás: → klasszikus megoldás: u diff.ható elegendően

→ gyenge: esetleg nem is folyt

pl: shock-waves

Pl instabilitásra

(P) $\Delta u = 0$

$x \in \mathbb{R},\ y > 0$

$u(x,0) = 0$

$u'_y(x,0) = \frac{\sin(nx)}{n}$; n tetszőleges.

ha $n \to \infty \Rightarrow u'_y(x,0) = 0$ akkor $u(x,y) \equiv 0$ ✓

$$u_n(x,y) = \frac{\sin(nx)\,\mathrm{sh}(ny)}{n^2} \xrightarrow[y \to \infty]{}$$

$$\lim \sup \left| u_n(x,y) - u(x,y) \right| = +\infty \quad \boxed{\text{furcsa}}$$

$\Downarrow$

nem folytonosan függ a paraméterektől

Most : Lineáris, Másodrendű

Osztályozás :
- elliptikus : nyugalmi állapotok leírására
  - pl : hidraulikai koncentráció, hőmérséklet eloszlás, elektromos potenciál
  - pl $\Delta u = 0$
  - $\Delta u = f$
- parabolikus : Hővezetés
  - $u'_t = u''_{xx} = \Delta u$
- hiperbolikus : Hullámegyenlet
  - $u''_{tt} = \Delta u$

Hővezetés :

végtelen rúdban $\qquad t \geq 0,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt

\+ Kezdeti felt $\qquad \Omega_t^+ = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t > 0\}$

$u(x,0) = \Theta(x)$; $x \in \Omega$

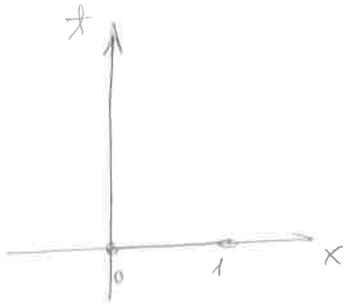
\+ peremfeltétel :

$u(x,t) = f(x)$; $x \in \partial\Omega$ (Dirichlet felt)

$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = g(x)$; $x \in \partial\Omega$ (Neumann felt)

Spec eset : $n = 1$
véges rúd

$\Omega = (0,1)$



(IC) : $u(x,0) = f(x)$
$x = (0,1)$

(BC) : $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$f(0) = f(1) = 0$

$u(x,t) = X(x)\,T(t) \longrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$

$X \cdot T' = T X''$

Peremfelt:

$$0 = u(1,t) = X(1)\,T(t) = 0 \quad \forall(t)$$

$$u(0,t) = X(0)\cdot T(t) = 0 \quad \forall(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{X(1) = X(0) = 0} \\ &\boxed{X'' = \lambda X} \end{aligned}\right\} \text{ODE}$$

Milyen λ-ra $\exists$ megoldás

ha $\lambda \geq 0$

(1) mo $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -c_2 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} &+ c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} \end{aligned}\right\} c_1 = 0 = c_2 \quad \lightning$$

$\lambda = 0$-ra polinomot

$\lambda = -\alpha^2$-re:

$$X'' = -\alpha^2 X$$

$$X_1(x) = \cos \alpha x$$

$$x_2(x) = \sin \alpha x$$

$$X(x) = C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin \alpha x$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \;;\; C_2 := C$$

$X(1) = C \sin \alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi \longrightarrow$ sajátértéke lesz

Lehetséges lambdák: $\lambda = -(k\pi)^2$

n - edik alapmegoldás

$$u(x,t) = A e^{-(n\pi)^2 t} \sin(\pi n x)$$

homogén lineáris

$\Downarrow$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(n\pi)^2} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$$

hővezetés „visszafelé"

$$u'_t = u''_{xx} \quad ; x \in \mathbb{R}$$

$$t < 0$$

kezdeti felt helyett: „végfeltétel"

$$u(x,0) = f(x)$$

Trükk: $\mathcal{U}(x,t) = u(x,-t) \quad t > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{U}'_t = -\mathcal{U}''_{tt}$$

megoldás: hasonló

$$\mathcal{U} = \sum A_k e^{+(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$\mathcal{U}(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \quad \text{(felrobban}$$

Backward Heat $\longrightarrow$ instabil

(T): $\forall t, \forall M > 0, \forall \varepsilon > t$

$\exists f \quad \|f\| < \varepsilon$ és megold $|\mathcal{U}(x,t)| > M$

Hővezetés egyenlete

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

{ megoldás menete }

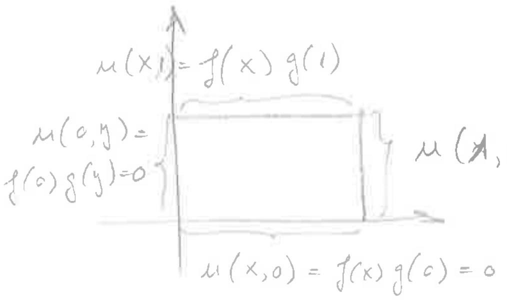
$$u(\underline{x}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

1. eset: már beállt a hőmérséklet $\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$$

$\longrightarrow$ első megközelítésben; $u := f(x)\, g(y)$



1. $f(0) = 0$
2. $f(1) = 0$
3. $g(0) = 0$

$u(x,1) = h(x)$

4. $f(x)\, g(1) = h(x)$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{g} = -\lambda^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\lambda^2 f$$

$$\Downarrow$$

$$f = A_1 \cos \lambda x + A_2 \sin \lambda x$$

1. $\Longrightarrow f(0) = A_1 \cos 0 + A_2 \sin \lambda 0 = A_1 = 0$

2. $\Longrightarrow f(1) = A_2 \sin \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = k\pi$, $A_2 \in \mathbb{R}$, $A := A_2$

$\Longrightarrow \underline{f = A \sin k\pi x}$

$$g''(y) = \lambda^2 g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \mu_1 e^{\lambda x} + \mu_2 e^{-\lambda x} \Big|_{\lambda = k\pi} =$$

$$= \mu_1 e^{k\pi x} + \mu_2 e^{-k\pi x} \quad \Big\} \Rightarrow \underline{g = \mu \operatorname{sh} k\pi y}$$

$$3. \Rightarrow g(0) = \mu_1 + \mu_2 = 0 \Rightarrow \mu := \mu_1 = -\mu_2$$

$$4. \Rightarrow f(x)\, g(1) = h(x)$$

$$f(x) = A \sin k\pi x$$

$$g(y) = \mu \operatorname{sh} k\pi y$$

$$u(x,y) = A\mu \operatorname{sh} k\pi y \sin k\pi x \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} - re \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\operatorname{sh} k\pi y)(\sin k\pi x)$$

$$u(x,1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\operatorname{sh} k\pi)(\sin k\pi x) = h(x)$$

$$h(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 h(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 h(x) \sin k\pi x \, dx \cdot \sin k\pi x$$

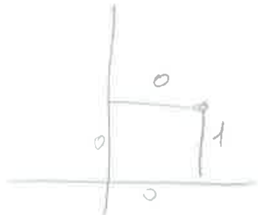
feladat $u(x,y) = \sum c_k (\operatorname{sh} k\pi x)(\sin k\pi y)$

$$u(x,1) = \sum c_k (\operatorname{sh} k\pi x) \underbrace{\sin k\pi}_{=0}$$

↳ hát ez pedig így nem jó!

(a)

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(1,y) = 1 \\ u(x,1) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)g(y) = 0 \\ f(1)g(y) = 1 \\ f(x)g(1) = 0 \\ f(x)g(0) = 0 \end{cases}$$



$u(x,y) = f(x)g(y)$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{g} = 0, \text{ mivel } g(y) = \frac{1}{f(1)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = C$$

$$f = Cx + D$$

$$g = \frac{1}{f(1)}$$

ha $x = 0 \Rightarrow u(0,y) = f(0)g(y) = (C \cdot 0 + D) \cdot \frac{1}{f(1)} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{D}{C+D} = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f &= Cx \\ g &= \frac{1}{C} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x,y) = x$$

és valóban: $u(1,y) = 1$

$u(0,y) = 0$

(1) $\Delta u = 0$

(a)

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda$$

$$u(1,y) = f(1)\,g(y) = 1$$

(b)

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 2 > 0 \\ f(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda^2$$

$$f''(x) = \lambda^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \mu_1 e^{\lambda x} + \mu_2 e^{-\lambda x}$$

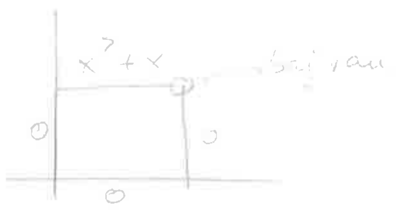
$$g'' = -\lambda^2 g \Rightarrow g(\cancel{x}y) = \eta_1 \sin \lambda y + \eta_2 \cos \lambda y$$

1. $f(0) = 0 \Rightarrow \mu = \mu_1 = -\mu_2 \Rightarrow f = \cancel{\mu}\ \mathrm{sh}\, \lambda x$
2. $g(1) = 0 \Rightarrow \eta_1 \sin \lambda + \cancel{\eta_2} = 0$
3. $g(0) = 0 \Rightarrow \eta_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = k\pi \\ \eta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f = \mu\ \mathrm{sh}\, k\pi x \\ g = \eta \sin k\pi y \end{cases}$$

(b) <u>megjegyzés</u>:



$u(0,y) = f(0)\,g(y) = 0$

$u(1,y) = f(1)\,g(y) = 0 \longrightarrow$ baj van

$u(x,1) = f(x)\,g(1) = x^2+x$

$u(x,0) = f(x)\,g(0) = 0$

$$u(x,y) := f(x)\,g(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{f} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}{g} = C$$

$$f'' = 2 > 0$$

$$f(x) = \frac{x^2+x}{g(1)}$$

tfh. $\boxed{g(1) < 0} \Rightarrow f(x) < 0$

$$\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -C^2$$

$f'' = -C^2 f \Rightarrow f = \mu_1 \sin Cx + \mu_2 \cos Cx$

$g'' = C^2 g \Rightarrow g = A_1 e^{Cy} + A_2 e^{-Cy}$

$\begin{cases} f(x) \equiv 0 \longrightarrow \text{nem lehet!} \\ \text{vagy} \\ g(0) = 0 \Rightarrow A := A_1 = -A_2 \Rightarrow g = A \operatorname{sh} Cy \end{cases}$

de $g(1) < 0$

$\frac{A}{2}\, \frac{e^{Cy} - e^{-Cy}}{2}\Big|_{y=1} =$

$\frac{A}{2}\left(e^{C} - \frac{1}{e^{C}}\right) < 0$

$\Downarrow$

$\boxed{A \cdot C < 0}$

$f(0) = 0 \Rightarrow \mu_2 \cos C\cdot 0 = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow f = \mu \sin Cx$

$u(x,y) = A\mu\,(\operatorname{sh} Cy)(\sin Cx)$

$u(x,y) = A\mu \, sh(cy) \sin(cx)$

$u(x,1) = A\mu \, sh\, c \sin cx = x^2 + x$

$u(x,1) = f(x)\, g(1) = x^2 + x$

$$f(x) = \frac{x^2+x}{g(1)}$$

$g = \cancel{A}\, sh\, cx \Rightarrow g(1) = \cancel{A}\, sh\, c$

$$f(x) = \frac{x^2+x}{A\, sh\, c}$$

$\cancel{g(x)}$ $u(x,y) =$

megakadt a tudomány!

EZRE MÉG VISSZATÉRNI!

(2) $\Delta u(x,y) = 0 \quad : x^2+y^2 < 6$

$u(x,y) = y + y^2 \quad : x^2+y^2 = 6$

$$\vec{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$

w

$$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$w'_r = u'_x \cos\theta + u'_y \sin\theta$$

$$w''_{rr} = u''_{xx}\cos^2\theta + 2u''_{xy}\cos\theta\sin\theta + u''_{yy}\sin^2\theta$$

$$w'_\theta = -u'_x r\sin\theta + u'_y r\cos\theta$$

$$w''_{\theta\theta} = +u''_x r^2\sin^2\theta - u'_x r\cos\theta + u''_{yy} r^2\cos\theta - u'_y r\sin\theta$$

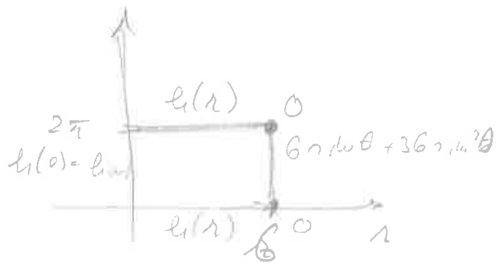
$$w''_{rr} + \frac{1}{r^2}w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r}w'_r = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}$$

$$w = f(r)\,g(\theta)$$

$$\frac{r^2\,\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{r\,\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} = C$$



perem feltétel:

$$\cancel{u(x,y)=} \quad u(x,y) = y + y^2\Big|_{\substack{x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta}} \Rightarrow w(r,\theta) = r\sin\theta + r^2\sin^2\theta\Big|_{r=6} =$$

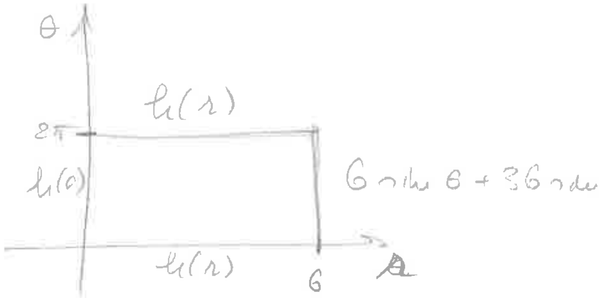
$$\Rightarrow w(6,\theta) = 6\sin\theta + 36\sin^2\theta$$

$$w(6,0) = w(6,2\pi) = 0$$

$$w(0,\theta) = \text{konst}$$

$$w(r,0) = w(r,2\pi) = l_1(r) \to$$ tetszőleges [illegible]

$$\frac{r^2 \partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{r\,\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$



$$w(r,\theta) = f(r)\, g(\theta)$$

$$\begin{cases} w(0,\theta) = f(0)\, g(\theta) = h(0) \\ w(6,\theta) = f(6)\, g(\theta) = 6 \sin\theta + 36 \sin^7\theta \\ w(r,0) = w(r,2\pi) = f(r)\, g(0) = f(r)\, g(2\pi) = h(r) \end{cases}$$

$$r^2 g(\theta)\, f''(r) + r\, g(\theta)\, f'(r) = -f(r)\, g''(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)} = C$$

$f = r^{\mu}$ ⟶ valami ilyesmi

lehet-e $f = r^{-\mu^2}$ ⟶ nem lehet mert $f = \frac{1}{r^{\mu^2}}$, de $r=0$-ra nem def

$\cancel{r^2 f''(r) - r f'(r)}$

tehát $f = r^{+\mu^2} = r^{\mu}$, $\mu \geq 0$

$\cancel{w(r,0) - w(r,2\pi) \mid_{r=6} \Rightarrow 6}$

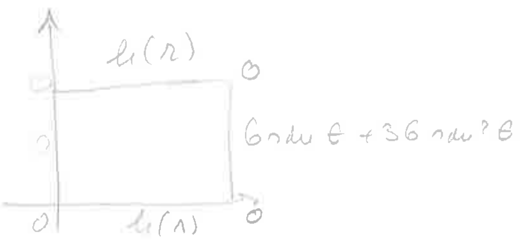
1. $f(0)\, g(\theta) = h(0) \xrightarrow{\text{ha } f(0) \neq 0} g(\theta) = \frac{h(0)}{f(0)} = \text{konst}$

2. $g(\theta)\, f(0) = 6 \sin\theta + 36 \sin^7\theta \Rightarrow g(\theta) = \frac{6 \sin\theta + 36 \sin^7\theta}{f(0)}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) = 0$ és $h(0) = 0$

tehát feltételek update:



$f = r^{\mu} \quad \Big| \ \mu > 0$

$f' = \mu r^{\mu-1} \geq 0$

$f'' = \mu(\mu-1) r^{\mu-2} \geq 0 \quad \Big\} \ C = +C^2$

$f = r^{\mu} \geq 0$

C lehet 0 is

ha $C = 0 \Rightarrow g = Ax + B$
de $A = B = 0$ mert
$g(0) = g(2\pi) = 0$

$g''(\theta) = -C^2 g(\theta)$

$g(\theta) = A_1 \cos Cx + A_2 \sin Cx \quad \Big| \ \forall C \in \mathbb{R}$

$g(0) = g(2\pi) = 0$

$A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0 = A_1 \cos 2\pi C + A_2 \sin 2\pi C = 0$

$\Rightarrow \quad A_1 = 0 \ ; \ A := A_1$

$C \in \mathbb{Z} \Rightarrow C := k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{g(\theta) = A \sin k\theta} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$g(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin k\theta$

$u(6, \theta) = f(6)\, g(\theta) = 6 \sin\theta + 36 \sin^2\theta$

$\sum_{k=0}^{\infty} f(6) c_k \sin k\theta = 6 \sin\theta + 18 - 18 \cos 2\theta$

$\Downarrow$

$6^{\mu} g(\theta) = 6 \sin\theta + 18 - 18 \cos 2\theta$

$g(\theta) = 6^{1-\mu} \sin\theta + 3 \cdot 6^{1-\mu} - 3 \cdot 6^{1-\mu} \cos 2\theta$

szerintem ott lehet a baj, hogy u nem separabilis

PDE (folyt)

$L[u]$ PD operátor

pl homogén lineáris függvények

$$\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = 0}$$ LAPLACE egyenlet

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta$$

$$\boxed{L[u] = u'_x + a u'_y = 0}$$ TRANSZPORT egyenlet

$\downarrow$

$u'_t + b u'_x = 0$ → egy mozgás felírása

$$\boxed{u'_t = u''_{xx} \cdot c^2}$$ HŐVEZETÉS egyenlete

$\downarrow$

$$L[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

$$\boxed{u''_{tt} = c^2 u''_{xx}}$$ HULLÁMMOZGÁS egyenlete

Transport egyenlet: → $\gamma(s) = \begin{pmatrix} t+s \\ x+bs \end{pmatrix}$ — (t,x) ponton áthaladó, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ irányú egyenes

$u'_t + b u'_x = 0$

$\langle (1,b), \text{grad } u \rangle = 0$ → iránymenti derivált

$z(s) = u(t+s, x+bs)$ $\quad \frac{d}{ds}$

$z'(s) = u'_t + u'_s b = 0$

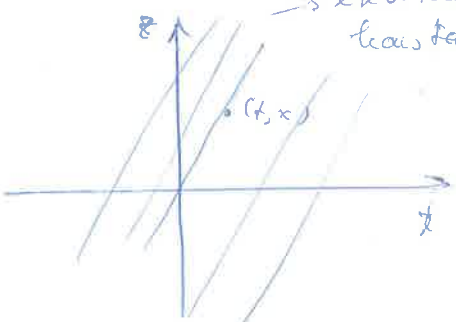
PDE (1) és (2)

ha } kezdeti felt.

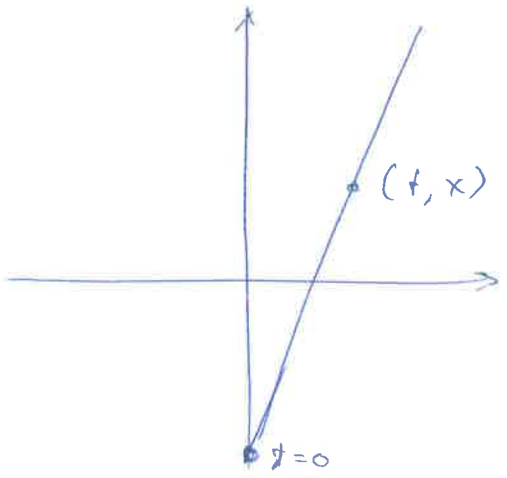
$t = 0$

$g(0,x) = g(x)$

→ ezek mentén konstans



FONTOS PDE-k | 14/1 hullám egy. (utolsó)



$(t+s,\ x+bs) = (0,\ \text{valami})$

$\Downarrow$

$s = -t$

$u(t,x) = u(0, x-tb) = g(x-tb)$

Megoldás: $\boxed{u(t,x) = g(x-tb)}$

ha g diffható

Mi van akkor, ha g NEM diffható???

↳ akkor is ez a fenti az egyetlen „értelmes megoldás"

↳ ez lesz a gyenge megoldás

Hullámegyd.:

Végtelen hosszú rezgő húr

Kiinduló állapot: $u(0,x) = u_0(x)$ kezdeti kitérés

$u_t'(0,x) = u_1(x)$ kezdeti sebesség

$\boxed{u''_{tt} = c^2 u''_{xx}}$ WAVE-equation

Megoldás: D'Alambert megoldás

$(t,x) \longrightarrow (\xi, \eta)$, $\left.\begin{array}{l} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{array}\right\}$ új változók

$x = \dfrac{\xi+\eta}{2}$

$t = \dfrac{\xi-\eta}{2c}$

Transport egyenlet

$$\boxed{u'_t + b u'_x = 0}$$

↓

$\Rightarrow \langle \nabla u, \binom{1}{b} \rangle = 0$ → irány menti derivált, azaz

$u(t,x)$ $\underline{v} = \binom{1}{b}$ irány mentén konstans értéket vesz fel

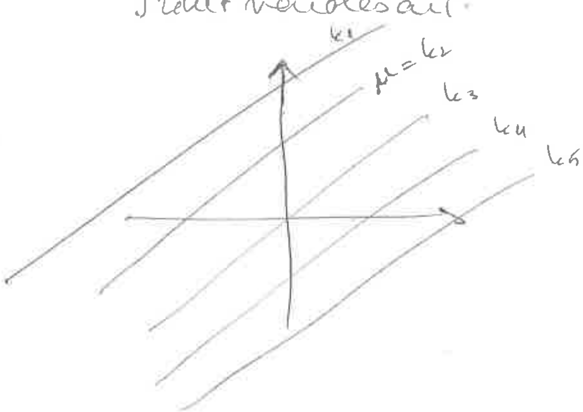
legyen $\underline{\gamma}(s) = \binom{t+s}{x+bs}$

↓

(t,x) ponton át haladó

$v\binom{1}{b}$ irányú egyenes.

Szintvonalai:



$z(s) := u(\underline{\gamma}(s)) =$

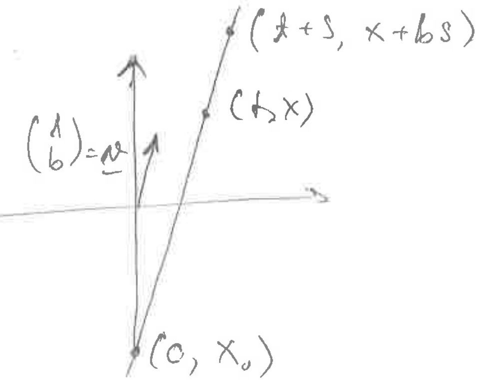
$= u(t+s, x+bs)$

$$\frac{dz}{ds} = u'_x \frac{d(t+s)}{ds} + u'_y \frac{d(x+bs)}{ds} = u'_x + b u'_y = 0 \Longrightarrow$$

$\Rightarrow z \equiv c_0$ konstans (nyilván) → ez tulajdonképpen $u(t,x)$-et vizsgálom az adott egyenes mentén

egy adott (t,x)-re:

$\Rightarrow$ $\boxed{z(0,x_0) = z(t+s, x+bs) \; \forall s\text{-re}}$



ha $(0,x_0) = (t+s, x+bs)$

⇓

$t+s = 0 \Rightarrow \boxed{s = -t}$

⇓

$z(s) = z(-t) = u(t-t, x-bt) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{u(t,x) = u(x-bt)}$

↓

megoldás

Transport E. → szépen leírva

Jelölés: $\mathcal{U}(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)$

$$\mathcal{U}'_{\xi} = u'_t \cdot \frac{1}{2c} + u'_x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{U}''_{\xi\eta} = \frac{1}{2c}\cdot\left[u''_{tt}\left(-\frac{1}{2c}\right) + \cancel{u''_{tx}\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{u''_{xt}\left(-\frac{1}{2c}\right)} + u''_{xx}\cdot\frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4c^2}u''_{tt} + \frac{1}{4}u''_{xx} = 0 \Longrightarrow$$

$$u = u^{(1)}(x,t) + u^{(2)}(x,t)$$

$$u^{(1)}(0,x) := u_0(x) \qquad u^{(1)\prime}(0,t) := 0$$

$$u^{(2)}(0,x) := 0 \qquad u^{(2)\prime}(0,t) := u_1(x)$$

$$u^{(1)} = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2}$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} u_1(s)\,ds - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} u_1(s)\,ds$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{U}'_{\xi}(\xi,\eta) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{U}'_{\xi}(\xi,\eta) = f(\xi)$$

$$\boxed{u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)} \longrightarrow \text{általános megoldás}$$

F, G tetsz. diffhatók

\+ kezdeti feltétel

$$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds} \longrightarrow \text{D'Alembert formula}$$

x(t)

$\boxed{\text{Hővezetés}}$:

$u(t,x)$

Végtelen hosszú rúd

az egyenlet levezetése: Cannon John

$$\boxed{u'_t = u''_{xx}}$$ HEAT equation

+ Kiindulási hőmérséklet

$$u(0,x) = f(x)$$

Feltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$

Megoldás: Fourier-módszer

Tfh $u(t,x) = F(t)\cdot G(x)$

Ha ez igaz:

$$F'G = F\cdot G''$$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = \lambda$$

ODE

$F' = \lambda F$ $\qquad$ $G'' = \lambda G$

(Fizikai megfontolás) $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda = -s^2}$ $\rightarrow$ miért? HF!

$$F'(t) = -s^2 F(t) \Rightarrow F(t) = e^{-s^2 t}$$

$$G''(x) = -s^2 G(t) \Rightarrow G(x) = e^{isx}$$

$\forall s \in \mathbb{R}$-ben s-edik megoldás

$$u_s(t,x) = e^{-s^2 t + ixs}$$

Ált megoldás $\exists$ ldue. kombinációval

Cél: $u(0,x) = f(x)$

$$s: \quad u_s(0,x) = e^{isx}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx}\, dx$$

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot u_s(t,x)\, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) \cdot e^{-ts^2 + isx}\, ds$$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-isy} dy$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) K(t,x,y)\, dy}$$

K magfüggvény

Spec eset:

$f(x) = \delta(x)$ Dirac delta, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$

Megold $\Rightarrow u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ (harang görbe)

I Gyakorlat anyaga:

2015 gyak 1/5

Adott $\underline{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Int. $\underline{\vec{n}}$ mentén majd tangens mentén.

tangens : $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$

$$\boxed{W = \int_\Gamma \langle \vec{F}(x,y), d\vec{l} \rangle} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(x(t), y(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt =$$

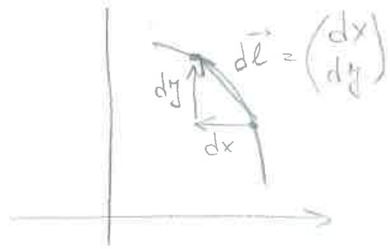
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} a^2\cos^2 t \\ b^2\sin^2 t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^3\cos^2 t \sin t + b^3 \sin^2 t \cos t\right) dt =$$

$$= +a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (\cos t)' dt + b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\sin t)' dt =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b^3}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \Bigg|_{\substack{\text{ha } b=1 \\ a=2}} = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

Apropó



$x = x(t)$

$dx = \dot{x}(t)\,dt$

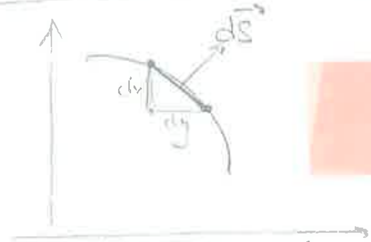
$dy = \dot{y}(t)\,dt$

$dl = \dot{\gamma}(t)\,dt$

normál szerint: (ezt inkább hagyjuk)

$$\dot{\gamma}(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} b\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix} \text{ és } \Phi = \int_\Gamma \langle F(x,y), d\vec{n} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)^{\perp}\,dt =$$

$$= a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt + b^2 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt = \ldots$$



$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$

$dS = \vec{n} \cdot dl$

$dS = \dfrac{\dot{\gamma}(t)^{\perp}}{\|\dot{\gamma}(t)^{\perp}\|} \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$

$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$\|\dot{\gamma}(t)^{\perp}\| = \sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}$

$W' = -\int_\Gamma \langle F(x,y), d\vec{r} \rangle$ mekkora erőt kifejtek, hogy egy valamit F erőtérben A-ból B-be vigyem Γ úton

2016 aval IV gyak I

2015 gyak 1 / 6

Γ $O \longrightarrow P(1,2,3)$

$$F(r) = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 z \\ 2x^3 y z \\ x^3 y^2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = tP$$

$$\int_\Gamma F(r)\,d\vec{l} = \int_0^1 \underbrace{F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}_{72t^5}\,dt = 12t^6\Big|_0^1 = 12$$

2015 gyak 1 / 7

(b) $F(r) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}(p) = \int_\Gamma \vec{F}(r)\,d\vec{l}$ $\qquad \Gamma = \{\gamma(t) = tp \mid t \in [0,1]\}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} tp_1 \\ tp_2 \\ tp_3 \end{pmatrix} = tp$$

$$\dot\gamma(t) = p$$

$$F(tp) = t^2 \begin{pmatrix} p_2 p_3 \\ p_1 p_3 \\ p_1 p_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}(p) = \int_0^1 F(tp)\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 \cdot 3p_1p_2p_3\,dt = p_1p_2p_3$$

Tehát ha meg akarjuk oldani:

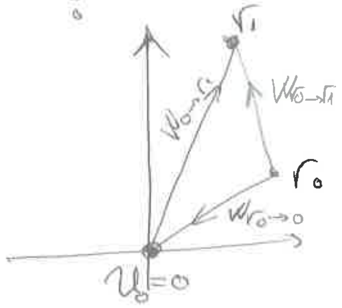
$\nabla \mathcal{U}(r) = F(r)$ akkor $\mathcal{U}(r) = \int_\Gamma F(r)\,dl$

tehát $F(r)$ potenciálja: $\mathcal{U}(r) = x_1 x_2 x_3$

Legyen $\Gamma = \{\gamma(t), t \in [0,1]\}$ egy út, $\gamma(0) = r_0$, $\gamma(1) = r_1$

$$W = \int_\Gamma F(r)\,dl = \int_0^1 F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \nabla \mathcal{U}(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \dot{\mathcal{U}}(\gamma(t))\,dt = \mathcal{U}(\gamma(t))\Big|_0^1 = \mathcal{U}(r_1) - \mathcal{U}(r_0)$$



A potenciál fv. minden pontban arányos egy test pot. energiájával (E_p) abban a pontban.

tudásbázis!!! gyak 1
2016

legyen $\Gamma = \{x \mid f(x) = 0\}$; $x \in \mathbb{R}^2$

legyen $x_0 \in \Gamma \Rightarrow f(x_0) = 0$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

a $f(x) = 0$ nem más mint egy szintvonal!

legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = c_0$

legyen ~~$f(x) \in$~~ tetszőleges sima $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\gamma(t) \in \{x \mid f(x) = c_0\}$

legyen $g(t) = f(\gamma(t)) = c_0$

$$\dot{g}(t) = [\nabla f]_{x=\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_0) \perp \dot{\gamma}(t)$$

---

legyen $\Gamma = \{x \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}$

A normáltér ténylegesen egy tér

Disztr. $\Delta = \mathrm{span}\langle \nabla g_1(x), \nabla g_2(x) \rangle$

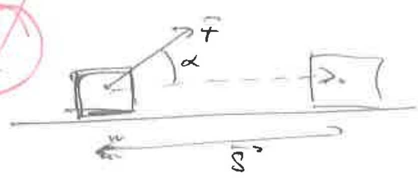
Anal 3
Gradiens $\perp$ [illegible]

Anal 3 Fizikai értelem

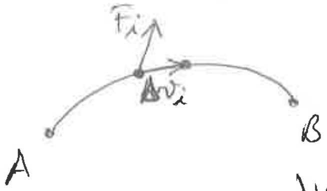
Munka tétel:

Vektormező érintő irányú VONAL $\int$-ja

1



$$W = |F| \cdot |s| \cos\alpha = \langle F, s \rangle$$



$$\Delta W_i = \langle F_i , \Delta v_i \rangle$$

$$W_{AB} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|\Delta\| \to 0}} \left(\sum_i \langle F_i , \Delta v_i \rangle \right) = \int_\Gamma \langle F, dv \rangle$$

tehát $W_{AB} = \int_\Gamma \langle F, dr \rangle$; $\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1] \\ \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B \end{array} \right\}$

Ez az a munka, amelyet F erőtér végez a testen

$-W_{AB}$ az a munka amelyet mi kell végeznünk, hogy legyőzzük F-erőteret

Pld: $F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ konzervatív mező

legyen tetszőleges $\Gamma = \{ \gamma(t),\ t \in [0,1],\ \gamma(0) = r_1 ;\ \gamma(1) = r_2 \}$

$$W = \int_\Gamma F(x,y) \cdot dr = \int_0^1 (1\ \ 2) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = (1\ \ 2)\ \gamma(t) \Big|_0^1 = (1\ \ 2)(r_2 - r_1)$$

konst

vagyis tetszőleges úton ugyanaz a munka

Green tétel : adott $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, határa sima ; $\partial D = C$ zárt

akkor: $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} d\vec{e}$$

(vonal integrál tengely mentén)

Következmények: legyen $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in [0,1] ; \gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R}^2 \}$ zárt

legyen $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Akkor a speciális Stokes tétel szerint:

$$\oint_{\partial D} f(x,y)\, d\vec{e} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dS$$

A Gauss tétel szerint:

$$\oint_{\partial D} f(x,y) \cdot \vec{n} \cdot dl = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)}_{\text{jelöljük: } div(f)} dS = \iint_D div(f)\, dS$$

Azért, mert: $$\oint_{\partial D} f(x,y)\, \vec{n}\, dl = \int_0^1 f(\gamma(t))\, \underbrace{\dot{\gamma}(t)^{\perp} dt}_{\vec{n}\, dl} =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -f_2(\gamma(t))\, \dot{x}(t)\, dt + f_1(\gamma(t))\, \dot{y}(t)\, dt =$$

$$= \oint_{\partial D} \underbrace{-f_2(x,y)}_{\text{„}P\text{"}} dx + \underbrace{f_1(x,y)}_{\text{„}Q\text{"}} dy \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) d(x,y)$$

Tehát: $$\oint_{\partial D} f(x,y)\, d\vec{e} \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dS \longleftarrow$$

Terület számítás: $f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\oint_{\partial D} f(x,y)\, \vec{n}\, dl = \oint_{\partial D} f_1(x,y)\, dy - f_2(x,y)\, dx \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D div(f)\, dS$$

$f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Anal 3
Green T.

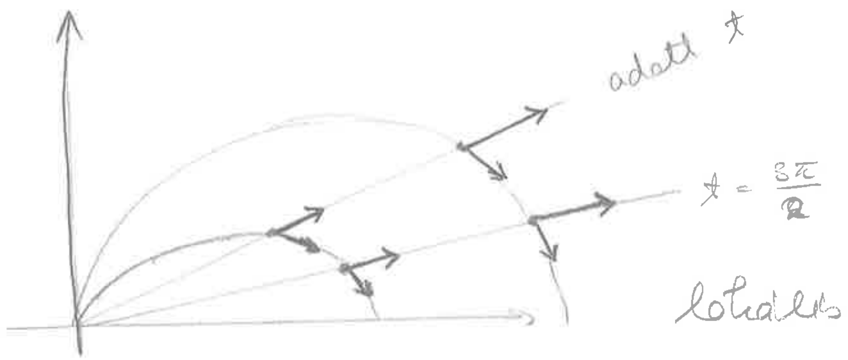
Cyclois koordináta rendszer

legyen $x = r(t - \sin t)$ $\qquad z_1 = x \quad z_2 = y$

$y = r(1 - \cos t)$ $\qquad z_{1'} = r \quad z_{2'} = t$

ekkor $\underline{z}_{i'} = \frac{\partial R}{\partial z^{i'}} = \begin{pmatrix} t - \sin t & r(1-\cos t) \\ 1 - \cos t & r \sin t \end{pmatrix}$

tehát $\underline{z}_{1'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{z}_{2'} = \dot{\gamma}_r(t)$ (érintő irányai egy adott r sugarú kör cikloisára)



lokális koordináta rendszerek

ekkor $[z_{1'}, z_{2'}] = 0$

vagyis $\frac{\partial z_{2'}}{\partial z} \cdot z_{1'} - \frac{\partial z_{1'}}{\partial z} z_{2'} = 0$

legyen $f = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ $\qquad g = \begin{pmatrix} r(1-\cos t) \\ r \sin t \end{pmatrix}$

ekkor $\begin{pmatrix} \dot{r}(\tau) \\ \dot{t}(\tau) \end{pmatrix} = f(r(\tau), t(\tau))$

illetve $\begin{pmatrix} \dot{r}(\tau) \\ \dot{t}(\tau) \end{pmatrix} = g(r(\tau), t(\tau))$

hogy is van ez?

megoldás görbéi fogják megadni a koordináta tengelyeket

Cikloris koord. rendszer. 2014

Analízis III. 1. heti feladatok
2017. szeptember 14.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

2. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$.
   (a) $DF(x, y) =?$
   (b) Milyen (x, y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?
   (c) Ha F invertálható $(0, 0)$-ban, legyen az inverze G. Mennyi $DG(0, 0)$?

3. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)^T$. Mi lesz a vektormezõ Jacobi mátrixa, $DF =?$

4. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$. $DG =?$

5. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) grad $(fg) = f \cdot$ grad $g + g \cdot$ grad f.
   (b) $D(fF) = F \cdot$ grad $f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén. Vektormező potenciálja.

6. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a, 0)$, végpontja $B(0, b)$. Írjuk fel pareméterezését.

7. Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.

8. Számítsuk ki az $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

9. Számítsuk ki az $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \mid t \in [0, 3]\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

10. Potenciálosak/e a fenti feladatban szereplő f, G, H vektromezők? Ha igen, írjuk fel egyik potenciálfüggvényüket. (Vajon egyértelmű-e a potenciálfüggvény? Miért?)

11. Egészítsük ki az alábbi állítást (többféle megoldás lehetséges):
    Állítás. *Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő tartomány. $F : S \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor F pontosan akkor potenciálos, ha ....*
    Ez alapján ellenőrizzük le az előző feladatok számolásait.

2017 ŐSZ.

A 2017 év úgy indult, hogy előbb volt gyakorlat mint előadás!

vekanal 0

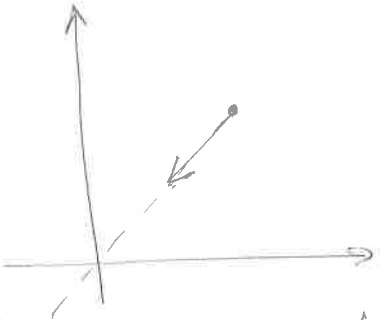
anal 3 -0- gyak 1

Anal 3 1. hét (gyakorlat)

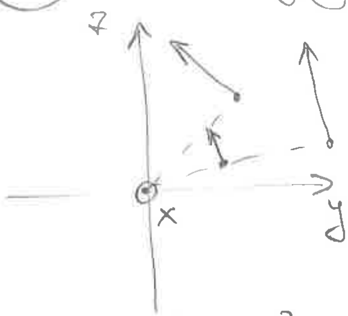
1) Írjuk fel $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típ. vektormezőt.

(a) $\forall\ \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pontból az origóba vezető út felét:

$$F(\underline{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$



(b) x tengely körüli (jobb sodrású) örvény konstans ω seb.

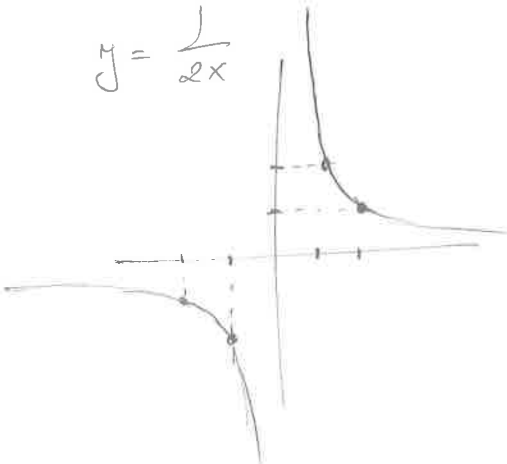


$$F(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

2) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$

a) $DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix}$

b) $\det(DF) = 4xy - 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ melyre $y = \frac{1}{2x}$



c) F inverze $= ?$ $(x,y) = (0,0)$-ban

$$\begin{cases} x^2 + y = \alpha \\ 2x + y^2 = \beta \end{cases}$$

$F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

F inverzének gradiense $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$-ban

skalárfüggvényekre: $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ azaz $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$$DG(z) = \left(\left[DF(x)\right]_{x = F^{-1}(z)}\right)^{-1} = DF(G(z))^{-1}$$

$$DG(0) = DF(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[illegible] 2017 ő.

Anal 3 —1— gyak 1

(2) Ugyirodatmodulitva

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-1 \\ 2x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$$

(a) $$DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4x & 2y \end{pmatrix}$$

(b) $$\det(DF) = 4xy - 4x = 4x(y-1) \neq 0$$

tehát ami nem jó, ha: $y-1 \neq 0$, $x \neq 0$

(c) $$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-1 \\ 2x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$$ inverze:

$$\begin{cases} x^2+y-1 = \alpha \\ 2x^2+y^2+1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \quad y^2-2y+2-1 = \beta-2\alpha$$

$$(y-1)^2 = \beta - 2\alpha \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\beta-2\alpha}+1$$

$\sqrt{\beta-2\alpha}$ értelmezett!

$$x^2+y-1 = \alpha$$

$$x^2 \pm \sqrt{\beta-2\alpha} = \alpha$$

$$x^2 = \mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha$$

$$x = \pm\sqrt{\mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha}$$

Tehát $$F^{-1}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha} \\ \pm\sqrt{\beta-2\alpha}+1 \end{pmatrix}$$

Mégis csak: $$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 2x+y^2 \end{pmatrix} \qquad F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix}$$

$$(0,0) \underset{F^{-1}=G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} (0,0)$$

tehát $G(0,0) = (0,0)$

ezért $$DG(\underline{0}) = DF(G(\underline{0}))^{-1} = DF(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y} \right)$

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

④ $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix}$ $\quad DG = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & z & y \\ \cancel{x}yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{pmatrix}$

⑤ a.) $\operatorname{grad}(fg) = f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f$

$$\operatorname{grad}(fg) = (f'_x g + f g'_x \quad f'_y g + g'_y f \quad f'_z g + g'_z f)$$
$$= (f'_x \quad f'_y \quad f'_z)\, g + (g'_x \quad g'_y \quad g'_z)\, f \quad ✓$$

b.) $D(fF) = F \cdot \operatorname{grad} f + \cancel{F}\, f \cdot DF$

$$f \cdot F = \begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix} \qquad D(fF) = \begin{pmatrix} f'_x F_1 + f F'_{1x} & & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$D(fF)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} fF_i = f'_{x_j} F_i + f F'_{i x_j}$$

Tenzorosan

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z^j} fF_i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z^j} F_i}_{\text{külső szorzat}} + \overset{\text{skalár}}{f}\, \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial z^j}}_{\text{mátrix}}}$$

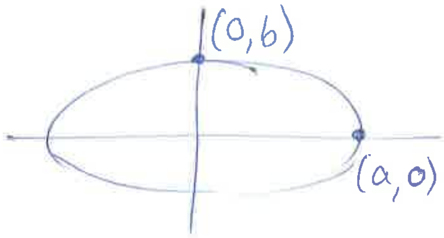
2017 V

Anal 3
-2- gyak

dekand ①

(6) origó kp-ú ellipszis $2a$, $2b$ tengelyekkel

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \qquad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi) \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{matrix}$$



(7) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ a fenti görbe mentén

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}(x,y), d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt$$

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 t \\ b^2 \sin^2 t \end{pmatrix} \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^3 \cos^2 t \sin t + b^3 \sin^2 t \cos t \right) dt$$

$$= -a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \, dt + b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \, dt$$

$$= + \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^2 t \, (\cos t)' \, dt + \frac{b^3}{3} \int 3 \sin^2 t \, (\sin t)' dt$$

$$= \frac{a^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b^3}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

(8) $G = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ ha $g = x^3y^2z$ akkor $\operatorname{grad} g = G$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0,1] \right\}$$

általában $\boxed{\gamma(t) = (B-A)t + A \quad t \in [0,1]}$

$$\int_\Gamma \langle \vec{G}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt =$$

$$= g(\gamma(t=1)) - g(\gamma(t=0)) = g(1) - g(0) = 12$$

$$\int_a^b \langle G(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt = \int_a^b \langle \operatorname{grad} g(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[g(\gamma(t))\right] dt = g(\gamma(t))\Big|_a^b$$

$$G(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 3t^2 \; 4t^2 \; 3t \\ 2t^3 \; 2t \; 3t \\ t^3 \; 4t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36t^5 \\ 12t^5 \\ 4t^5 \end{pmatrix}$$

$$G(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = (36 + 24 + 12)\, t^5 = 6 \cdot 12\, t^5 = (12 t^6)' \checkmark$$

9) $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ Γ vonal mentén

a) $\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t-5 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [0,3] \right\} \Rightarrow A = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \gamma(3) = (18, 4, 3)^T$

$\exists\, h = xyz \Rightarrow \int_\Gamma \langle H, dr\rangle = h(B) - h(A) = 18 \cdot 4 \cdot 3 - 0 = 216$

Potenciálfüggvény kiszámítása:

$V(r) = \int_\Gamma \langle H, dr\rangle$ ahol $\Gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0,1],\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = r \}$

10) potenciálfv-ek felírása

Egy vektormező integrálgörbéi:

$F(r) \Rightarrow \dot\gamma(t) = F(\gamma(t))$ diffegyenlet rendszer megoldásai

2017 IV.

Anal 3

vektoranal ① | -3- gyak

Analízis III. 1. heti feladatok, 2016. szeptember 16.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre

   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.

   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

2. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket: $\begin{cases} \mathrm{div}(F) = ? \\ \mathrm{rot}(F) = ? \end{cases}$

3. Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x,y,z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi „szorzat deriválási szabályok"-at:

   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

   (b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \mathrm{div}(F)$.

   (c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$.

   HF (d) $\mathrm{div}(F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}(F)\rangle - \langle F, \mathrm{rot}(G)\rangle$.

Ismételjük át a vonal $\int$-det + potenciált

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

5. Integráljuk az $F(x,y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.

6. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

7. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = (yz \;\; xz \;\; xy)^T$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.

   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \;:\; 0 \le t \le 3\}$.

   (b) Γ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

D1' Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\mathrm{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja: $G(x,y,z) = \int_0^1 t \, F(tx, ty, tz) \times (x \;\; y \;\; z)^T dt$. Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x,y,z) = (y \;\; z \;\; x)^T$ vektormező esetén.

D2' Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\mathrm{rot}(F) = \mathrm{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?

Heti 2. HF amiből min 11 6., ~~12~~ hét nagy ZH

esetleg plusz feladatok. 45 perc

2 × 15 perc kis ZH nagy ZH előtti héten ~~okt 18~~ okt 25 Dec 9.

Analízis III. 1. heti feladatok

kis ZH: okt 21 (előadás)

2015. szeptember 11.

kis ZH 2: dec 2 (9. → ...)

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre

   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.

   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

2. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) $\mathrm{div}(F) = ?$ $\qquad$ (b) $\mathrm{rot}(F) = ?$

3. Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:

   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

   (b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \mathrm{div}(F)$.

   (c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$.

   (d) $\mathrm{div}(F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}(F)\rangle - \langle F, \mathrm{rot}(G)\rangle$.

syms x y z real

f = sym('f(x,y,z)')

jacobian(f)

Szept 13

~~14~~ – ...

$\left(2 \overset{5+5}{\text{kisZH}} + 2 \overset{45+45}{\text{nagyZH}}\right) + \underbrace{\text{HF} - 11}_{\text{csak ha}}$ HF ≥ 11

– o –

2016 veleand 1

Anal 3 gyak 1

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

5. Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.

6. Számítsuk ki az $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

7. Számítsuk ki az $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.

   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \ : \ 0 \leq t \leq 3\}$.

   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

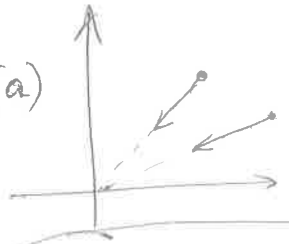
D1* Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\operatorname{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja:

$$G(x, y, z) = \int_0^1 t \; F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt.$$

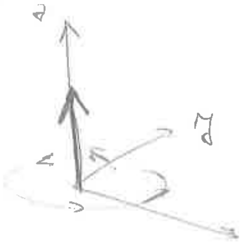
Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?

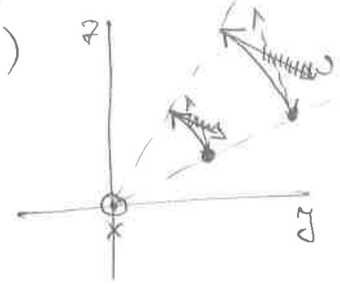
(1)

(a) 

$$F = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) 

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div} F = 0$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

(3) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix}$ $\quad \operatorname{div} F = 2xy + z + 2xyz$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + xz^2 \\ -yz^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

(4) a) $\nabla(fg) = \frac{\partial fg}{\partial x} + \frac{\partial fg}{\partial y} + \frac{\partial fg}{\partial z} =$

$= \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial y} + f \frac{\partial g}{\partial z} =$

$= \nabla f \cdot g + f \nabla g$

b) $\operatorname{div}(fF) = \frac{\partial fF_1}{\partial x} + \frac{\partial fF_2}{\partial y} + \frac{\partial fF_3}{\partial z} =$

$= F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} + f\left(F'_{1\,x} + F'_{2\,y} + F'_{3\,z}\right)$

$= \langle F, \nabla f \rangle + f \nabla F$

2016

Anal 3
grupa 1

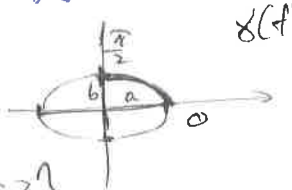
(c) $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (fF_3)'_y - (fF_2)'_z \\ (fF_1)'_z - (fF_3)'_x \\ (fF_2)'_x - (fF_1)'_z \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} f'_y F_3 - f'_z F_2 \\ f'_z F_1 - f'_x F_3 \\ f'_x F_2 - f'_z F_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} F'_{3y} - F'_{2z} \\ F'_{1z} - F'_{3x} \\ F'_{2x} - F'_{1z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f(\nabla \times \vec{F}) = \nabla f \times \vec{F} + f(\nabla \times \vec{F})$$ ✓

(d) HF

(*) előbb ezt + potenciálos gyorsan.



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$

(5) $F(x,y) = (x^2 \;\; y^2)$

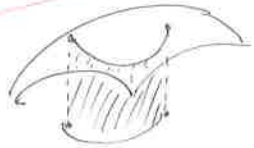
$\Gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$

$$I = \int_\Gamma F(x,y)\, d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(a^3 \cos^2 t\, (\cos t)'\, dt + b^3 \sin^2 t\, (\sin t)'\, dt \right) =$$

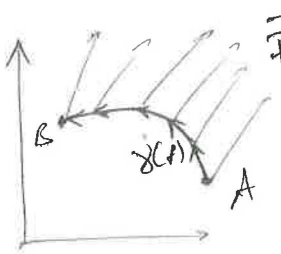
$$= a^3 \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + b^3 \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -a^3 \frac{1}{3} + b^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$



(6) skalár: $I = \int_\Gamma f(x,y,z)\, dl = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$

vektor: $W = \int_\Gamma F(x,y,z)\, d\vec{l} = \int_a^b F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$



(6) $F(x,y,z) = \left(3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2\right)$

$\Gamma: A \longrightarrow B$ akkor $\gamma(t) = t(B-A)+A$; $t \in [0,1] \Rightarrow \gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$

$\Gamma: O \longrightarrow P(1\ 2\ 3) \Rightarrow \gamma(t) = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\dot\gamma(t) = P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$W = \int_\Gamma F\, d\vec{l} = \int_0^1 F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(3t^2\cdot 4t^2\cdot 3t,\ 2t^2\cdot 2t\cdot 3t,\ t^3\cdot 4t^2\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 36t^5 + 24t^5 + 12t^5\, dt =$$

$$= 72\int_0^1 t^5\, dt = \frac{72}{6} t^6\Big|_0^1 = 12$$

(7) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$; $\Gamma = \left\{\gamma(t) = \begin{pmatrix}2t^2\\3t-5\\t\end{pmatrix} : 0 \le t \le 3\right\}$; $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}4t\\3\\1\end{pmatrix}$

$$W = \int_\Gamma F(x,y,z)\, d\vec{l} = \int_0^3 F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^3 \left(\cancel{F}(3t-5)t,\ 2t^3,\ 2t^2(3t-5)\right)\begin{pmatrix}4t\\3\\1\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^3 \left(12t^3 - 20t^2 + 6t^3 + 6t^3 - 10t^2\right) dt =$$

$$= \int_0^3 \left(24t^3 - 30t^2\right) dt = 6t^4\Big|_0^3 - 10t^3\Big|_0^3 =$$

$$= 6\cdot 81 - 10\cdot 27 = 486 - 270 = \underline{216}$$

$\gamma(0) = \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$

$\gamma(3) = \begin{pmatrix}18\\4\\3\end{pmatrix}$

$\bar\gamma(t) = t\begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18t\\9t-5\\3t\end{pmatrix}$

$\dot{\bar\gamma}(t) = \begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix}$

a megoldás jó

$$W = \int_\Gamma F\, d\vec{l} = \int_0^3 F\begin{pmatrix}18t\\9t-5\\3t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix} dt = 216!!!$$

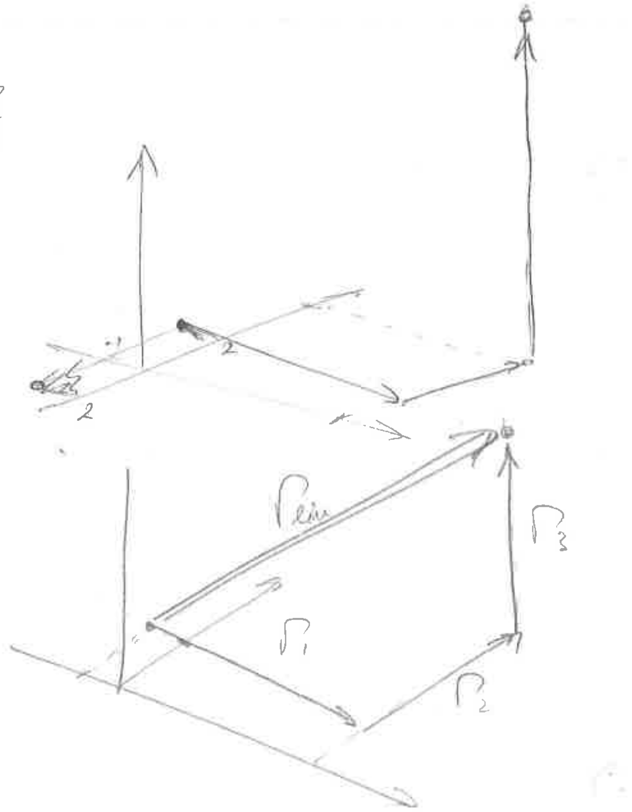
2016 vehand 1

mal 3 gyak 1

(7) folyt Potenciálos-e?

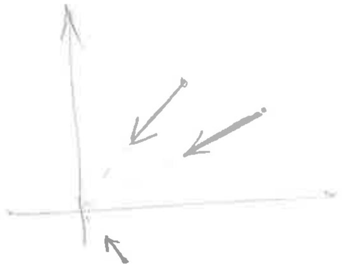
$\nabla \times F = 0$! $\Rightarrow \exists f$ u.h. $F = \nabla f$

$$\int_{\Gamma} F\, d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} F\, d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} F\, d\vec{l} + \int_{\Gamma_3} F\, d\vec{l}$$



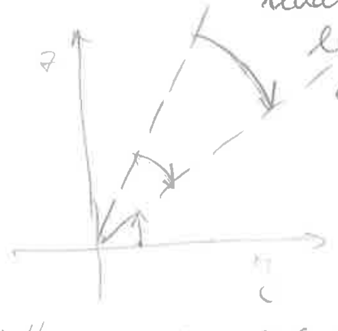
① $\mathbb{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad F(x,y,z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}$

(a)



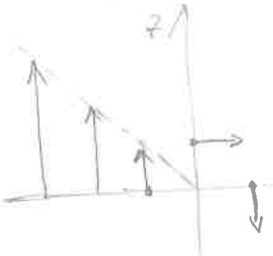
$$\|F\| = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}} = \underbrace{\frac{1}{2}r}$$ ✓

(b)



tehát a vektor hossza lineárisan nő az origótól vett távolság függvényében (az yz tengelyen)

jobbsodrású: $F(x,y,z)=\begin{pmatrix}0\\z\\-y\end{pmatrix}$; $\|F\|=r_{yz}$



$(0,1,0)\mapsto(0\ 0\ -1)$

$(0,0,1)\mapsto(0\ 1\ 0)$

$(0,-1,0)\mapsto(0\ 0\ 1)$

$(0,-2,0)\mapsto(0\ 0\ 2)$

---

② $F(x,y,z)=\left(\frac{y}{z},\frac{z}{x},\frac{x}{y}\right)$

$$\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

tehát ez egy vektorpotenciálos

$$\nabla\times F = \begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{y}{z}\\\frac{z}{x}\\\frac{x}{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\\-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{y}\\-\frac{z}{x^2}-\frac{1}{z}\end{pmatrix}$$ ✓

Matlabbal ellenőrizve

③ $F(x,y,z)=(x^2y,\ yz,\ xyz^2)$

$$\nabla F = 2xy + z + 2xyz$$

$$\nabla\times F = \begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x^2y\\yz\\xyz^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xz^2-y\\0-yz^2\\0-x^2\end{pmatrix}$$ ✓

Matlabbal ellenőrizve

Divergencia geometriai jelentése: ahol + ott a vektorok „divergálnak" ahol ott „fogyatkozik az anyag", ahol negatív ott konvergálnak: ott sűrűsödik az anyag.

Mégérthetőbben: ahol negatív ott van egy nyelő ahova elfolyik, ahol pozitív: ott van egy forrás ahonnan folyik. VÍZ

└ a víz nem összenyomható nem tud sűrűsödni

A levegő esetén ahol + ott vagy van egy forrás, vagy ott „hígul" az anyag, ahol − ott vagy van egy nyelő, vagy sűrűsödik a levegő

pld: hanghullám

Vonal menti integrálok:

① $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b]\}$

$$\int_\Gamma f(r)\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

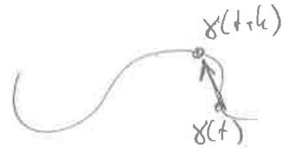
mivel:

$r := \gamma(t)$

$$dr = \dot\gamma(t)\,dt \Rightarrow \begin{cases} dx = \dot\gamma(t)_1\,dt \\ dz = \dot\gamma(t)_3\,dt \end{cases}$$

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

$$\dot\gamma(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}$$



vagyis $\dot\gamma(t)$ ÉRINTŐ irányú γ-ra

② $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b]\}$

$$\int_\Gamma F(r)\,d\vec{l} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\,dt$$

~~F erőtérben~~

F erőtér egy anyagi pont által végzett munkája míg a Γ görbén végigmegy!

$W = \langle \vec{F}, \Delta\vec{l} \rangle$

2016

Anal 3 gyak 1

(4) Igazoljuk a szorzatderiválási szab.

(a) $\nabla fg = \frac{\partial}{\partial r} fg = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot g + f \frac{\partial g}{\partial r}$

ahol $r = (x \; y \; z)^T$

(b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \mathrm{grad} f \rangle + f \cdot \mathrm{div} F$

$$b.o. = \frac{\partial fF_1}{\partial x} + \frac{\partial fF_2}{\partial y} + \frac{\partial fF_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) =$$

$$= \langle \mathrm{grad} f, F \rangle + f \, \mathrm{div}(F)$$

(c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$ HF

$$\mathrm{rot}(fF) = \begin{pmatrix} \frac{\partial fF_3}{\partial y} - \frac{\partial fF_2}{\partial z} \\ \frac{\partial fF_1}{\partial z} - \frac{\partial fF_3}{\partial x} \\ \frac{\partial fF_2}{\partial x} - \frac{\partial fF_1}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} F_2 - f \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$$

~~Vonalmenti $\int f(r) dl$~~

~~$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\Gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b] \}$~~

~~$\int_\Gamma f(r) \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\| \, dt$~~

(5) $F(x,y) = (x^2 \; y^2)^T$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \; \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\int_\Gamma F(x,y) \, d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t)) \, \dot\gamma(t) \, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} -a^2 \cos^2 t \cdot a \sin t + b^2 \sin^2 t \cos t \, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^2 t (\cos t)' \, dt + \int_0^{\pi/2} b^3 \sin^2 t (\sin t)' \, dt$$

$$= a^3 \frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + b^3 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a^3 \frac{1}{3} + \frac{b^3}{3} = \boxed{\frac{b^3 - a^3}{3}} \checkmark$$

Matlabbal ellenőrizve

(6) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma: O \mapsto P$

$\gamma(t) = O + t(P - O)$; $t \in [0,1]$

$\gamma(t) = tP = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P$

$$\int_\Gamma F(r) \, d\vec{l} = \int_0^1 F(\gamma(t)) \, \dot\gamma(t) \, dt =$$

$$= \int_0^1 (9 \cdot 4t^5 + 8 \cdot 3 \cdot t^5 + 3 \cdot 4t^5) \, dt =$$

$$= (36 + 24 + 12) \int_0^1 t^5 \, dt = \frac{72}{6} t^6 \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{72}{6} = 12 \checkmark$$

Matlabbal ellenőrizve

-5-

hnd 3 gyak 1

2016 vektoranal 1

(7) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ potenciálos-e?

$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \cancel{x} - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \vec{0}$ tehát skalárpotenciálos

$\Downarrow$

$\exists f = \int_\Gamma F\, d\vec{l}$ ahol „Γ" tetszőleges"

legyen origóban 0 a potenciál

$f(A) = \int_0^A F\, d\vec{l}$ tetszőleges út!

pld: $A = (x,y,z) \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$ $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$f(A) = \int_0^1 F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$

$= 3\int_0^1 t^2 xyz\, dt = 3xyz \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = xyz.$

csúnya levezetés

TODO

Tipikus potenciálok:

Gravitációs mező potenciálja:

$V_G = +gz \Rightarrow \underline{G = -\nabla V_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

m tömegű test potenciális energiája: $E_{pot} = m \cdot V_G \Leftarrow$

m-re ható erő:

$\vec{F}_m = m \cdot \vec{G}$

Elektromos potenciál egy ponttöltés körül:

$V_E = k_e \frac{Q}{r}$, ha Q az origóban van

$= k_e \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k_e Q (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$

$E = -\nabla V_E = +\frac{1}{2} k_e Q (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$= k_e \frac{Q}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$

q töltés potenciális energiája: $E_{pot} = q V_E$

q-ra ható erő

$\vec{F}_q = q\vec{E}$ (Coulomb's law)

Analízis III. 2. heti feladatok
2017. szeptember 22.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \begin{pmatrix} y/z \\ z/x \\ x/y \end{pmatrix}$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) $\operatorname{div}(F) = ?$ (b) $\operatorname{rot}(F) = ?$

2. $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\left(|\underline{r}|^5\right)\right) = ?$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:

   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

   (b) $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$.

   HF1 (c) $\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \operatorname{rot}(F)$.

   (d) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F)\rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G)\rangle$.

4. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciálos) az alábbi vektormező:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$

   Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

5. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:

$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in [a,b].$$

   Mi lesz egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x,y)\mathrm{d}l = ?$

6. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2+3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.

$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\}.$$

HF2 7. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

8. Legyen $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

   (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.

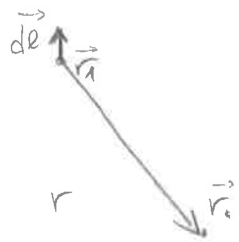
   (b) Mennyi lesz $\int_C \langle F, \mathrm{d}l\rangle$ maximális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.

D1* Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ függvények gradiense ugyanaz egy $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő tartományban. Igazoljuk, hogy ekkor $\exists c$ konstans, melyre $f(x,y,z) = g(x,y,z) + c$ ebben a D tartományban.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?

Biot-Savart törvény, mágneses tér

$$B(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3}$$



Anal 3 gyak 2 2017 II

(1) $F = \begin{pmatrix} \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$

$\operatorname{div} F = 0$

$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{z} \\ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \end{pmatrix}$

elmondani a vektoriális szorzat dolgait

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \cancel{xb - ya} \begin{pmatrix} cy - bz \\ az - cx \\ bx - ay \end{pmatrix}$

(2) $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}$

$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}$

$\nabla f = \frac{5}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{+\frac{3}{2}} \cdot (2x \;\; 2y \;\; 2z)^T$

$= 5 (x^2+y^2+z^2)^{+\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tehát $\operatorname{grad} f = 5 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\frac{\partial (\operatorname{grad} f)_x}{\partial x} = \frac{5 \cdot 3}{2} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x + 5 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$

$= 15\, r\, x^2 + 5 r^3$

$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 15\, r (x^2+y^2+z^2) + 15 r^3 = 30 r^3$

Matlab:

```
syms x y z real
r=[x;y;z];
f=(x^2+y^2+z^2)^(5/2);
gradf = gradient(f,r)
divgradf = divergence(gradf,r)
```

Matlabban szimbolikusan be van bizonyítva

(3) (a) volt múlt órán

(b) $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \cancel{\operatorname{grad}} f\rangle + f \cdot \operatorname{div} F$

$$\nabla(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \nabla F$$

$$\langle \nabla, fF\rangle = \langle F, \nabla f\rangle + \langle \nabla, F\rangle \cdot f$$

$$fF = \begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla(fF) = f'_x F_1 + f'_y F_2 + f'_z F_3 + f F'_{1x} + f F'_{2y} + f F'_{3z} = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \nabla F$$

(c) $$\nabla \times (fF) = \begin{pmatrix} (fF_3)'_y - (fF_2)'_z \\ (fF_1)'_z - (fF_3)'_x \\ (fF_2)'_x - (fF_1)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_y F_3 - f'_z F_2 \\ f'_z F_1 - f'_x F_3 \\ f'_x F_2 - f'_y F_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} F'_{3y} - F'_{2z} \\ F'_{1z} - F'_{3x} \\ F'_{2x} - F'_{1y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f \cdot \nabla \times F$$

(d) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot} F\rangle - \langle F, \operatorname{rot} G\rangle$

$$F \times G = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 G_3 - F_3 G_2 \\ F_3 G_1 - F_1 G_3 \\ F_1 G_2 - F_2 G_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = F'_{2x} G_3 - F'_{3x} G_2 + F_2 G'_{3x} - F_3 G'_{2x} + \ldots$$

(4) $a, b = ?$ u.h. $F = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}$ skalárpot

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} bxz + 2y - 2xz - ay \\ 2yz - byz \\ z^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{I } 2yz = 0 \to y = 0$$

tehát $\begin{cases} (b-2)xz + (2-a)y = 0 \\ (2-b)yz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 2 \end{matrix}$

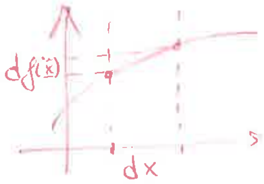
(5) legyen $C: \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ $t \in [a,b]$

$$\int_C f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{1+\varphi'(t)} \, dt$$

$$\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\varphi'(t)} \, dt$$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = \varphi' dt \end{array}$$

$$d f(x) = f'(x) \, dx$$



$$d f(x,y) = f'_x(x,y)\, dx + f'_y(x,y)\, dy = \langle \text{grad } f, dl \rangle$$

(6) $f = x^2 + 3y$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Gamma = \left\{ \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \; t \in [0,1] \right\} = \left\{ \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0.5t \\ t \end{pmatrix}, \; t \in [0,2] \right\}$$

$$\int_\Gamma f \, dl = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \sqrt{1+2^2} \, dt = \int_0^1 (t^2 + 6t)\sqrt{5} \, dt = (*)$$

$$= \int_0^2 f(\gamma_2(t)) \sqrt{1.25} \, dt = \int_0^2 (0.25t^2 + 3t)\sqrt{1.25} = (**)$$

$$(*) = \left(\frac{t^3}{3} + 3t^2 \right)\Big|_0^1 \sqrt{5} = \left(\frac{1}{3} + 3 \right)\sqrt{5}$$

$$(**) = \left(\frac{0.25}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 \right)\Big|_0^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1}{3} + 3 \right)\sqrt{5}$$

(7) leggyen HF

(8) $f = \sin x \cos y \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $F = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}$

b) leggyen A és B pont $\Rightarrow$ $C: \{ \gamma(t) \mid t \in [a,b] \quad \gamma(a) = A, \ \gamma(b) = B \}$

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle = \int_a^b \langle \operatorname{grad} f, \dot\gamma(t) \rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt =$$

$$= f(B) - f(A)$$

$f_{min} = -1$ pld ha $(x,y) =$

$$\operatorname{grad} f = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = 0 \\ -\sin x \sin y = 0 \end{cases}$$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k_1 \pi$

$\sin y = 0 \Rightarrow y = k_2 \pi$

$f_{extr.} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k_1\pi\right) \cdot \cos(k_2 \pi)$ → -1 pld ha $k_1 = 0$, $k_2 = 1$; → $+1$ pld ha $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

tehát $\max\limits_{C \subset \mathbb{R}^2} \int_C \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle = 2$

pld $C = \left\{ \gamma(t) = (B - A)t + A \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Analízis III. 2. heti feladatok
2016. szeptember 23.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. „*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x, y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1, 2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0, 1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0, 2]\}.$$
2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0, 0)$ és $(1, 1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x, y) = (x, y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

(*)

Felületi integrál. Fluxus.

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u, v)) \ : \ (u, v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + t_u'^2(u, v) + t_v'^2(u, v)}d(u, v).$$

(+1)

(+2)

4. ✓ Legyen $s : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u, v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $f(x, y, z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \ \mathrm{d}S$ felületi integrált.
5. ✓ Legyen $s : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u, v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $F(x, y, z) := (y, x, z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \ \mathbf{dS}$ felületi integrált.
6. Határozzuk meg $F(x, y, z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb.

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x, y, z) = (y, x, z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

(1)

7. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradszkij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:
$$\iint_S f(x, y, z)n_3(x, y, z)\mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x, y, t(x, y))\mathrm{d}(x, y),$$
ahol S egy $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény felülete, $S = \{s(x, y) = (x, y, t(x, y)) \ : \ (x, y) \in D\}$.
8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x, y, z) = (x^2, y^2, 0)$.
9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és
$$(a) \quad F(x, y, z) = (0, 0, yz) \ (\mathbf{HF}) \qquad\qquad (b) \quad G(x, y, z) = (x^2, y^2, yz).$$

D3* Legyen $f(x, y, z) = \dfrac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy div $F = 0$.

(a) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

(b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

vekanal 1

(+2) Jegyzet 14. oldal 5. gyakorlat (+ kutatók) p17. Példa

2014b [anal 3 gyak 2

* Kiegészítés. $S = \{ s(u,v) : (u,v) \in D \}$

Felület felszíne : $f \equiv 1$ választással
skalármező felületi integrállal

$$A(S) = \iint_D \left| s'_u \times s'_v \right| \, d(u,v)$$

(+1)

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le \pi \end{matrix}$$

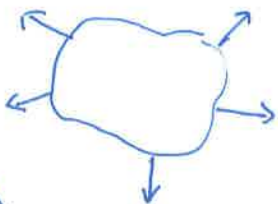
a) Milyen felület a térben?

b) Mennyi a felszíne

(**) Kiegészítés.

Kétdimenziós fluxust is lehet def-ni.

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima görbe. $F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$



Fluxus : $\displaystyle\int_\Gamma F \cdot \underline{n} \, ds$

$\underline{n}$: normálvektor, egységnyi hosszú

ha $\gamma = (\dot{x}, \dot{y})$ akkor erre $\perp$: $n_0 = (-\dot{y}, \dot{x})$

Analízis III. 2. heti feladatok
2016. szeptember 23.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. „*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\}.$$

2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai (0,0) és (1,1), körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Felületi integrál. Fluxus.

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \ : \ (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2(u,v) + {t'_v}^2(u,v)}\, d(u,v).$$

4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \ \mathrm{d}S$ felületi integrált.

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y, x, z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \ \mathbf{dS}$ felületi integrált.

6. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb.

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel.

7. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradszkij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z) \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y)) \mathrm{d}(x,y),$$
ahol S egy $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény felülete, $S = \{s(x,y) = (x, y, t(x,y)) \ : \ (x,y) \in D\}$.

8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

   (a) $F(x,y,z) = (0, 0, yz)$ **(HF)** (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy div $F = 0$.

a) Mennyi F fluxusa az origó közepű egységsugarú gömb felületére nézve?

b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

Anal 3 gyak 3 (2017 II)

① $f : D \to \mathbb{R}$ folyt. diff.

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v)$$

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \qquad s'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \qquad s'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} -f'_u \\ -f'_v \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow dS = \sqrt{f'^2_u + f'^2_v + 1} \, du\, dv$$

(+1) $$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad u \in [0,1] \quad v \in [0, 2\pi] \qquad v \in [0, 2\pi) \, !$$

a) ez egy kúp

b) $$\int_S dS = \int_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v)$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \cos^2 v + u \sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\| s'_u \times s'_v \| = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{2u^2} = u\sqrt{2}$$

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\sqrt{2} \, dv\, du = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u\, du \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2} \checkmark$$

Középiskolás módszerrel

$r = h \Rightarrow R = r\sqrt{2}$

$$A_R = \pi R^2 = 2\pi r^2 \leftarrow 2\pi R$$

$$A_S = \frac{2\pi r^2}{2\pi R} \cdot 2\pi r \leftarrow 2\pi r$$

$$= \frac{2\pi r^2}{2\pi r\sqrt{2}} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^2}{\sqrt{2}}$$

$A_R = \pi R^2$

$K_R = 2\pi R$

$K_r = 2\pi r$

$$A_S = A_R \cdot \frac{K_r}{K_R} = \pi R^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi R}$$

$$= \pi R r =$$

$$\stackrel{\text{?}}{=} \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

2017 anal 3 gyak 3. –1–

vek anal 2

Analízis III. 2. heti feladatok
2015. szeptember 18.

$\gamma_1 = (t, 2t)$

$f(x,y) = x^2 + 3y$? $\gamma_2 = (1/2, t)$

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": Th. Garrity könyv 89. oldal alján kezdődő példa.

2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Felületi integrál. Fluxus.

3. Határozzuk meg az egységgömb felszínét. (Paraméterezés az előadáson szerepelt.)

4. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \;:\; (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2(u,v) + {t'_v}^2(u,v)}d(u,v).$$

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x+y+z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \, \mathrm{d}S$ felületi integrált.

6. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y, x, z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \, \mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.

7. $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$. Határozzuk meg fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. (G-O tétellel!)

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

(a) $F(x,y,z) = (0,0,yz)$ **(HF)** (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

(a) $F = \nabla f = ?$ Igazolja, hogy $\operatorname{div} F = 0$.

(b) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

(c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

+ G-O t. bizonyításához $\boxed{\text{téma}}$

vekanal 2

2016 anal 3 gyak 2 feladatok

① $f(x,y) = x^2+3y$ $\qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

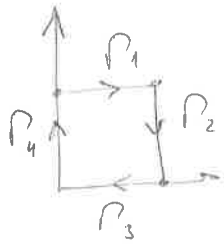
$\gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,2]$

$$W_1 = \int_{\Gamma_1} f(x,y)\,d\vec{l} = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_0^1 (t^2+6t)\sqrt{1+4}\,dt =$$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 (t^2+6t)\,dt = \sqrt{5}\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)_0^1 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$W_2 = \int_{\Gamma_2} f(x,y)\,dl = \int_0^2 f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4}+3t\right)\sqrt{\frac{1}{4}+1}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{t^3}{12}+\frac{3t^2}{2}\right)_0^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{1}\right) = \frac{10\sqrt{5}}{2}$$

② 

$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad$ kérdés: $\oint_\Gamma F(x,y)\,d\vec{l} =$

$\gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

$$= \sum_{k=1}^{4} \int_{\Gamma_k} F(x,y)\,d\vec{l}$$

$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

1: $\int_{\Gamma_1} F(x,y)\,d\vec{l} = \int_0^1 t\cdot 1\,dt = \frac{1}{2}$

2: $\int_0^1 (1-t)(-1)\,dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ tehát $\oint_\Gamma F(x,y)\,d\vec{l} = 0$

3: $\int_0^1 (1-t)(-1)\,dt = -\frac{1}{2}$

4: $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

~~Adott $S = \{(x, y, z(x,y)), (x,y) \in D\}$~~

~~felület, $\underline{n}(x,y,z)$~~ ~~$S \perp n \quad \forall (x,y,z)$-ban~~

Adott : $S = \{ s(x,y) = (x, y, z(x,y)), (x,y) \in D \}$

felület $\underline{n}(x,y,z)$, $\underline{n}(x,y,z) \perp s(x,y) \quad \forall (x,y,z) \in S$

Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Ekkor $\iint_S f(x,y,z)\, n_3(x,y,z)\, dS = \pm \iint_D f(x,y, z(x,y))\, d(x,y)$

Biz.

S normálvektora megegyezik az érintősík normálvektorával.

$\underline{n} \Rightarrow (z'_x, z'_y, -1)$

Normál vektora $f(x,y)$ felületnek (x_0, y_0) pontban:

$$-\underline{n} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

normálva:

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \begin{pmatrix} z'_x \\ z'_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

tehát $n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$(x - x_0) f'(x_0) = y - y_0$

$x f'(x_0) - y = x_0 f'(x_0) - y_0$

$\underline{n} \cdot (x,y) = \underline{n} \cdot (x_0, y_0)$

Érintő sík egyenlete:

$x f'_x(x_0,y_0) + y f'_y(x_0,y_0) - z = \underline{n}\, \underline{r_0}$

vekanal 2.

Anal 3 gyak 2

2016. 09. 23

(T) Gauss Osztrogradskij

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

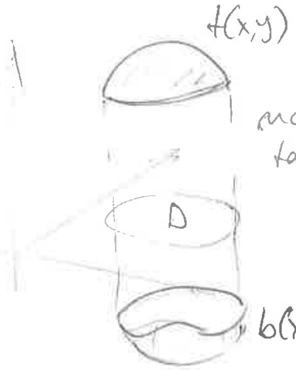
$$\iiint_M \nabla F(x,y,z)\, dV = \oiint_{\partial M} F\, d\vec{S}$$

Mérés technika

Tagonként igazoljuk:

$$\iiint_M \left(f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z}\right) dV = \oiint_{\partial M} \left(f_1 n_1 + \dots + f_3 n_3\right) dS$$

$$\iiint_M f'_{3z}\, dV \overset{?}{=} \oiint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS + \iint_{\partial M_{bottom}} f_3 n_3\, dS$$



$$\partial M_{top} = \left\{ s_t(x,y) = (x, y, t(x,y)) \mid (x,y) \in D \right\}$$

$$\partial M_{bot} = \left\{ s_b(x,y) = (x, y, b(x,y)) \mid (x,y) \in D \right\}$$

$$\iiint_M f'_{3z}\, dV = \iint_D \left(\int_{b(x,y)}^{t(x,y)} f'_{3z}\, dz \right) d(x,y) =$$

$$= \iint_D f_3 \Big|_{b(x,y)}^{t(x,y)} d(x,y) = \iint_D f_3(x,y,t(x,y)) - f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

$t(x,y)$ normálvektora (x,y)-ban: $\underline{n} = \begin{pmatrix} -t'_x \\ -t'_y \\ +1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{(t'_x)^2 + (t'_y)^2 + 1}}$

$$dS = \|t'_x \times t'_y\|\, d(x,y) = \sqrt{t'^2_x + t'^2_y + 1}$$

$$\oiint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS = \iint_D f_3(x,y,t(x,y)) \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{t'^2_x + t'^2_y + 1}}} \cdot \|t'_x \times t'_y\|\, d(x,y) =$$

$$= \iint_D f_3(x,y,t(x,y))\, d(x,y)$$

$$\oiint_{\partial M_b} f_3 n_3\, dS = -\iint_D f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

vekaud 2

Anal 3 gyak 2
2016.03.22.
Gauss-Osztrogradskij

4) $S(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix}$

↳ tömeg $\int \rho \, dV$
↳ töltés $\int \sigma \, dV$
↳ tehetetlenségi nyom. $\int r^2 \rho \, dV$

$f(x,y,z) = x+y+z$

$$\int_S f \, dS = \iint_D f(s(u,v)) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u,v) = \iint_D (u+\cancel{v}+u-\cancel{v}+u)\sqrt{6}\, d(u,v) =$$

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$= 3\sqrt{6} \int_0^1 u \, du \int_0^1 dv = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

C) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}$

∂M: origó köz. gömb $R=2$

$$\partial M = \left\{ s(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, (\theta,\varphi) \in \underbrace{[0,2\pi)\times[0,\pi]}_{D} \right\}$$

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F(x,y,z)\, dS = \iint_D F(s(\theta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) d(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ -R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - R^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

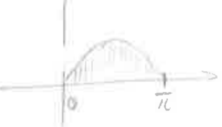
$$= \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ -R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = -R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\cos\theta \\ \sin^2\varphi\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

$$F(s)\cdot n = -R^3\sin^3\varphi\cos^2\theta - 2R^3\sin^3\varphi\sin^2\theta - 5R^3\cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$\Phi = -R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta - 2R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta + 5R^3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \cos^2\varphi (\cos\varphi)'\, d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi + \cos^2\varphi(\cos\varphi)'_\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\cos\varphi\Big|_0^\pi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 + \frac{\cos^3\pi - \cos 0}{3} = 1+1+\frac{-1-1}{3} = \frac{4}{3} \checkmark$$



$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi$$

rekonstr.

Ind 3
gyak 2.

(*)

$$\Phi = \left(-R^3\pi - 2R^3\pi\right)\cdot\frac{4}{3} + 5R^3\,\frac{-2}{3}\cdot 2\pi =$$

$$-3R^3\pi\,\frac{4}{3} - 5R^3\,\frac{2}{3} = -R^3\left(4\pi + \frac{20\pi}{3}\right) = -R^3\pi\left(4+\frac{20}{3}\right) = -8\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\oint\!\!\oint_{\partial M} F\,d\vec{S} = \iiint_M \nabla F\,dV = 8\underbrace{\iiint_M dV}_{\text{gömb térfogat}} = 8\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$$

Tehát csúnya megoldás:

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{\partial M} F\,d\vec{S} = \iint_D F(s(u,v))\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial v}\times\frac{\partial s}{\partial u}\right)}_{\text{csúnya}}\,d(u,v)$$ → elég általános Matlabbal ez implementálható

Szebb megoldás:

$$\Phi = \oint\!\!\oint_{\partial M} F\cdot \underline{n}\,dS = \oint\!\!\oint_{\partial M} F(x,y,z)\cdot\underline{n}(x,y,z)\,dS \underset{\text{polár koord}}{=} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \det(\Delta s)\,F(s)\,\underline{n}(s)\,d\varphi\,d\theta$$

$$dS = \underbrace{\left\|\frac{\partial s}{\partial u}\times\frac{\partial s}{\partial v}\right\|}_{\det(\text{Jacobi})} d(u,v)$$

rekand 2

lud 3 gyakr 2 feladatlap

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix} \qquad R \text{ sugarú gömb}$$

G-O

$$\boxed{\iiint_M \nabla F \, dV = \oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}$$

$$\nabla F = 8 \Rightarrow \iiint_M \nabla F dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\pi 8 r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta = 8\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$\cancel{= 2\pi \cdot \frac{8}{3} R^3 \cdot \pi = \frac{16}{3} R^3 \pi^2}$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi$$

$$= \boxed{\frac{32\pi}{3} R^3} \Bigg|_{R=2} = \frac{256\pi}{3} \checkmark$$

$$\oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iint_D (R\cos\theta\sin\varphi \quad 2R\sin\theta\sin\varphi \quad 5R\cos\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{R} \cdot R^2 \sin\varphi \, d(\varphi,\theta)$$

$$= R^3 \iint_D (\cos^2\theta \sin^2\varphi + 2\sin^2\theta \sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi) \sin\varphi \, d(\theta,\varphi)$$

$$= R^3 \iint_D (\cos^2\theta \sin^3\varphi + 2\sin^2\theta \sin^3\varphi + 5\cos^2\varphi \sin\varphi) \, d(\theta,\varphi)$$

$$R^3 \left(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \, d\theta} \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi + 2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi + 10\pi \cdot \frac{1}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^\pi \right)$$

$$= R^3 \left(\pi \int_0^\pi (\sin\varphi - \cos^2\varphi \sin\varphi) d\varphi + 2\pi \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi + 10\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right)$$

$$= R^3 \left(+ 3\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \right.$$

2017

vektoranal 2.

Anal 3 gyak. feladatok

(6) $F(s(u,v)) = \begin{pmatrix} R \sin v \cos u \\ 2R \sin v \sin u \\ 5R \cos v \end{pmatrix}$ $\qquad s(u,v) = \begin{pmatrix} R \sin v \cos u \\ R \sin v \sin u \\ R \cos v \end{pmatrix}$

$(u,v) \in [0,2\pi) \times [0,\pi]$

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F \, d\vec{S} = \iint_{D} F(s) \left(\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right) d(u,v) =$$

$$= -R^3 \iint_{D} \sin^3 v \cos^2 u + 2 \sin^3 v \sin^2 u$$

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F \underline{n} \, dS \; ; \quad n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F(x,y,z) \cdot \underline{n} \, dS = \oiint_{\partial M} (x^2 + 2y^2 + 5z^2) \frac{1}{R} dS =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2 v \cos^2 u + 2R^2 \sin^2 v \sin^2 u + 5R^2 \cos^2 v \right) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} \sin v \, du \, dv =$$

$$= R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos^2 u + 2 \sin^3 v \sin^2 u + 5 \cos^2 v \sin v \, du \, dv$$

2016

vekaud 2 | hol 3 ... feladatl...

(7) $$\iint_S f(x,y,z)\, n_3(x,y,z)\, dS = \pm \iint_\Delta f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$$

z-re merőleges vektormező:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} z_x' \\ z_y' \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}} \implies n_3 = \frac{-1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}}$$

$$dS = \left\| \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\| d(x,y) = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}$$

$$\underline{n}\, dS = \begin{pmatrix} z_x' \\ z_y' \\ -1 \end{pmatrix} d(x,y)$$

Vagy: ha $\underline{n} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{\left\| \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\|}$

akkor $\underline{n}\, dS = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} d(x,y)$

---

(8) $M: x^2+y^2=4$ $\quad F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$ $\quad x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z$ $\quad \Delta\ \Phi = r$

j.o. $$\iiint_M \nabla F\, dV = \iiint_M 2x+2y\, dV =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^4 2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta + \sin\theta\, d\theta}_{=0} \int_0^4 1\cdot dz \int_0^2 2r^2\, dr = 0$$

$$s(\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\| \cdot \| = r$

$\Downarrow$

$dS = r\, d(\theta, z)$

b.o. $$\oiint_M F\, \underline{n}\, dS = \iint_{palást} F\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dS = \iint_{palást} \frac{1}{r}(x^3+y^3)\, dS =$$

$$= \int_0^4\int_0^{2\pi} r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta\, d\theta\, dz = 4\cdot r^3 \int_0^{2\pi} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta = 4r^3\left(\sin\theta\Big|_0^{2\pi} - \sin \right.$$

Analízis III. 3. heti feladatok
2017. szeptember 28.

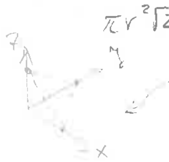
Felületi integrál. Felület felszínének kiszámítása. Fluxus.

Megj. Egy $S = \{s(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ felület felszínét az $f(x,y,z) = 1$ függvény felületintegráljával lehet kiszámítani, azaz

$$A(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \|s'_u \times s'_v\| \, \mathrm{d}(u,v) \tag{1}$$

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$\boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2 + {t'_v}^2} \, \mathrm{d}(u,v).}$$

$\pi r^2 \sqrt{2}$ 2. Milyen felületet definiál az $S = \{(u,v) = (u\cos v, u \sin v, u) \mid u \in [0,1], v \in [0, 2\pi]\}$. Mennyi a felszíne? $S = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix}$



3. Legyen $F(x,y,z) = (1,0,0)$, és S az $x + y + z = 1$ síknak az a része, ami az első tér-nyolcadba esik. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \, \mathrm{d}S$ felületi integrált.

HF 5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u + v, u - v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.

6. M az origó középű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve. → Integrál $|s'_u \times s'_v|$ → $\langle F, n \rangle \, \mathrm{d}S$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

ha van idő a teljes bizonyítást

7. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, és n a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z) \, \mathrm{d}S = \iint_D f(x, y, t(x,y)) \sqrt{1 + {t'_x}^2 + {t'_y}^2} \, \mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z) \, \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y)) \, \mathrm{d}(x,y),$$

Matlab HF 8. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az integrálandó vektormező:
(a) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$ (b) $G(x,y,z) = (0, 0, yz)$ (c) $H(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

(a) $F = \nabla f = ?$ Igazolja, hogy $\operatorname{div} F = 0$.

(b) Mennyi F fluxusa az origó középű, egységsugarú gömb felületére nézve?

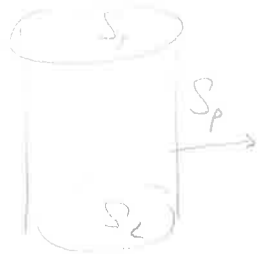
(c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

Megj. A fizikában is találunk ilyen függvényt: az origóba helyezett Q elektromos ponttöltés által keltett elektromos potenciál függvénye:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \text{ ahol } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

vektanal 2.

$$\iint_{S_p} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_p} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$$



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S_p = \left\{ S(\theta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}, \right.$$

$$\iint_{S_p} \left\langle \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle dS = \iint_{S_p} (x^3+y^3) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS$$

$$= \iint_D R^3 (\sin^3\theta + \cos^3\theta) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} \, d(\theta, z)$$

$$= R^3 \iint_D \sin^3\theta + \cos^3\theta \; d(\theta, z) = R^3 \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} \sin^3\theta + \cos^3\theta \, d\theta$$

$$\sin^3\theta = (1 - \cos^2\theta) \sin\theta$$

Anal 3 2017 II gyak 3

(1) $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány,
$f : D \to \mathbb{R}$ folyt. diffható függvény.
Igazoljuk, hogy ennek felszíne az ami.

$$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

$$A(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v) =$$

$$\| s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_u \\ -f'_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + {f'_u}^2 + {f'_v}^2} \, d(u,v) \checkmark$$

(2) $$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in [0,1] \quad v \in [0, 2\pi] \right\}$$

áll: ~~$s(u,v) =$~~ $u \in [0, R]$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ +u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\| s'_u \times s'_v \| = \sqrt{2u^2} = u\sqrt{2}$$

$$\iint_S dS = \iint_D u\sqrt{2} \, d(u,v) = \sqrt{2} \int_0^r u \, du \int_0^{2\pi} 1 \, dv = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 =$$
$$= \pi r^2 \sqrt{2}$$

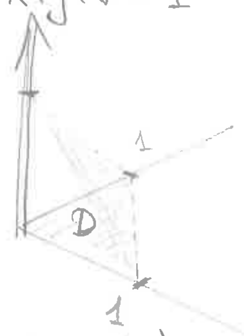
Ell:

$T_R = \pi R^2$

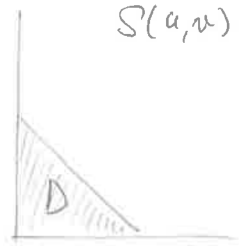
$$T_{R\triangle} = \pi R^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{\pi R r}{1} = \pi r^2 \sqrt{2}$$

$R = r\sqrt{2}$

③ $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad S: x+y+z=1 \qquad x,y,z \geq 0$



$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{pmatrix}$



legyen $\quad x = u$

$y = v$

$z = 1-u-v$

I. $\displaystyle\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D \langle \vec{F}(s(u,v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u,v) =$

$s'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\displaystyle = \iint_D 1 \, d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy \, dx = \int_0^1 (1-x) \, dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

④ $S = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in [0,1]^2$

$f = x+y+z$

$\displaystyle\iint_S f \, dS = \iint_D f(s) \, \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v) = \iint_D 3\sqrt{6}\, u \, d(u,v) =$

$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{norm}} \sqrt{6}$

$\displaystyle = \int_0^1 \int_0^1 3\sqrt{6}\, u \, du \, dv$

$= \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

$f(s) = 3u$

⑤ $s = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \qquad F(s) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ u \end{pmatrix}$

$\displaystyle\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D \langle F(s), \| s'_u \times s'_v \| \rangle \, d(u,v) =$

$\displaystyle = \int_0^1 \int_0^1 (2u - 2u) \, du \, dv = 0$

2017 $\underline{\text{II}}$

vekanal 2 | Anal 3 gyak 3

— 2 —

~~9~~ 8 $F = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}$ S : Origó középpontú 2 sugarú gömb.

$$s(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$s'_\theta \times s'_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ +R\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -R^2\cos\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\sin\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - R^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\|s'_\theta \times s'_\varphi\|^2 = R^4\cos^2\theta\sin^4\varphi$$
$$R^4\sin^2\theta\sin^4\varphi$$
$$R^4\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + R^4\cos^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2R^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$= R^4\sin^4\varphi + R^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = R^4\sin^2\varphi$$

$$\boxed{\|s'_\theta \times s'_\varphi\| = R^2\sin\varphi}$$

$$F(s) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ 2R\sin\theta\sin\varphi \\ 5R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

agy: $\langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \langle \vec{F}, \vec{n}\rangle\, dS = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\, dS =$

$$= x^2 + 2y^2 + 5z^2$$

Nincs megoldva.

2017 II

Anal 3 gyak 3

— 3 —

vehanal 2

9 - folyt. G-O tétellel

8

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 8 \cdot r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= 8 \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{8 \cdot 2\pi R^3}{3} \cdot (+1+1) = \frac{32\pi R^3}{3} \checkmark$$

$$\iiint 8 \, dV =$$

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \Rightarrow z^2 = R^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow z \in \left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, +\sqrt{R^2-x^2-y^2} \right)$$

⑥ 4 sugarú gömb felső fele $\Rightarrow$ $r \in [0, 4]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{R}$$

$$= \iint_S (2xy + z^2) \, dS$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \iint_D \left(2R^2 \cos\theta \sin^2\varphi \sin\theta + R^2\cos^2\varphi\right) \sin\varphi \, R^2 \, d(\varphi, \theta)$$

$$= R^3 \iint_D \left(2 \cos\theta \sin\theta \sin^3\varphi + R^2 \cos^2\varphi \sin\varphi\right) d(\theta, \varphi)$$

$$\frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} 2\cos 2\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \underbrace{\frac{R^3}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + \frac{2\pi R^3}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi R^3}{3}$$

eredetileg $-\frac{4\pi R^3}{3}$

Ha a teljes gömbön

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \frac{1}{R} \iint_D (2xy + z^2) R^2 \sin\varphi \, d(\theta, \varphi) =$$

$$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = (y \;\; x \;\; z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}(2xy + z^2)$$

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d(\theta, \varphi)$$

$$= R \iint_D \left(2R^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\varphi\right) \cdot \sin\varphi \, d(\vartheta, \varphi)$$

$$= R^3 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \left[\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi R^3}{3}$$

2017 II

Anal 3 gyak 3

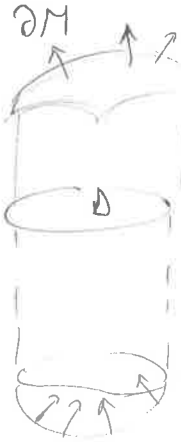
vektanal 2

Gauss tétel bizonyítása

Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ normáltartomány x, y, z szerint is.

$$J = \oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = \underbrace{\oiint_{\partial M} \left(F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3 \right) dS}_{\text{skalár fv. felületmenti integrálja}}$$

$$J_3 = \oiint_{\partial M} F_3 n_3 \, dS = \overbrace{\iint_{\text{palást}} F_3 n_3 \, dS}^{=0} + \iint_{\text{alsó}} F_3 n_3 \, dS + \iint_{\text{felső}} F_3 n_3 \, dS = \circledast$$



$\varphi_2(x,y)$

$(x,y) \in D$

$\varphi_1(x,y)$

$$S_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S'_{2x} \times S'_{2y} = \begin{pmatrix} -S'_{2x} \\ -S'_{2y} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}(x,y,\varphi_2)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow S'_{1x} \times S'_{1y} = \begin{pmatrix} -S'_{1x} \\ -S'_{1y} \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{n}(x,y,\varphi_1)$$

azonban $\vec{n}(x,y,z)$ KIFELÉ ~~mutat~~ kell
~~orientálni~~, ezért n_3-at megfelelő előjellel
venni

$$\circledast = \iint_D F_3(x,y,\varphi_2) \, d(x,y) - \iint_D F_3(x,y,\varphi_1) \, d(x,y)$$

Másik oldal:

$$\iiint_M \nabla F \, dV = \iiint_M F'_{1x} + F'_{2y} + F'_{3z} \, dV = J$$

$$J_3 = \iiint_M F'_{3z} \, dV = \iint_D \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F'_{3z} \, dz \, d(x,y) =$$

$$= \iint_D F_3(x,y,\varphi_2) - F_3(x,y,\varphi_1) \, d(x,y) = \circledast$$

7) Igazoljuk, hogy $\iint\limits_S \mu_3 f \, dS = \pm \iint\limits_D f(x,y,z(x,y)) \, d(x,y)$

ahol $s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$

$$s'_x \times s'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

tehát $\mu_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$

Ezért

$$\iint\limits_S f \mu_3 \, dS = \iint\limits_D f \underbrace{\mu_3 \cdot \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}_{=1} \, d(x,y) = \iint\limits_D f \, d(x,y)$$

Gauss tétel bizonyítás:

$$\oint\limits_S \langle F, dS \rangle = \int\limits_V \nabla F \, dV \Rightarrow \oint \langle F, \mu \rangle \, dS = \int\limits_V \nabla F \, dV$$

$$\oint F_1 \mu_1 + F_2 \mu_2 + F_3 \mu_3 \, dS = \int\limits_V F'_{1x} + F'_{2y} + F'_{3z} \, dV$$

$$\left.\oint F_3 \mu_3 \, dS = \int\limits_{D_z} F_3(x,y,z) \, d(x,y) - \int\limits_D F_3(x,y,b) \, d(x,y) \right\} \text{"="}$$

$$\int\limits_V F'_{3z} \, dV = \int\limits_D \int\limits_b F'_{3z} \, dz \, d(x,y)$$

vektoranal 2

2017 I

anal 3 gyak 3.

G-O biz.

(9) $M: \; x^2+y^2=4 \quad z\in[0,4]$ $\qquad F=\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad S=\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$

$$\int_V \nabla F \, dV = \int_V (2x+2y)\, d(x,y,z) = \int_V 2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta \; d(r,\theta,z) =$$

$$= 2\int_0^4 dz \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta+\sin\theta)\, d\theta = 8\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(\sin\theta-\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Másik oldal:

$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_S \langle F, n\rangle\, dS = \int_S (x^3+y^3)\cdot\frac{1}{R}\, dS =$$

$$= R^3\int_\Delta (\cos^3\theta+\sin^3\theta)\, d(\theta,z) = 0$$

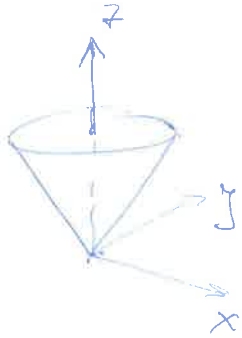
2017 II

Anal 3 gyak 3.

~8

Vektanal 2

(F2) $\iint\limits_S \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = ?$ ha $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$



$S = \partial \{ (x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \}$

vagyis S a kúp felszíne!

G-O: $\mathcal{I} = \oiint\limits_S \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iiint\limits_{kúp} \nabla \vec{F} \, dV$

$\nabla \vec{F} = 1$

tehát $\mathcal{I}$ = kúp térfogata $= \left. \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3} \right|_{\substack{R=1 \\ h=1}} = \dfrac{\pi}{3}$

integrállal:

$$\mathcal{I} = \iiint\limits_{kúp} 1 \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1 \, dz \, dy \, dx$$

vagy alternatíve hengerkoordinátákra:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} rz \Big|_r^1 \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 (r - r^2) \, dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = 2\pi \left. \frac{3r^2 - 2r^3}{6} \right|_0^1 =$$

$$= \left. \frac{\pi r^2 (3 - 2r)}{3} \right|_0^1 = \frac{\pi}{3} \quad \checkmark$$

2017b

Anal 3
Gyakorlat

$\boxed{\text{Matlab kérdés}}$

lekérdezte, hogy a 2015-öst nyomtatták volna ki?

Analízis III. 3. heti feladatok

201[illegible] szeptember 25.

1. *(Ismétlés) Az S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x, y, t(x, y)) \; : \; (x, y) \in D\}$, és **n** a felület normálvektora. Igazoljuk, hogy ekkor*
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+(t'_x)^2+(t'_y)^2}\, d(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)dS = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))d(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.

2. „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az $x+y+z=0$ sík és a $x^2+y^2 \le 1$ henger metszete és $F(x,y,z) = (y,z,x)$.

HF „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az egységgömb $x \ge 0$ része, és $G(x,y,z) = (y,z,x)$.

3. Igazoljuk a Stokes tétel alapján, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos vektormező, akkor $\forall C$ zárt görbén
$$\oint_C F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$

4. Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai (0,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,0,1). Legyen továbbá $F(x,y,z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.

5. Legyen M az $x^2+y^2=4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0,h]$ (h egy paraméter), a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapra $\underline{n}$ felfelé mutat. $F(x,y,z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re

 közvetlenül, két felületi integrál összegeként

 Stokes tétellel

Szépen kijött

$\int_{S_1} = 0$

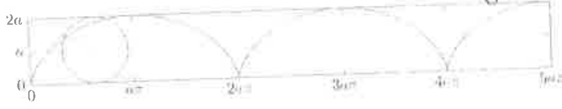
$S_{S_2} = 2\pi R^2$

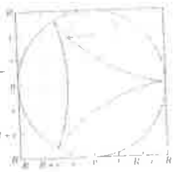
A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

6. (Green tétel alkalmazás) Határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet. (A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \sin(t))$ cos t, $t \in [0, 2\pi]$.)

7. (HF) A Green tétel segítségével számolja ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése:
$$x(t) = (R-r)\cos(t) + r\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \quad \xrightarrow[R=3a,\ r=a]{\text{deltoid esetén}} \quad x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$$
$$y(t) = (R-r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \qquad\qquad y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ezeket az ábrákat elő gyártani





1. ábra. A cikloid és a deltoid

8. Legyen $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C F(\underline{r})\, d\underline{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.

Center of mass:

$$\iiint_{M} \rho(\underline{r})(\underline{r}-\underline{R})\,dV = 0 \qquad \underline{R} \text{ a COM}$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{1}{m} \iiint_{M} \rho(\underline{r})\,\underline{r}\,dV \qquad m\text{: total mass of } M$$

F1* Szorgalmi vektoranal 15. feladat

Analízis III. 4. heti feladatok
2017. október 5.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel. (Ismétlés)

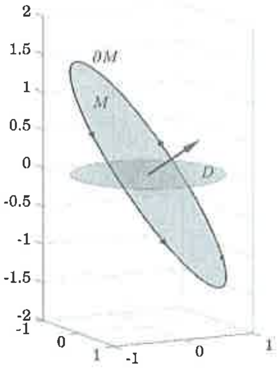
1 Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete $S = \{(x, y, t(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora Igazoltuk hogy ekkor

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+{t'_x}^2+{t'_y}^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát

$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \pm\iint_D f(x,y,t(x,y))\,\mathrm{d}(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.



$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ 2 Igazoljuk a Stokes tételt ha $F(x, y, z) = (y, z, x)$ továbbá M és az $x + y + z = 0$ sík és a $x^2 + y^2 \leq 1$ henger metszete ∂M a határa egy ellipszis (lásd ábra)

3 Igazoljuk a *Stokes tétel alapján* hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos akkor $\forall C$ zárt görbén

banális $\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$

egyszerűbb: $\iint_D \nabla \times F\, dA$ 4 Legyen $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ Határozzuk meg

$$F(x,y,z) = (x+y+z, 3x+2y+4z, 5x-3y+z)$$

cirkulációját D határa mentén

5 Legyen M az téglalap a térben melynek csúcspontjai $(0,0,0)$ $(1,1,0)$ $(1,1,1)$ $(0,0,1)$ Legyen továbbá $F(x, y, z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben

HF { 6 Legyen M az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalástnak azon darabja ahol $z \in [0, h]$ a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott) Az irányítást úgy választhatjuk hogy a felső körlapon $\boldsymbol{n}$ felfelé mutat $F(x, y, z) = (-y, x, x^2)$ Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re
(a) közvetlenül két felületi integrál összegeként (b) Stokes tétellel

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

$\oint_{\partial M} y\,dx$ 7 A Green tétel segítségével határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet
A cikloid paraméterezése $x(t) = a(t - \sin(t))$ $y(t) = a(1 - \cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

8 A Green tétel segítségével számoljuk ki egy deltoid területét A deltoid paraméterezése
$x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$, $y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

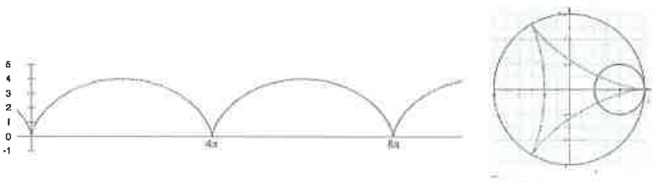


Figure 1 A cikloid és a deltoid

banális

9 $F(x, y) = (-y^3, x^3)$ Igazoljuk hogy $\oint_C F(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén

D4* A klasszikus Stokes tétel alapján bizonyítsuk be a Green tételt

Green T: $\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D -P'_y + Q'_x \, d(x,y)$

$$B(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Γ : egységkör xy síkban trigonometrikus irányban J erősségű áram folyik.

hat meg $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ pontban a mágneses indukció vektort.

$$\boxed{L = T - V}$$

↳ potenciális energia $\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$

pld: $V = mg(z - z_0)$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Tehát, ha a test egy konzervatív erőtérben van, akkor V ezen erőtér potenciálja!

~~Tehát $L = T + V$~~

G–O: $\iiint_M \nabla \underline{F}\, dV = \oiint_{\partial M} \underline{F}\, d\underline{S}$

Green T:

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow v^{\perp} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\iint_D \nabla F\, d(x,y) = \oint_{\partial D} \underline{F} \cdot \underbrace{\underline{n}\, dl}_{\dot\gamma(t)^{\perp} dt} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{F}, \dot\gamma(t)^{\perp} \rangle\, dt$$

$$\iint_D F'_x + F'_y\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \dot\gamma_2(t) - F_2 \dot\gamma_1(t)\, dt$$

$$\iint_D F'_{1x} + F'_{2y}\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} F_1\, dy - F_2\, dx$$

ha $\left.\begin{matrix} F_1 = Q \\ F_2 = -P \end{matrix}\right\}$ $\iint_D Q'_x - P'_y\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_\Gamma \binom{P}{Q} dl$

Analízis 3, 3. gyakorlat

Elmélet:

Adott egy F konzervatív erőtér

f a potenciálja: $F = \operatorname{grad} f$

Ekkor $\int_\Gamma F\,d\underline{l} = f(B) - f(A)$

$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a,b],\ \gamma(a) = A,\ \gamma(b) = B\}$

$\partial\Gamma = \{A, B\}$

Newton–Leibniz formula

adott egy F vektorpotenciálos áramlás

pl. víz áramlása (a víz összenyomhatatlan)

legyen G a vektorpotenciálja: $[F]: \frac{m}{s}$

$F = \operatorname{rot} G$

Ekkor: $\Phi = \iint_S F\,d\underline{S} = \oint_{\partial S} G\,d\underline{l}$ $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

Stokes-tétel

Numerikus integrálást EMLÍTSD MEG

↳ Honlapon DEMÓK

① Ismétlés: Igazoljuk a G-O-ban leírtat.

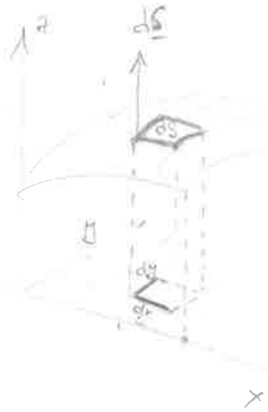
Van $S = \{s = (x, y, z(x,y)),\ (x,y) \in D\}$; $\underline{r} := (x,y,z)$

$n(\underline{r}) \perp s(\underline{r})\ \forall \underline{r} \in S$

$\|n(\underline{r})\| = 1$ norm. egys.

Továbbá adott egy tetszőleges $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Ekkor $\iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \pm \iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$



$$\left.\begin{array}{l} n(\underline{r}) \perp s(\underline{r}) \\ \|n(\underline{r})\| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n(\underline{r}) = \pm \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}}$$

$$n_3(\underline{r}) = \mp \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$$

$$\iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\, n_3(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, d(x,y)$$

skalár

$$= \mp \iint_D f(x,y,z(x,y)) \frac{1}{\cancel{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}\, d(x,y) = \mp \iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$$

2016b

vektoranal 3

Vektoranal Stokes

Anal 3 gyak. 3

2016.09.30

(5)*Ha még nincs érettségi bizonyítványa, és pótló vagy javító érettségi vizsgára jelentkezik, a törzslapkivonat(ok)on található, egyéb vizsgatárgyakból elért eredményeit is tüntesse fel!*
(6)*OKTV/SZÉTV helyezés alapján; külföldi elismert érettségi alapján; mentesség a magyar nyelv és irodalom vizsgatárgy vizsgája alól azoknak, akiknek az állampolgársága nem magyar, vagy a középiskolai tanulmányai befejezését megelőző négy tanév közül legalább hármat nem a magyar köznevelési rendszerben végzett.*
(7)*Nem magyar vizsganyelvet csak a két tanítási nyelvű és a nemzetiségi oktatásban részt vevők választhatnak.* (8)*Idegen nyelv vizsgatárgynál, ha annak eredményét 2005-ben nyelvvizsga-bizonyítvány alapján kapta.*
A táblázatban felsorolt tárgyakból és az abban foglaltak szerint érettségi vizsgára jelentkezem. Az információs önrendelkezési jogról és az információszabadságról szóló 2011. évi CXII. törvény 5. § (1) bekezdése alapján, a jelentkezési lap aláírásával hozzájárulok ahhoz, hogy az OH és a vizsgaszervező kormányhivatalok az érettségi vizsgák során személyes adataimat kezeljék és a korábbi érettségi vizsgaeredményeimet megtekintsék. Büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a beírt adatok a valóságnak megfelelnek.

Dátum:........................ A vizsgázó aláírása:........................ A szülő (gondviselő) aláírása[9]:........................
[9]*(Csak akkor, ha a jelentkező nem nagykorú)*

Beküldendő: Budapest Főváros Kormányhivatala Építésügyi és Örökségvédelmi, Hatósági, Oktatási és Törvényességi Felügyeleti Főosztály, 1056 Budapest, Váci utca 62-64.
A hiánytalanul kitöltött és aláírt jelentkezési lapot - a kitöltési útmutatóban megjelölt csatolt dokumentumokkal együtt - személyesen, meghatalmazott útján, vagy postai úton tértivevényes küldeményben kell benyújtani a fenti címre.
Az aláírás, vagy bármelyik szükséges melléklet nélkül a jelentkezés érvénytelen!

(2)

M: „$x+y+z=0$ sík $\cap$ $x^2+y^2 \le 1$ henger"

$$S = \{ s(x,y) = (x, y, -x-y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ D = \oplus \}$$

$$\underline{n}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$b.o. = \iint_S \nabla \times F \, d\underline{S} = \oint_{\partial S} F \, d\underline{l} = j.o.$$

$$b.o.: \quad \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Algoritmus, ami mindig tuti:

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, d\underline{S} \rangle = \iint_D \left\langle \mathrm{rot}\, F(s(x,y)), \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\rangle d(x,y) =$$

$$= \iint_D (-1,-1,-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y) = -3 \iint_D d(x,y) = -3\pi$$

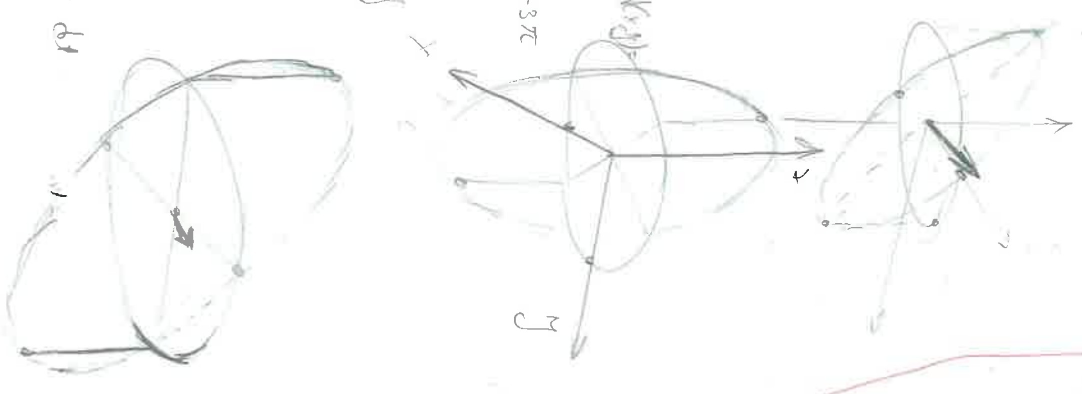
$$j.o.: \quad \partial S = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix},\ t \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$j.o. = \oint_{\partial S} \langle F, d\underline{l} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t - \sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t - \cancel{\sin t \cos t} + \cancel{\cos t \sin t} - \cos^2 t \, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{2+2\cos 2t}{2} \, dt = -\int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \, dt = -\frac{3}{2} \cdot 2\pi = -3\pi \checkmark$$



2016

(2) $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ $\quad S_1: x+y+z=0$ $\quad V_1: x^2+y^2 \le 1$ $\quad M = S_1 \cap V_1$

$S_1 \Rightarrow z = -x-y$

2017 Ugyanaz a feladat

$$M = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

$$= \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} r\in[0,1] \\ \vartheta\in[0,2\pi) \end{matrix} \right\}$$

ekkor $J_1 = \iint_M \langle \vec{F}_1, d\vec{S} \rangle = \iint_M \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$

ezt ugyanúgy írjam meg!

$s_r' \times s_\vartheta' =$ bonyolult.

Inkább

$$s_x' \times s_y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ez jó, de nem ez kell

$$J_1 = \iint_M \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_D \left\langle \vec{F}(x,y,-x-y), s_x'(x,y) \times s_y'(x,y) \right\rangle d(x,y)$$

$$= \iint_D (y, -x-y, x) \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} d(x,y) =$$

$$= \iint_D (xy - xy - y^2 - x^2 - xy) \, d(x,y) = -\iint_D (+x^2 + xy + y^2) \, d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 + r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta) \cdot r \, d\vartheta \, dr$$

$$= \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 + \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \left(2\pi + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2}$$

A második feladatban viszont $\iint_M \langle \operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S} \rangle$ kell

— folyt —

2017 b

Anal 3 gyak 4

(2) – folyt –

$$\iint_M \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$$

$$-\iint_D (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d(x,y) = -3\iint_D d(x,y) = -3\pi R^2\Big|_{R=1} = \boxed{-3\pi = \iint_M \langle \operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S}\rangle}$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\\ z\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Most számoljuk $\oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ figyeljünk az irányításra

ha $M = \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \middle| (r,\vartheta) \in [0,1]\times[0,2\pi) \right\}$

akkor $\partial M = \left\{ \gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta - \sin\vartheta \end{pmatrix} \middle| \vartheta \in [0,2\pi) \right\}$

$\cancel{\oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle} = \left\{ \gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \middle| (x,y) \in \partial D \text{ (körlap)} \right\}$

$$\oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \int_0^{2\pi} \left(\cancel{r}\sin\vartheta \quad -\cancel{r}\cos\vartheta - \cancel{r}\sin\vartheta \quad \cancel{r}\cos\vartheta \right) \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta - \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta - \cancel{\sin\vartheta\cos\vartheta} + \cancel{\sin\vartheta\cos\vartheta} - \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -1 - \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \cancel{-2\pi - \int_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} 1 + \cos}$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1 + \frac{1+\cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = -2\pi - \pi - \cancel{\int_0^{2\pi} \cos 2\vartheta \, d\vartheta} = -3\pi$$

2017b

vektanal3

Analízis 3 gyakorlat

(2) old. –2–

② Tisztázva: 2017

$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

$S_1: x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

$V_1: x^2+y^2 \le R^2$

$M = S_1 \cap V_1$

$$M = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in D \right\} \qquad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$$

(R sugarú körlap)

$$= \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; (r,\vartheta) \in [0,R]\times[0,2\pi) \right\}$$

$$\partial M = \left\{ \gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \partial D \right\}$$

R sugarú körlap.

$$= \left\{ \gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ -R\cos\vartheta - R\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0,2\pi) \right\}$$

$$b.o. = \iint_M \langle \operatorname{rot} F, ds \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = j.o.$$

$b.o.$: $s'_x \times s'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ezért $b.o. = -3 \iint_D d(x,y) = \underline{\underline{-3\pi R^2}}$

$\operatorname{rot} F = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$j.o.$: $\gamma'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta - R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$\left(\dfrac{d\gamma(x,y)}{dl} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ y-x \end{pmatrix} \right.$ körvonal menti derivált. $\Big)$

$F(\gamma(\vartheta)) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta \\ -R\cos\vartheta - R\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Ez így is helyes DE nem egyszerűbb

$\left(F(\gamma(x,y)) = \begin{pmatrix} y \\ -x-y \\ x \end{pmatrix} \right)$

$$j.o_1 = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\vartheta)), \gamma'(\vartheta) \rangle \, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} R^2 + R^2\cos^2\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= -2\pi R^2 - R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = -3\pi R^2$$

$$\left(j.o_2 = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = -\oint_{\partial D} y^2 + x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} + x^2 \, dl = -\int_0^{2\pi} R^2 + R^2\cos^2\vartheta \, d\vartheta = -3\pi R^3 \right)$$

② Tintén: 2016 M: „$x+y+z=0$" $\cap$ „$x^2+y^2 \le 1$"

$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ $\quad \text{rot}(F) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$S = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \right\}$$

$\Delta = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$

$$\partial S = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} ; t \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$\iint_S \text{rot}\, F \cdot d\underline{S} = \oint_{\partial S} F\, d\underline{l}$$

Én határozottan leírtam azon álláspont mellett, hogy $d\underline{S}$-t számoljuk és ne pedig $\underline{n}\, dS$-t. $d\underline{S} = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$, viszont ellenőrizni $d\underline{S}$ irányát!

Skalár függvény felület integráljánál pedig számoljuk $\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\|$-t

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_\Delta f(S(u,v)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

$$\iint_S \left\langle F(x,y,z), d\underline{S} \right\rangle = \pm \iint_\Delta \left\langle F(S(u,v)), \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\rangle d(u,v)$$

$\pm$ ebből ered: S paraméterezése!

Feladat folyt: b.o.: $$\iint_S \left\langle \text{rot}\, F, d\underline{S} \right\rangle = \iint_\Delta \left\langle \text{rot}\, F(s(x,y)), \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\rangle d(x,y) =$$

$$= \iint_\Delta \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) = -3 \iint_\Delta d(x,y) = -3 \cdot \text{terület}(\Delta) = -3\pi$$

j.o.: $$\oint_{\partial S} F\, d\underline{l} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t - \sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t - \cos^2 t \; dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t + 2\cos^2 t \; dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{2+\cos 2t}{2} \; dt = -\frac{3}{2} \cdot 2\pi = -3\pi$$

vektoranal 3

Vektoranal Stokes T

2016 b

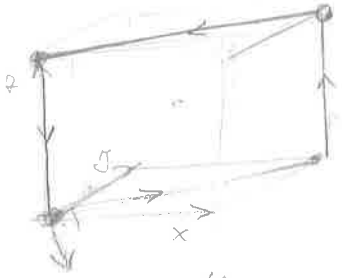
Anal 3 gyak 3 feladatlapok

(3) ha $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpot akkor $\forall$ C zárt: $\oint_C F(\underline{r})\,d\underline{r} = 0$

$$\oint_C F(\underline{r})\,d\underline{r} = \iint_S \langle \underbrace{\text{rot}\, F}_{=0}, d\underline{S} \rangle$$

$$F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix} \quad \nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 - x \\ y - z \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) 2016



$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix} \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,1] \qquad \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\oint_{\partial S} \langle \underline{F}, d\underline{l} \rangle = \iint_S \langle \text{rot}\, F, dS \rangle = \iint_D \left\langle \text{rot}\, F(S(u,v)), \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\rangle d(u,v) =$$

$$= \iint_D (-u, u - v, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 (-u - u + v)\, du\, dv = \int_0^1 -2u + \int_0^1 v\, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 -2u + \frac{1}{2}\, du = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Matlabbal ellenőrizve!
OKÉ!

Letisztázva:

$$F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix} \; ; \; \nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 - x \\ y - z \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix}, \; (u,v) \in [0,1] \times [0,1]$$

$$\iint_S \langle \text{rot}\, F, dS \rangle = \iint_S (-u, u - v, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(u,v) = \int_0^1 \int_0^1 -2u + v\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 \left[-u^2 + vu\right]_0^1 dv = \int_0^1 -1 + v\, dv = \left[-v + \frac{1}{2} v^2\right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

[illegible] oldal:

$$\int_1^0 \left\langle F(0,0,t), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

$$\int_0^1 \left\langle F(t,t,0), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

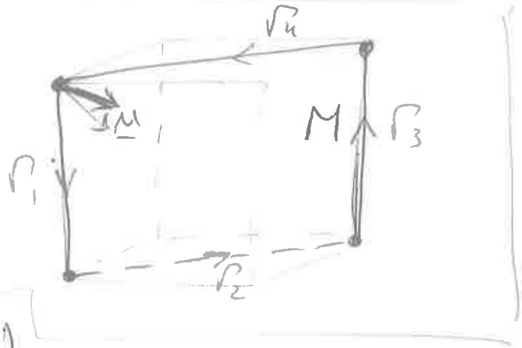
$$\int_0^1 \left\langle F(1,1,t), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^0 \left\langle F(t,1,1), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_1^0 2t\, dt = t^2 \Big|_1^0 = -1$$

$$\oint_\Gamma F\, dl = \sum = -\frac{1}{2}$$

(5) 2017

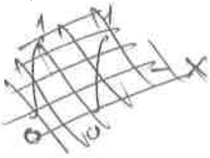
$$F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix} \qquad \nabla \times F = \begin{pmatrix} -x \\ y-z \\ z-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \iint_M \langle \nabla \times F, dS \rangle = (*)$$

$$M = \left\{ s(r,z) = \begin{pmatrix} r \\ r \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; (r,z) \in \underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{!=D} \right\}$$

$$s'_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(*) =$  $\displaystyle\iint_D \left\langle \nabla \times F \big|_{r=s(r,z)},\ s'_r \times s'_z \right\rangle d(r,z) =$

$$= \iint_D \begin{pmatrix} -r & r-z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(r,z) = \iint_D (-r - r + z)\, d(r,z) =$$

$$= -2\int_0^1 r\,dr \int_0^1 z\,dz = -\frac{1}{2}$$

$\Gamma_1 = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \middle| t \in [0,1] \right\} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0$

$\Gamma_2 = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| t \in [0,1] \right\} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$

$\Gamma_3 = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in [0,1] \right\} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} t & 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}$

$\Gamma_3 = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in [0,1] \right\} \quad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \int_0^1 (2t-2)\,dt = (t^2 - 2t)\Big|_0^1 = -1$

$$\Sigma = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = -\frac{1}{2}$$

2017b

Vekand 3

Anal 3 gyak 4

(5)

(4) $F = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x+2y+4z \\ 5x-3y+z \end{pmatrix}$ $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x^2+y^2 \le R^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; \begin{matrix} r\in[0,R] \\ \vartheta\in[0,2\pi] \end{matrix} \right\}$

$$\Gamma = \partial D = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma(\vartheta)} \middle| \; \vartheta\in[0,2\pi] \right\}$$

$$\oint_{\partial D} \langle F, d\ell\rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\vartheta)), \gamma'(\vartheta)\rangle \, d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\cos\vartheta+\sin\vartheta \quad 3\cos\vartheta+2\sin\vartheta \quad 5\cos\vartheta-3\sin\vartheta \right) \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(-\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\vartheta + 3\cos^2\vartheta + 2\sin\vartheta\cos\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta\cos\vartheta - 1 + 4\cos^2\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2\vartheta}_{0} - 1 + 2 + \underbrace{2\cos 2\vartheta}_{0} \right) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi R^2$$

$$\nabla\times F = \begin{pmatrix} -3-4 \\ 1-5 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{dS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r\, d(r,\vartheta)$$

$$\iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{dS}\rangle = \iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{n}\rangle \, dS = \iint_D (-7 \;\; -4 \;\; 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 2 \iint_D dS = 2\pi R^2$$

tehdit volóban $\boxed{\oint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{d\ell}\rangle = \iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{dS}\rangle}$

2017 b

vehanal 3 | hal 3 gyak 4 (4)

6

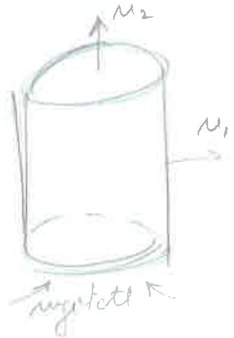
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2=4 \;,\; z \in [0,4] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \le 4 \right\}$$

$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\iint_M \langle \nabla \times F, dS \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta & 2\cos\vartheta & 4\cos^2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta \\ 2\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \cdot 4$$ általánosan $2\pi R^2$

(3) $x^2+y^2=4$ hengerpalást



legyen $F(x,y,z) = \begin{pmatrix}-y\\x\\x^2\end{pmatrix}$ vektorpotenciál függvény

legyen $G(x,y,z) = \text{rot}\,F = \begin{pmatrix}0\\-2x\\2\end{pmatrix}$ örvénylést leíró vektormező

Egyik oldal:

$$\iint_S \langle G(x,y,z), d\underline{S}\rangle = ?$$

ha $x=\frac{1}{2}$

$$S_1(u,v) = \begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\v\end{pmatrix} \quad (u,v)\in[0,2\pi)\times[0,h]$$

$$S_2(u,v) = \begin{pmatrix}u\\v\\h\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u}\times\frac{\partial S_1}{\partial v} = \begin{pmatrix}-R\sin u\\R\cos u\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\0\end{pmatrix}; \quad \frac{\partial S_2}{\partial u}\times\frac{\partial S_2}{\partial v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iint_{S_1}\langle G, d\underline{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^h (0,-2R\cos u, 2)\begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\0\end{pmatrix} dv\,du = \int_0^{2\pi}\int_0^h -2R^2\sin u\cos u\,dv\,du$$

$$= -hR^2\int_0^{2\pi}\sin 2u\,du = 0$$ Matlabbal ellenőrizze!

$$\iint_S\langle G, d\underline{S}\rangle = \iint_D (0,-2u,2)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} d(u,v) = 2\iint_D d(u,v) = 2\cdot\pi R^2 = 2\pi R^2$$

Másik oldal:

$$\int_\Gamma\langle G, d\underline{l}\rangle = ? \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix}R\cos(t)\\R\sin(t)\\0\end{pmatrix} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-R\sin t\\R\cos t\\0\end{pmatrix}$$

$$\oint_\Gamma\langle F, d\underline{l}\rangle = \int_0^{2\pi}\langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi}(-R\sin t, R\cos t, R^2\cos^2 t)\begin{pmatrix}-R\sin t\\R\cos t\\0\end{pmatrix}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\,dt = 2\pi R^2$$

HF számoljátok ezt le Matlab segítségével!

syms x y z real

F = [-y ; x ; x^2]

help subs, simplify

matlabFunction

F = @(x,y) [-y; x; x^2]

F(1,2) == [-2; 1, 1]

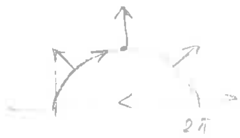
integral / integral2 / integral3

Vektoranal Stokes/Green

⑥ Cikloid ív alatti terület

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$$

$$T = \iint_D d(u,v) = \iint_D \operatorname{div}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) d(u,v)$$



$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Green T: $\iint_D F_{1x}' + F_{2y}' \, d(u,v) = \oint_{\partial D} \langle F, \underline{n} \rangle dl = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)^{\perp} \rangle dt +$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \left\langle F(t,0), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}(t-\sin t, 1-\cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} -t\sin t + \sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t \, dt =$$

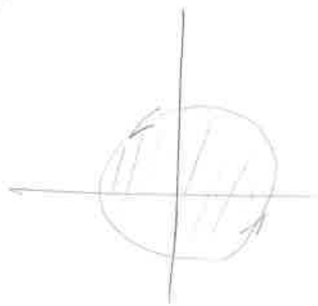
$$= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} 2 - t\sin t + \cancel{2\cos t} \, dt = 2a\pi + \int_0^{2\pi} t(\cos t)' \, dt = \frac{a}{2} t\cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + 2a\pi =$$

$$= 2a\pi + \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi) = 3a^2\pi$$

⑧ $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C \langle F, dl \rangle > 0 \ \forall$ pos irányítású görbe mentén

$$\oint_C \langle F, dl \rangle = \oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} d(x,y) =$$

$$= \iint_D 3x^2 + 3y^2 \, d(x,y) = 3 \underbrace{\iint_D x^2 + y^2 \, dx\,dy}_{\geq 0}$$



Green T: Legyen C egy + irányítanyítású...

$$\oint_C L\,dx + M\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) d(x,y)$$

Green tétel

DIV-tétel: $\oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = \iiint_M \nabla F \, d(x,y,z)$

$$\oint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dl = \iint_D \nabla F \, d(x,y)$$

vagyis $$\oint_{\partial D} F_1 n_1 + F_2 n_2 \, dl = \iint_D (F'_{1x} + F'_{2y}) \, d(x,y)$$

$$\vec{n} \, dl = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

$d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ $\vec{n} \, dl = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix}$

vagyis $$\boxed{\oint_{\partial D} +F_1 dy - F_2 dx = \iint_D F'_{1x} + F'_{2y} \, d(x,y)}$$

vagyis $$\boxed{\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \underbrace{-P'_y + Q'_x}_{\text{ha ez értéke } 1, \text{ akkor}} \, d(x,y)}$$ ← előjelhiba?

terület számítás

$\begin{pmatrix} -dy \\ dx \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} dy \\ -dx \end{pmatrix}$

I. $P = -y$, $Q = 0$ $\qquad -\oint_{\partial D} y \, dx = A(D)$

II. $P = 0$, $Q = x$ $\qquad \oint_{\partial D} x \, dy = A(D)$

III. $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$ $\qquad \frac{1}{2} \oint -y dx + x dy = A(D)$

ha $y \cdot \dot{x}$ egyszerűbb alakú, akkor I

ha $x \dot{y}$ akkor II

ha $x\dot{y} - y\dot{x}$ akkor III

2017b

Green T
Anal3 gyak 4

vektoranal 3

(7) Cikloid:

$$x = a(t - \sin t) \qquad \dot{x} = a(1 - \cos t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \qquad \dot{y} = a \sin t$$

$$x\dot{y} = a^2(t \sin t - \sin^2 t)$$
$$y\dot{x} = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) = a^2\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)$$

$$\oint_{\partial M} y\,dx = a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 3\pi a^2 = 3a^2\pi \quad \checkmark$$

(8) Deltoid:

$$x = 2a\cos t + a\cos 2t \qquad \dot{x} = -2a\sin t - 2a\sin 2t$$
$$y = 2a\sin t - a\sin 2t \qquad \dot{y} = 2a\cos t - 2a\cos 2t$$

$$x\dot{y} = 4a^2\cos^2 t + 2a^2\cos 2t\cos t - 4a^2\cos t\cos 2t - 2a^2\cos^2 2t$$
$$y\dot{x} = -4a^2\sin^2 t + 2a^2\sin 2t\sin t - 4a^2\sin t\cos 2t + 2a^2\sin^2 2t$$

$$\oint_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \iint_M -P'_y + Q'_x\,dx \qquad P = -\frac{1}{2}y \qquad Q = \frac{1}{2}x$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 4a^2 - 2a^2(\cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t) - 2a^2$$
$$= 2a^2(1 + \cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t)$$
$$\cancel{= 2a^2(1 + (2\cos^2 t + 1)\cos t - 2\sin^2 t\cos t)}$$
$$\cancel{= 2a^2(1 + 2\cos^3 t - \cos t - 2\sin^2 t\cos t)}$$
$$= 2a^2(1 + (1 - 2\sin^2 t)\cos t - 2\sin^2 t\cos t)$$
$$= 2a^2(1 + \cos t - 2\sin^2 t\cos t - 2\sin^2 t\cos t)$$

ezt az egészet felezni kell, mert $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$

$$J = 2a^2\int_0^{2\pi} 1 + \cos t - 4\sin^2 t(\sin t)'\,dt = 4a^2\pi - \int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}\sin^3 t\right)'dt = \underline{\underline{4a^2\pi}}$$

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}J = \underline{\underline{2a^2\pi}}$$

$$\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t = (1 - 2\sin^2 t)\cos t + 2\sin^2 t\cos t = \cos t$$

tehát $\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t = \cos t$

2017b

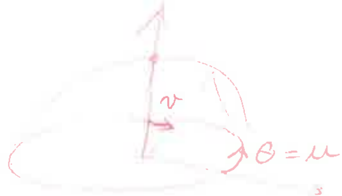
$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$$

vehand 3

Anal 3 gyak 4
Cikloid, Deltoid

2. heti Házi feladat (2016)

(HF) $S(u,v)=\begin{pmatrix}R\sin v\cos u\\ R\sin v\sin u\\ R\cos v\end{pmatrix}$



$(u,v)\in[0,2\pi)\times[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\partial S}{\partial u}\times\frac{\partial S}{\partial v} = -R^2\begin{pmatrix}\cos u(\sin v)^2\\ \sin u(\sin v)^2\\ (\sin v)^2\end{pmatrix} = -R(\sin v)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ befele mutat

$$dS = \frac{\partial S}{\partial v}\times\frac{\partial S}{\partial u} = +R(\sin v)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

GÖMBI POLÁR KOORDINÁTA

Felület integrál

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$dS = \|dS\| = |R(\sin v)|\,R = R^2\sin v$$ mivel $v\in[0,\pi]$ SŐT: MOST $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$F=\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$$

$$\iint_S\langle F,dS\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\langle F(S(u,v)),\left(\frac{\partial S}{\partial v}\times\frac{\partial S}{\partial u}\right)\right\rangle dv\,du =$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(R\sin u\sin v,\ R\cos u\sin v,\ R\cos v)\cdot\begin{pmatrix}R\cos u\sin v\\ R\sin u\sin v\\ R\cos v\end{pmatrix} R\cdot\sin v\,dv\,du$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} +R^3\sin v\cos^2 v + 2R^3\cos u\sin u\sin^3 v\,dv\,du =$$

$$= -R^3\int_0^{2\pi}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 v(\cos v)'\,dv + R^3\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin 2u\,du}_{=0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\,dv =$$

$$= 2\pi R^3\frac{\cos^3 v}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + R^3\underbrace{\frac{-\cos 2u}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\,dv$$

$$= -2\pi R^3\frac{1}{3}(0-1) = +2\pi\frac{R^3}{3}$$ Matlabbal ellenőrizve

vehand 3

hal 3 gyak 2 HF kódolás

2. heti házi feladat

(8) $M: x^2+y^2=4 \quad , z\in[0,4] \Rightarrow R=2$

S_1: $\underline{s}_1(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$ $\quad d\underline{S} = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$(u,v)\in[0,2\pi)\times[0,4]$ $\quad dS = R \; (=\|d\underline{S}\|)$

$\underline{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_{2,3}$: $s_2(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad s_3(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$

$d\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad d\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F \perp d\underline{S}$ $\quad S_{2,3}$ esetén $\Rightarrow \langle F, d\underline{S}\rangle = 0$

$$\oint\!\!\oint_{\partial M} \langle F, d\underline{S}\rangle = \iint_{S_{2,3}} \langle F, d\underline{S}\rangle + \iint_{S_1} \langle F, d\underline{S}\rangle =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 \left(R^2\cos^2 u,\ R^2\sin^2 u,\ 0\right)\begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix} dv\, du =$$

$$= R^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos^3 u + \sin^3 u)\, du}_{=0} \int_0^4 dv = 0$$

bal oldal

$$\iiint_M \nabla F\, dV = \iiint_M 2x+2y\, dV \overset{(*)}{=} 2 \int_0^4 dv \int_0^R r\,dr \underbrace{\int_0^{2\pi} (\cos u + \sin u)\, du}_{=0} = 0$$

Szelben: (áttérünk hengeres koordinátákra)

$$(*) = 2\int_0^4 dv \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} \cos u + \sin u\, du = 0$$

Jacobi mátrix det

(folyt)

vehand 3

Anal 3
gyak 2
HF a feladat

(folyt) - 2 heti hf. (8)

alsó körlap módosítja megadása:

$$S_2(u, r) = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\underline{S} = \frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} \Rightarrow dS = R$$

(3*) $f(r) = \frac{1}{r}$; $F = \operatorname{grad} f = -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\operatorname{div} F = (3x^2+3y^2+3z^2)\frac{1}{\|\underline{r}\|^5} - \frac{3}{\|\underline{r}\|^3} = 0 \quad \text{ha } \underline{r \neq 0}$$

$$\oint\!\!\!\oint_C \langle F, d\underline{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \left\langle F(S(u,v)), \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\rangle R^2 \sin v \, dv\, du =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{r^3}\cdot r^2 \cdot \frac{1}{R}\cdot R^2 \sin v \, dv\, du = -4\pi$$

$r = R = 1$ (az egységsugarú gömbön)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\underline{r}}{r^3}, \quad r \stackrel{\text{jel}}{=} \|\underline{r}\|$$

Maxwell I. egyenlete:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial M} \langle E, d\underline{S}\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

vektoranal 3 | Anal 3 gyak 2 D3* füzet

Analízis III. 4. heti feladatok
2015. október 2.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1. (*Részben ismétlés, órai anyag volt.*) Lássuk be, hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság.

   (a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel.

   (b) Igazoljuk ezek kompatibilitását. $\Phi_s^{-1}\ \phi_u \to$ diff.-ható

   (c) Mi lesz a görbe implicit megadása?

   (d) Írjuk fel a $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret.

(+1)

2. Igazoljuk, hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban

$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

két-dimenziós sokaság. A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével. Mi lesz a sokaság implicit megadása?. Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

a) b)

3. (HF) Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.

   Igazolja, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót. Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

4. (HF) Igazoljuk, hogy a valós projektív sík, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$, egy-dimenziós sokaság. (Ez a p.143. 9. feladat $n = 1$ esetben.)

5. Igazoljuk, hogy a valós projektív tér, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim$, két-dimenziós sokaság. (Ez a p.143. 9. feladat $n = 2$ esetben.) jegyzet 4. példa (2. fej.)

TAK 6. (p. 143. 8 feladat) Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság.

D6* Igazolja, hogy

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

három-dimenziós sokaság – a négydimenziós térben.

Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció!

Köd 3 8 egyd. DIFFGEOM

(+1) Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg, akkor mi lesz ennek parametrikus ill. implicit megadása?

$P \in \mathbb{R}^3$, $P \notin S$ $P = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz $T_p = ?$

$N_p = ?$

(Jegyzetben ✓)

$$\left(\begin{array}{c|c} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right) \quad \text{legyen} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$T = \left(\begin{array}{cc|ccc} v_1 & v_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & 0 \\ & & 1 & & \vdots \\ & & \vdots & & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} Te_1 = v_1 \\ Te_2 = v_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} e_1 = T^{-1} v_1 \\ e_2 = T^{-1} v_2 \end{array}$$

$$v_2 - \underbrace{\left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2 \right\rangle}_{pr} v_1$$

$$\sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{(\det A^T)(\det A)} = \det A$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\bar{A} = RA$$

$$\bar{A}^T \bar{A} = (RA)^T RA = (A^T \underbrace{R^T R}_{I} A) = A^T A$$

Analízis III. 5. heti feladatok
2014. október 13.

Ismétlés: Sokaság irányítása = "érintőterek irányítása". 135. oldal, 6.5.3. fejezet.

1. Igazoljuk, hogy a vektortér irányítását definiáló reláció valóban ekvivalencia-reláció.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke.

2. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|.$$

3. (Részben az órai anyag folytatása. A 113. oldalon Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, illetve az őket tartalmazó mátrix:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$

Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

4. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

5. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

6. (HF) Igazoljuk, hogy az 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus: ha $\tau, \omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\omega \wedge \tau = -\tau \wedge \omega$.

7. (HF) Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

8. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$ (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

9. Igazolja, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega = e^x \cos(y),$$
$$\omega = x dx + y dy,$$
$$\omega = xyz\ dx \wedge dz$$

$$(v_j) \xrightarrow{A} (w_j)$$

hol 3 8.gyak
Diffgeom.

$A = [v_1 \quad v_2]$

$\sqrt{\det(A^T A)} \; (-1)^{\varepsilon(\,)}$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{-y}{(x-2)^2} = \frac{-y}{(x-2)^2 + y^2}$$

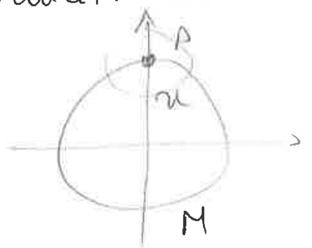
Állítás:

ha M: k dim. sokaság
akkor ∂M: $k-1$ dim. sokaság vagy $\emptyset$

és $\partial(\partial M) \equiv \emptyset$

— 8. hét —

Parameterezésre pld: egységkörlap:



$$\Phi(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$$

$$\Phi : \underbrace{(-\alpha, \beta)}_{V} \to \mathbb{R}^2 \quad 0 \leq \alpha, \beta < 1$$

$$\boxed{\Phi(V) = \mathcal{U} \cap M} \quad D\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}$$

Érintőtér:

Def $D\Phi$ oszlopvektorai $\equiv T_p$ tangenstér
k dim. sokaság $3/2$ éltér $\mathbb{R}^n$-ben

$$T_p = \{\lambda v ; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Pld 2. egységgömbfelület.
$P = (1, 0, 0)$

$$\Phi(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v) \Rightarrow D\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{\dots}} & -\frac{v}{\sqrt{}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$P = (1,0,0)$-ra:
$$T_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$T_N = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

T_p k dimenziós
N_p $n-k$ dimenziós

Általánosan: $T_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{\cdot}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{\cdot}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \cancel{\dots} \right\} \quad \forall (u,v) \in (-1,1)$

De oszlopvektoraik pontonként
kell kezelni

Differenciálgeo
8. hét — 1 —

Absztrakt sokaság

Nem feltétlenül: $M \subset \mathbb{R}^n$ → nincs távolság, nincs norma

Topológikus tér

Def: M n-dimenziós sokaság, ha

$$M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \qquad \mathcal{U}_\alpha \text{ nyílt halmazok}$$

$(\forall p \in M\text{-re } \exists \mathcal{U}_\alpha : p \in \mathcal{U}_\alpha)$

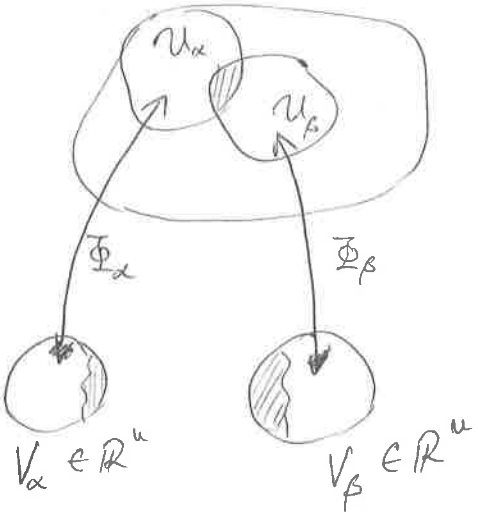
$\forall \mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists \Phi_\alpha$ ú.h. $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^n \to M$; $\Phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$

egy-egy értelmű

nyílt gömb $V_\alpha \in \mathbb{R}^n$

$\forall p \in \mathcal{U}_\alpha$

$\Phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^n$ lesz koordinátái



Ha $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$

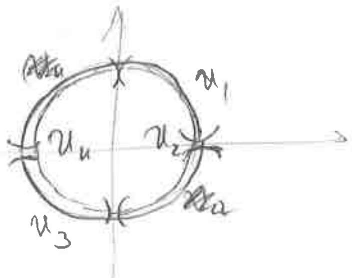
legyen $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{-1} \Phi_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ÉT: $\Phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$

$\Phi_{\alpha\beta}$ diffható, derivált teljes rangú

Def: $\{(\mathcal{U}_\alpha, \Phi_\alpha) ; \alpha \in I\}$ Ez egy atlasz

Pld



$\Phi_1 : \underbrace{(-1,1)}_{V_1} \to \mathcal{U}_1$

$\Phi_1(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$

egy-egy ért

$\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$;

$\Phi_2 : (-1,1) \to \mathcal{U}_2$

$\Phi_2(u) = (\sqrt{1-u^2}, u)$

$\Phi_1^{-1}(\Phi_2(u)) = \Phi_1^{-1}(\sqrt{1-u^2}, u) = \sqrt{1-u^2}$

$F(u) = \sqrt{1-u^2}$

$F'(u) = -\frac{u}{\dots}$ ✓ $u \in (0,1)$

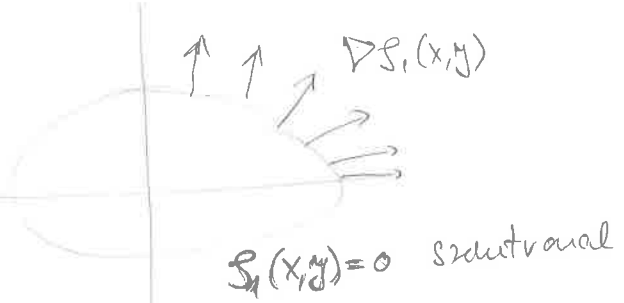
(b) (még mindig [HF_1])

Normál tér megadása (ez a könnyebbik)

$$S_1(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cancel{-} 1$$

$$\boxed{\text{„A gradiens mindig merőleges a szintvonalra" } (D7^*)}$$

$$\nabla S_1(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$



ha $P = (x_0, y_0)$

akkor $N_P = \left\{ \alpha\left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right) \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

ha nagyon precíz szeretnék lenni:

$$N_P = \left\{ \cancel{\alpha} \cdot \left[\nabla S_1(x,y)\right]_{(x,y)=P} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Érintő- (tangens-) tér megadása (nehezebb)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad ; \quad t \in V_P \subset (0, \underbrace{2\pi + \varepsilon})$$

↳ hogy ez a pont is benne legyen és V_P legyen nyílt

$$\Theta_P \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P$$

tehát $\boxed{\Phi^{-1}(P) = \Theta_P}$

$$P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos\Theta_P \\ b \sin\Theta_P \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{\Phi}(\Theta_P) = \begin{pmatrix} -a \sin\Theta_P \\ b\cos\Theta_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b}\overbrace{\left[b \sin\Theta_P\right]}^{y_P} \\ \frac{b}{a}\underbrace{\left[a\cos\Theta_P\right]}_{x_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} y_P \\ \frac{b}{a} x_P \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_P = \left\{ \beta \cdot \dot{\Phi}(\Theta_P) = \beta \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} y_P \\ \frac{b}{a} x_P \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}}$$

Formálisabban (+ általánosabban) $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$; $\Phi(u)$

$$T_P = \left\{ \left[D\Phi(u)\right]_{u = \Phi^{-1}(P)} \cdot \beta \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R}^k \right\}$$

Definíció 2.~~2~~.1
Paraméteresen megadott sokaság
[1] $\mathbb{R}^n$-ben

$M \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz

M k-dim diffható sokaság

Definíció 2.1.6.

[2] Topologikus térben

$M \subset \mathbb{R}^n$ nem feltétlenül!
$M \subset X$ topologikus tér részhalmaza
M k-dim sokaság, ha

$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ ($\exists$ nyílt lefedése)

$\forall U_\alpha$-hoz

$\exists\, \Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to X$ leképezés

$\exists\, V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ nyílt gömb

úgy hogy $\Phi_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha \cap X$

Φ_α egy-egy értelmű

V_α és $U_\alpha \cap X$ között

+ kompatibilitás Φ_α és Φ_β között, ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

vagyis ~~[illegible]~~

$v_1 = (a,b,c)$, $v_2 = (d,e,f)$ $\Rightarrow T = \sqrt{\det(A^T A)}$

v_1, v_2 által kifeszített paralelogramma TERÜLETE

$$\boxed{T = \sqrt{\det(A^T A)}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & \langle v_1, v_2\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & \|v_2\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2\rangle^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cos^2\theta$$
$$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2\theta)$$
$$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2\theta$$
$$= \|v_1\|^2 \underbrace{(\|v_2\| \sin\theta)^2}_{h} = \|v_1\|^2 h^2 = T^2$$

(*) folyt. a köv. lapon

$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$$\boxed{\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$$

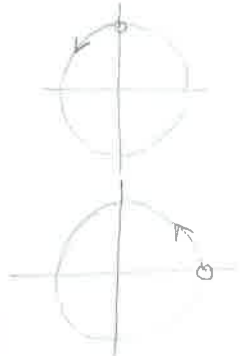
(1) (a) Síkbeli egységkör

ha $\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $\underbrace{t \in [0, 2\pi)}$ ez nem nyílt halmaz!

tehát

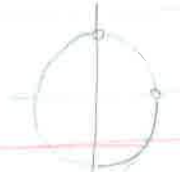
$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $t \in (0, 2\pi)$ $\} V_1$

$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in (0, 2\pi)$ $\} V_2$



vehés megadni Φ_2^{-1}-et

$U_1 \cap U_2$:



$$t \xmapsto{\Phi_2} (\cos t, \sin t) = (-\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$$
$$= \left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \pi + t\right), \cos\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \xmapsto{\Phi_1^{-1}} t - \tfrac{\pi}{2}$$

$f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1 \to V_2$

$\cos t = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
$\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

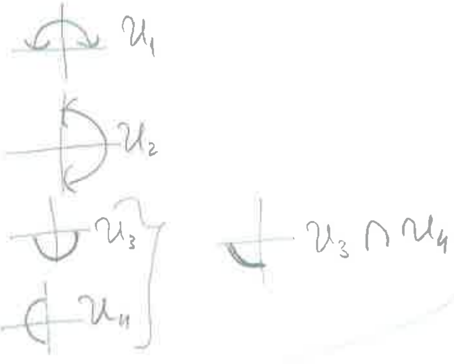
más kopp:

$\Phi_1(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$ $u \in (-1, 1) = V_1$

$\Phi_2(u) = (\sqrt{1-u^2}, u)$ $u \in (-1, 1) = V_2$

$\Phi_3(u) = (u, -\sqrt{1-u^2})$ $u \in (-1, 1) = V_3$

$\Phi_4(u) = (-\sqrt{1-u^2}, u)$ $u \in (-1, 1) = V_4$



1.(a)

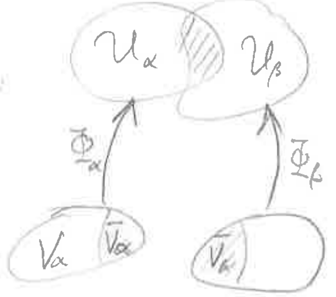
Differenciálgeom. I
Gyak. 8

Egy általános topologikus térben adott sokaságról úgy ellenőrizzük, hogy valóban sokaság-e, hogy:

1. keressük egy nyílt lefedését: $U_1 \cup U_2 \cup \dots$
2. keressünk (Φ_1, V_1) (Φ_2, V_2), ... úgy hogy:

$$\Phi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \qquad V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

3. ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor Φ_α és Φ_β kompatibilisek kell legyen, mégpedig úgy $\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha : \underbrace{\bar{V}_\alpha \to \bar{V}_\beta}_{\text{nem ez a lényeg}}$ differenciálható! bijektív



Az összes metsző $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ kell venni

S_1 esetén $U_1, \dots U_4$ $\quad U_1 \cap U_2$, $U_2 \cap U_3$, $\underline{U_3 \cap U_4}$, $U_4 \cap U_1$

$$(\Phi_4^{-1} \circ \Phi_3)(x) =$$

$\Phi_4(u) = (-\sqrt{1-u^2}, u)$ => Φ_4^{-1} következő képpen: $(-\sqrt{1-u^2}, u) \longmapsto u$

$\Phi_3: u \longmapsto (u, -\sqrt{1-u^2}) = (-\sqrt{1-t^2}, t) \longmapsto t = -\sqrt{1-u^2}$

$$t = -\sqrt{1-u^2}$$
$$-t = \sqrt{1-u^2}$$
$$t^2 = 1-u^2$$
$$u^2 = 1-t^2$$
$$u = \pm\sqrt{1-t^2}$$

$$\boxed{u \longmapsto -\sqrt{1-u^2}}$$

$\hookrightarrow$ differenciálható $\forall u \in (-1,1)$

(b) $\Phi_3(u) = \left(u, -\sqrt{1-u^2}\right)$

$\Phi_4(u) = \left(-\sqrt{1-u^2}, u\right)$

$\Big\}\quad \underbrace{\Phi_4^{-1}}_{???} \circ \Phi_3 = ?$

$$u \xmapsto{\Phi_3} \Big(u, \underbrace{-\sqrt{1-u^2}}_{t}\Big) = \left(-\sqrt{1-t^2}, t\right) \underset{\Phi_4}{\overset{\Phi_4^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad t = -\sqrt{1-u^2}$$

$$-\sqrt{1-(1-u^2)} = -\sqrt{u^2}$$
$$= -(\pm u)$$

$t := -\sqrt{1-u^2}$

$t^2 = 1-u^2$

$u = \pm\sqrt{1-t^2}$

legyen $u = -\sqrt{1-t^2}$

$$u \xmapsto{\Phi_3} \left(u, -\sqrt{1-u^2}\right) \xmapsto{\Phi_4^{-1}} -\sqrt{1-u^2}$$

$$\left(\Phi_4^{-1} \circ \Phi_3\right)(u) = -\sqrt{1-u^2} \longrightarrow \text{diffható, bijektív}$$

(c) görbe implicit megadása:

$g(x,y) = x^2+y^2-1$

(d) $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \implies N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\Phi_1(u) = \left(u, \sqrt{1-u^2}\right) \implies \Phi_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix} \implies T_p = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$x_0 = \frac{1}{2} \implies u_0 = \frac{1}{2} \implies -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$T_p = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

ell: $(1 \;\; \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = 0$ ✓

(2) S^1-et az $\mathbb{R}^3$-ban adjuk meg, mi lesz a param. ill. mpl.

$$\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi) \qquad \Rightarrow \Phi_0'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \in (-1,1), \ldots, \Phi_4(u) = .$$

Implicit: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = (x_0, y_0, 0) \Rightarrow T_p = \left\{ \gamma \cdot \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(3) $S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$

$\Phi_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \quad (u,v) \in C_1 \Rightarrow \mathcal{U}_1$ 

$\Phi_2(u,v) = \left(u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}\right) \quad (u,v) \in C_1 \Rightarrow \mathcal{U}_2$ 

$\Phi_3(u,v) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v\right) \Rightarrow \mathcal{U}_3$ 

$$(u,v) \xmapsto{\Phi_3} \Big(u, \underbrace{\sqrt{1-u^2-v^2}}_{t}, v\Big) = \left(u, t, \sqrt{1-u^2-t^2}\right) \xmapsto{\Phi_1^{-1}} (u,t) =$$
$$= \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$$t^2 = 1-u^2-v^2$$

$$v = \pm\sqrt{1-u^2-t^2}$$

$$f(u,v) = \left(\Phi_1^{-1} \circ \Phi_3\right)(u,v) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{}} & -\frac{v}{\sqrt{}} \end{pmatrix}$$

Sima és bijektív!

Implicit megadás; $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$P(x_0,y_0,z_0)$ -ban tfh $P \in S^2$

$T_P \div D\Phi^*_{1}(u,v) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{}} & -\frac{v}{\sqrt{}} \end{array}\right)\Bigg|_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} & -\frac{y_0}{\sqrt{}} \end{pmatrix}$

$x_0 = u \quad z_0 = \sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

$y_0 = v$

$N_P : \nabla g\big|_P = 2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

ellenőrzés: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = x_0 - \frac{x_0 \cancel{z_0}}{\cancel{\sqrt{}}} = 0$ ✓

---

(4) Ekv reláció: reflexív: $a \sim a$

szim.: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

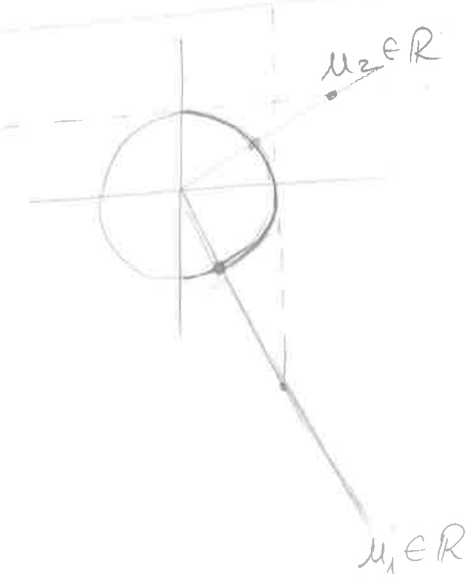
tranz: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

ekv. osztály: $[x] = \{ y \in \underbrace{\text{Alaphalmaz}}_{R^n_*} \mid x \sim y \}$

$R^n \setminus \{0\} / \sim$

legyen $v_1, v_2 \in R^n \setminus \{0\}$, $v_1 \sim v_2$ ha $\exists \lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ úl. $v_1 = \lambda v$

(HF$_2$)



$u \xrightarrow{\Phi_1} (u, 1) \in R^2 \implies \mathcal{U}_1$

$u \xmapsto{\Phi_2} (1, u) \in R^2 \implies \mathcal{U}_2$

kompatibilis-e?

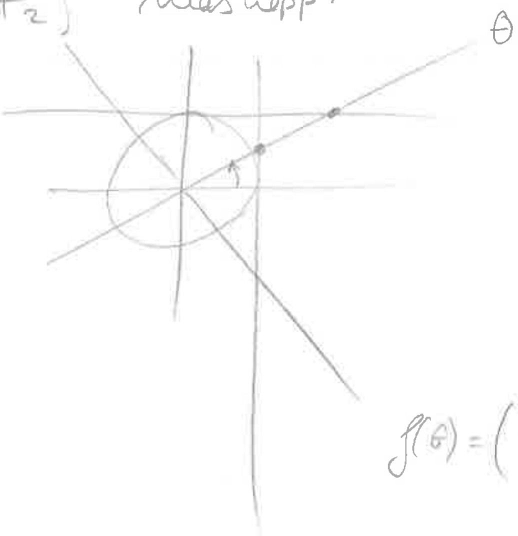
$u \xmapsto{\Phi_1} (u, 1) \sim (1, \frac{1}{u}) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$

$f(u) = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(u) = \frac{1}{u}$

$f'(u) = -\frac{1}{u^2}$

Diffgeom 1
Gyak 8

[HF_2] mds løpp:



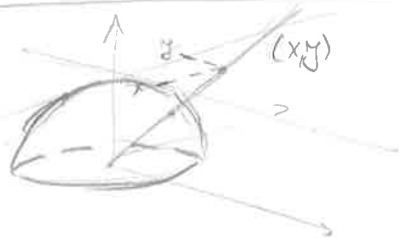
$\Phi_1(\theta) = (1, \operatorname{tg}\theta)$, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\Phi_2(\theta) = (\operatorname{ctg}\theta, 1)$, $\in (0, \pi)$

$$\theta \xmapsto{\Phi_1} (1, \operatorname{tg}\theta) \sim \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, 1\right) = (\operatorname{ctg}\theta, 1) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \theta$$

$f(\theta) = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(\theta) = \theta$ bijektiv, sdma

$f'(\theta) = 1$



$\Phi_1 : (x,y) \mapsto (x, y, 1) \implies \mathcal{U}_1$

$\Phi_2 : (x,y) \mapsto (x, 1, y) \implies \mathcal{U}_2$

$\Phi_3 : (x,y) \mapsto (1, x, y) \implies \mathcal{U}_3$

$$(x,y) \xmapsto{\Phi_1} (x, y, 1) \sim \left(\frac{x}{y}, 1, \frac{1}{y}\right) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

$f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$; $f : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{x}{y^2} & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{bijektiv}$$

$\mathbb{P}^3$ számítógépes grafika:

$\mathbb{R}^3$-ban → forgatás mint $R\cdot v$ ✓

→ skálázás mint $R\cdot v$ ✓

→ transzláció mint $R\cdot v$ ×

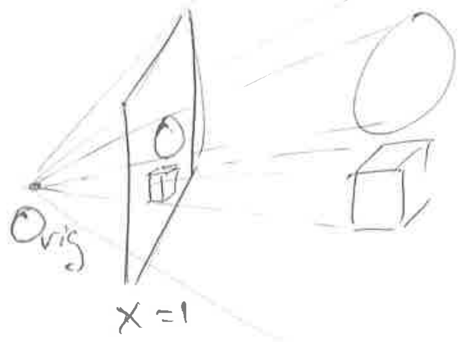
→ projektív leképezés $R\cdot v$ ×

DE: $\mathbb{P}^3$-ban van ilyen:

$$(x,y,z) \longleftrightarrow (x,y,z,1) \sim (wx, wy, wz, w)$$

transzláció:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+a \\ z+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

projektív leképezés:



egy $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ pontot le kell vetíteni az $x = 1$ síkra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ y/x \\ z/x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság, ha

$\forall p \in M$-hez $\exists\, \mathcal{U}$ környezet ú.h.

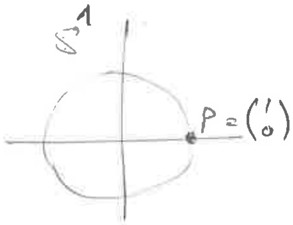
$\exists F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható és $F(V) = \mathcal{U} \cap M$

$V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz.

és DF teljes rangú

↳ $n \times k$

1pld



$F(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\qquad DF(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$t \in (-\pi, \pi)$ $\qquad k=1$-dim. sokaság az $\mathbb{R}^2$-ben

3pld:

$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ $\qquad DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ teljes rangú

Sokaság lezárása (topológiai értelemben)

Def $\overline{M} = \{ x \in \mathbb{R}^n \ \exists (x_j) \subset M, \lim_{j \to \infty} x_j = x \}$

Def $\partial M = \overline{M} \setminus M$

A sokaság mindig nyílt halmaz (a határokon)

All ha M k-dim sokaság
akkor ∂M vagy $k-1$ dim. sokaság
vagy $\emptyset$

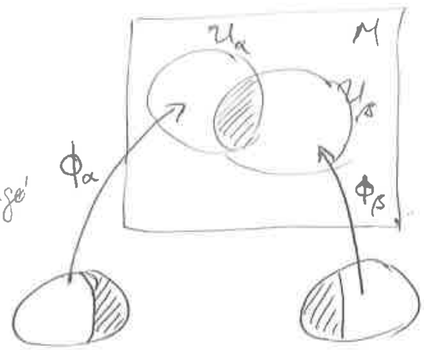
Def (kibővített def)

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság ha $\exists\, U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok (lefedés)

u.h. $\forall p \in M$ $\exists\, U_\alpha$ u.h. $p \in U_\alpha$

$\forall \alpha$-hoz $\exists\, \Phi_\alpha$ $\exists\, V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt u.h. Φ_α egy-egyértelmű, diffható

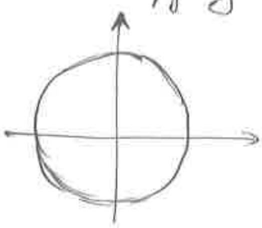
$\Phi_\beta^{-1}\Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ legyen diffható és Jac. teljes rangú



Def (U_α, Φ_α) lokális térkép

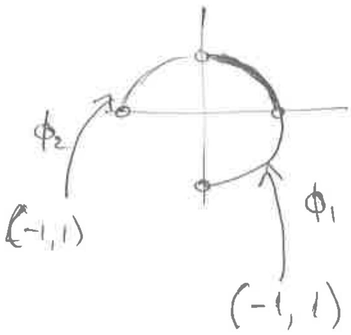
$\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ atlasz

Pld S^1 egység körvonal



U_1 :  $\quad \phi_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}^2 \quad \phi_1(u) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix}$

U_2 :  $\quad \phi_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}^2 \quad \phi_2(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}$



$U_1 \cap U_2$: 

$$\phi_2^{-1}\,\phi_1(u) = \phi_2^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix} = \sqrt{1-u^2}$$

ősképek metszete: $(0,1)$

$$u \xmapsto{\phi_2} \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}$$

legyen $u = \sqrt{1-v^2}$ akkor $\begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ \sqrt{1-\sqrt{1-v^2}^{\,2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ v \end{pmatrix}$

$$\sqrt{1-v^2} \xmapsto{\phi_2} \begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ v \end{pmatrix}$$

Def (implicit megadás)

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim diffható sokaság, ha
$\exists$ $f_1, \dots, f_{n-k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható fv-ek

$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \}$

továbbá ~~hogy~~ a gradiensek lin függetlenek,
azaz $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{pmatrix}$ Df teljes rangú.

Pld: $\{ f_1(x,y,z) = 0 \} \cap \{ f_2(x,y,z) = 0 \} \leftarrow$ görbe

Analízis III. 5. heti feladatok
2017. október 12.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1 (*Részben ismétlés, órai anyag volt*) Lássuk be hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság

(a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel
(b) Igazoljuk ezek kompatibilitását
(c) Mi lesz a görbe implicit megadása?
(d) Írjuk fel a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret

2 Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg akkor mi lesz ennek a parametrikus illetve implicit megadása? Ha $p \in \mathbb{R}^3$ $p = (x_0, y_0, z_0)$ Mi lesz $T_p =?$ $N_p =?$

3 Igazoljuk hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban két-dimenziós sokaság

$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével Mi lesz a sokaság implicit megadása? Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret

|HF| 4 Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú
(a) Igazolja hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon használja mindkét definíciót
(b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret

5 Igazoljuk hogy $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció

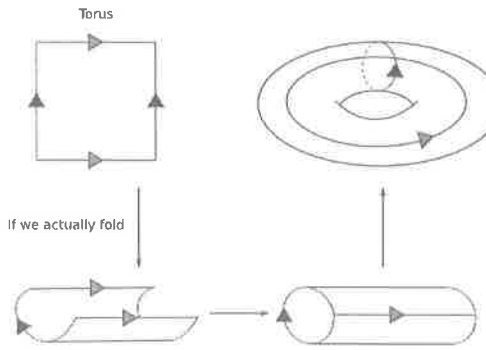
6 Igazoljuk hogy a valós projektív sík $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ egy-dimenziós sokaság (Ez a p 143 9 feladat $n = 1$ esetben)

7 Igazoljuk hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

gyakorló 8 (p 113 Theorem 6 1 1 speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ Lássuk be hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det(A^T A)}$

D5* (p 143 8 feladat) Igazoljuk hogy a tórusz két-dimenziós sokaság Adjuk meg egy lehetséges paraméterezését



Ennek meg tudnátok-e adni a paramé-terezését!

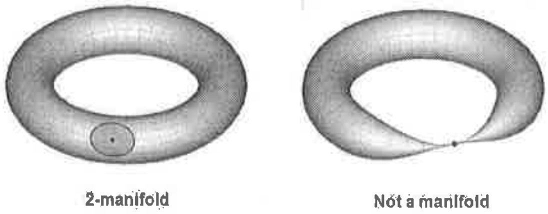


Figure 1 Sokaság definíciójának értelmezése ellenpélda

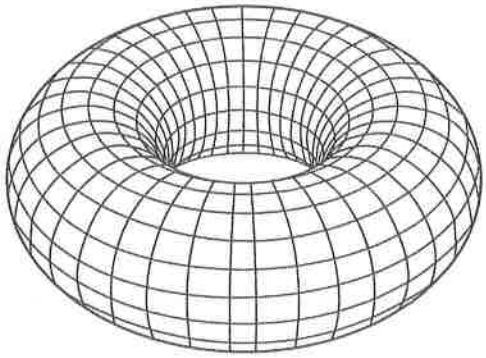


Figure 2 A tórusznak mint 2D sokaságnak a lokális koordinátatengelyei

Def 2.16. M egy k dim. sokaság,

ha $\exists\ M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ nyílt lefedése, melyre:

I $\ \forall\, \mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists\ \Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to M$

és $\exists\, V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt s.t. $\Phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$ egy-egy értelmű

vagyis Φ_α bijekció V_α és $\mathcal{U}_\alpha$ között

II $\ \forall\, \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ -ra

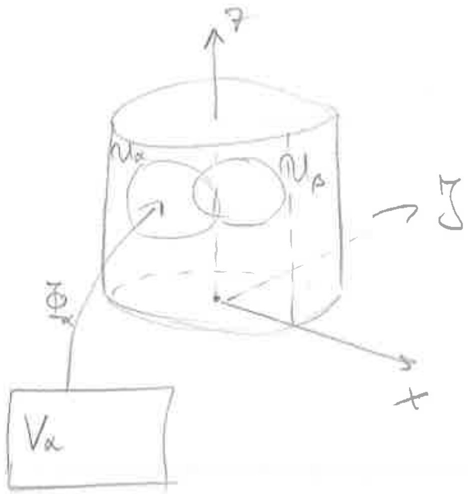
$f_{\alpha\beta} := \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ egy-egy értelmű

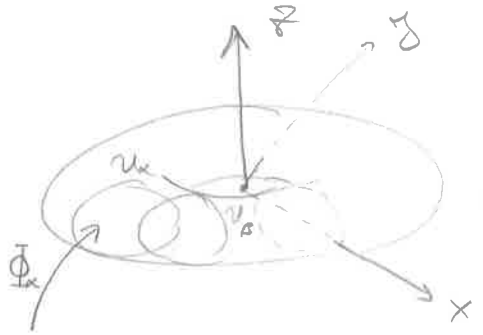
diffható

$Df_{\alpha\beta}$ teljes rangú

akkor $V_{\beta\alpha} = \Phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

$V_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$





$\Phi_\alpha = \begin{pmatrix} \cancel{\sin\theta} \\ \cancel{\cos\theta} \\ z \end{pmatrix}$

$(\theta, z) \xmapsto{\Phi_\alpha} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$

$V_\alpha = (0, 2\pi) \times (0, h)$

Def (Sokaság param. megadása) alapeset.

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság ha $\forall p \in M$ $\exists\, \mathcal{U}$ környezete

melyre : $\exists F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható és DF teljes rangú

$\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt $F(V) = \mathcal{U} \cap M$ egy-egy ért.

lokális paraméterezése

Def (Sokaság param. megadás, ált. eset)

2.1.6

$$M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \qquad \mathcal{U}_\alpha \text{ nyílt halmazok.}$$

M egy k-dim sokaság

I Ha $\forall\, \mathcal{U}_\alpha$ -hoz $\exists\, \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to M$ u.h. — param. megadás

1° ϕ_α diffható és $D\phi_\alpha$ teljes rangú

2° $\exists V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz u.h. $\phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$

3° ϕ_α bijekció V_α és $\mathcal{U}_\alpha$

II Ha $\forall\, \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ -ra : — komp.

$\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ -ra diffható egy-egy ért. leképezés

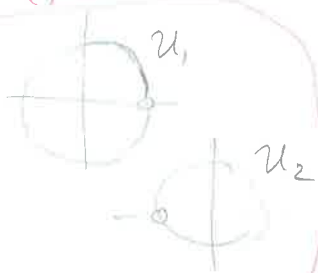
ahol $V_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

$V_{\beta\alpha} = \phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

① SÍKBELI EGYSÉGKÖR – PARAM megoldás

a) (I) $V_1 = (0, 2\pi)$ $\quad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$V_2 = (\pi, 3\pi)$ $\quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



b) kompatibilitás:

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 =$ 

$V_{12} = (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$

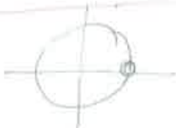
$V_{21} = (\pi, 3\pi) \setminus \{2\pi\}$

$$t \xrightarrow{\phi_1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \begin{cases} t + 2\pi & \text{ha } t \in (0, \pi) \\ t & \text{ha } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \in V_{21}$$

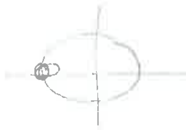
diffható

$$(\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(t) = \phi_2^{-1}(\phi_1(t)) = \begin{cases} t + 2\pi & \text{ha } t \in (0, \pi) \\ t & \text{ha } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

a) (II) $V_1 = (0, 2\pi)$ $\quad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



$V_2 = (0, 2\pi)$ $\quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \end{pmatrix}$



b) kompatibilitás

$$t \xrightarrow{\phi_1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t - \pi + \pi) \\ \sin(t - \pi + \pi) \end{pmatrix} \underset{\phi_2^{-1}}{\overset{\phi_2}{\rightleftarrows}} t - \pi, \ \bmod 2\pi$$

$$(\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(t) = \phi_2^{-1}(\phi_1(t)) = \begin{cases} t + \pi & \text{ha } t < \pi \\ t - \pi & \text{ha } t > \pi \end{cases}$$

(III) $V_1 = (-1, 1)$ $\quad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$

$V_2 = (-1, 1)$ $\quad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$

$V_3 = (-1, 1)$ $\quad \phi_3(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$

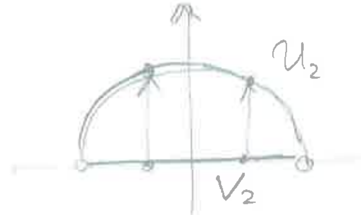
$V_4 = (-1, 1)$ $\quad \phi_4(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$

S_1

DIFFGEO 1

2017b
hét 3
gyak 5

b) Kompatibilitás



$U_2 \cap U_3 =$ 

$\phi_2^{-1}(U_2 \cap U_3) = (-1, 0)$

$\phi_3^{-1}(U_2 \cap U_3) = (0, 1)$

$$t \xmapsto{\phi_2} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \underset{\text{ezért } u = \sqrt{1-t^2}}{\overset{\text{jel } t := \sqrt{1-u^2}}{=\!=\!=}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix} \xmapsto{\phi_3^{-1}} u = -\sqrt{1-t^2}$$

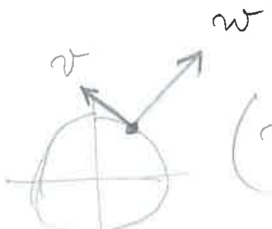
tehát

$$\underset{(0,1)}{\underset{\cap}{t}} \xmapsto{\phi_3^{-1} \circ \phi_2} \underset{(-1,0)}{\underset{\cap}{-\sqrt{1-t^2}}}$$

c) Implicit megodás:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + y^2 - 1}_{g(x,y)} = 0\}$$

d) érintőtér $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ -ban



(U_1, ϕ_1)

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$$

$$\dot{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \dot{\phi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = v$$

normáltér: $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\nabla g(P) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot 2 = w$$

$$T_P = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N_P = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

S_1 -2-

2017/6

DIFFGEO 1 | Anal 3 gyak 5

(2) S_1 az $\mathbb{R}^3$-ban

$$V_1 = (0, 2\pi) \qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(pont nem az, de mindegy)

$$V_2 = (0, 2\pi) \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Implicit megadás:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R \;\middle|\; \begin{array}{l} f_1(x,y,z) = x^2+y^2+1 = 0 \\ f_2(x,y,z) = z = 0 \end{array} \right\}$$

Érintő tér:

$$\dot\phi_1(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normáltér: $$Df_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Df_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S_1 az $\mathbb{R}^3$-ban

2017b

DIFFGEO 1

Anal 3
gyak 5

(3) S_2^2 az R^3-ban   EGYSÉGGÖMB

$$V_1 = (-1,1)^2 \qquad \phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

$$V_2 = (-1,1)^2 \qquad \phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \\ v \end{pmatrix} \quad \text{stb.}$$

Implicit megadás:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \;\middle|\; g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \right\}$$

$$T_p : \quad (u_0, v_0) = \phi_i^{-1}(x_0, y_0, z_0)$$

$$T_p = \left\{ \alpha_1 \, \phi'_{i\,u}(u_0,v_0) + \alpha_2 \phi'_{i\,v}(u_0,v_0) \;\middle|\; (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2 \right\} \to 2 \text{ dim}$$

$$N_p = \left\{ \beta_1 \cdot \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \;\middle|\; \beta_1 \in R \right\} \to 1 \text{ dim}$$

S_2

2017b

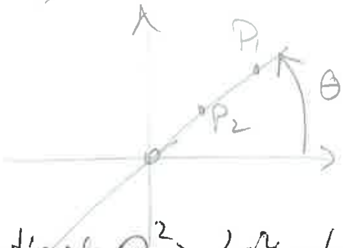
DIFFGEO 1

Anal 3
gyak 5

(5,6) Projektív sík

Ekv. rel: $a \sim a$
$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
$a \sim b$ és $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Legyen $\sim$ reláció a köv:
$r_1 = \binom{x_1}{y_1}$ pont $\sim$ $r_2 = \binom{x_2}{y_2}$ -vel, ha
$\exists\ \lambda \neq 0$ ú.h.



$[r_1] := \{ r = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid r \sim r_1 \}$ ← partíció $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-ban

↳ ez megadja $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-nak egy particionálását

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \stackrel{jel}{=} \mathbb{R}^2_\pm$

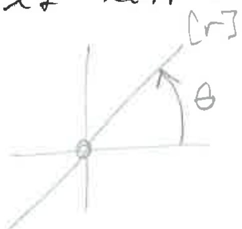
~~tehát~~ $\cancel{\mathbb{R}^2_\pm}$

legyen $P_1 = \{ [r] \mid r \in \mathbb{R}^2_\pm \} \stackrel{jel}{=} \mathbb{R}^2/_\sim$ $\not\subset \mathbb{R}^2$ DE P_1 1D. sok.

↳ ekvivalencia osztályok halmaza

(6) Igazoljuk, hogy P_1 1D sokaság

P_1 minden elemét lehet azonosítani egy számmal
ez lesz a lokális koordináta



legyen $[r] \in P_1$ azonosítója θ

legyen $r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ ez egy olyan pont, ami $\in [r]$

Ugyanakkor kellene egy pont $\mathbb{R}^2$-ben és ami
reprezentálja $[r]$-et $\mathbb{R}^2$-ben

$V_1 = (0, \pi)$ $\quad \phi_1(\theta) = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right] \in P_1$

↳ itt ϕ_1 nem diffható a [illegible] értelmében

$V_2 = (0, \pi)$ $\quad \phi_2(\theta) = \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \right] \in P_1$

$P_1(\mathbb{R})$

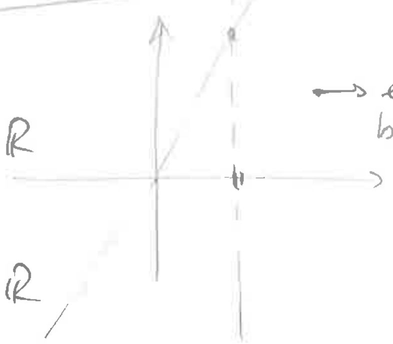
DIFFGEO 1

2017b
hal 3
gyak 5

$$\theta \xmapsto{\phi_1} \left[\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\phi_2^{-1}} \theta-\frac{\pi}{2} \mod \pi$$

Más térkép:

$$\mathcal{U}_1 := \left\{ [r] \in P_1 \;\middle|\; r = \begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix} \right\}, V_1 = \mathbb{R}$$



→ ebbe nincs benne a $\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]$

$$\mathcal{U}_2 := \left\{ [r] \in P_1 \;\middle|\; r = \begin{pmatrix}u\\ 1\end{pmatrix} \right\}, V_2 = \mathbb{R}$$

u: lokális koordináta

$u \xmapsto{\Phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right]$ ez lesz az ekvivalenciaosztály generátor eleme

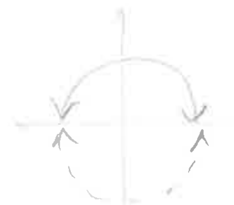
$u \xmapsto{\Phi_2} \left[\begin{pmatrix}u\\ 1\end{pmatrix}\right]$ $\qquad \Phi_1 : \mathbb{R}^1 \to P_1 \not\subset \mathbb{R}^2$

$$u \xmapsto{\Phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{u}\\ 1\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$$

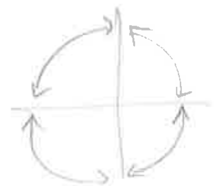
Itt mindenfajta az őskép is!

$\mathcal{U}_1$:

$\mathcal{U}_2$:



$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$:



csak a koordinátatengelyeknek megfelelő nincs benne

$$\Phi_1^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Phi_2^{-1}(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

tehát van értelme annak hogy:

$$u \xmapsto{\Phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{u}\\ 1\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$$

$f(u) = \Phi_2^{-1}(\Phi_1(u)) = \frac{1}{u}$ diffható $\forall\, u \in \mathbb{R}_\pm$

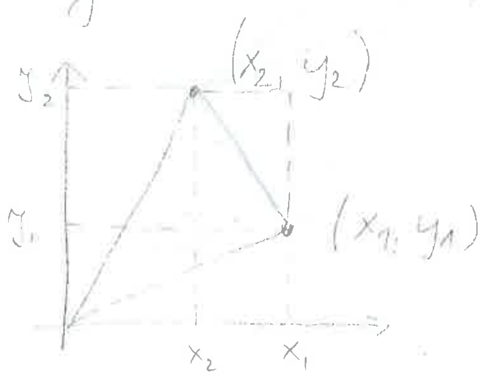
$$x_1 y_2 - \frac{x_2 y_2}{2} - \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x_1 y_2 - x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

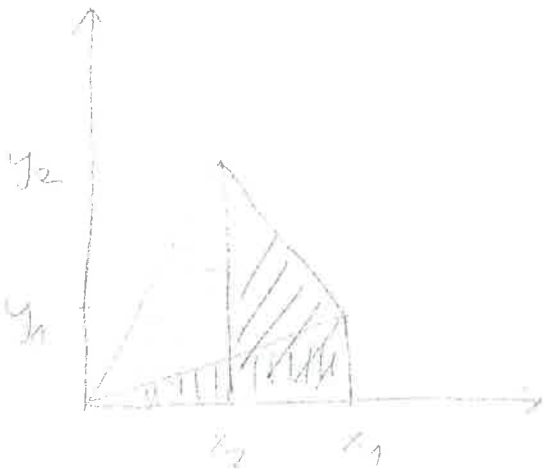
Tfh a pontok helyzete ilyen

$x_2 < x_1$

$y_1 < y_2$



A fél paralelogramma területét bontsuk ki:



$T_1 =$  trapéz

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_1 - x_2)$$

$T_2 =$  háromszög

$$\frac{x_2 \cdot y_2}{2}$$

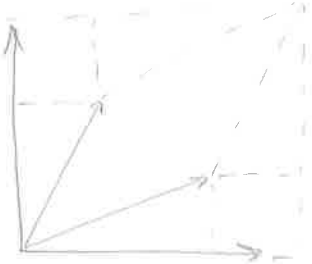
$T_3 =$  háromszög

$$\frac{x_1 \cdot y_1}{2}$$

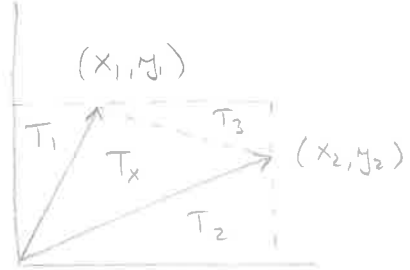
$$T = T_1 + T_2 - T_3 = \frac{1}{2}\left(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_2 y_2 - x_1 y_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(1)



vagy



$$2 \cdot T_1 = y_1 \cdot x_1$$

$$2 \cdot T_2 = y_2 \cdot x_2$$

$$2 \cdot T_3 = (x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

$$2 \cdot T = 2 \cdot x_2 y_1$$

$$T_x = 2x_2 y_1 \cancel{- x_1 y_1} - \cancel{x_2 y_2} - x_2 y_1 - x_1 y_2 + \cancel{x_2 y_2} + \cancel{x_1 y_1}$$

$$= x_2 y_1 - x_1 y_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

(2)

$$A = (v \ \ w)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} v^T \\ w^T \end{pmatrix} (v \ \ w) = \begin{pmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \|v\|^2 & \|v\| \cdot \|w\| \cos\alpha \\ \|v\| \|w\| \cos\alpha & \|w\|^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2\alpha$$

$$= \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin \alpha} \Rightarrow \sqrt{\det(A^T A)} = \|v\| \cdot \|w\| \sin\alpha$$

(4)

$$dx_i \wedge dx_j (v_1, v_2) = dx_i(v_1)\, dx_j(v_2) - dx_i(v_2) dx_j(v_1) =$$

$$= -\left(dx_j(v_1)\, dx_i(v_2) - dx_j(v_2)\, dx_i(v_1) \right) =$$

$$= - dx_j \wedge dx_i (v_1, v_2)$$

DIFF GEOM 1

Elena Luna García
CBQVW5

Exercise 4

$y = (y_n) \rightarrow$ complex-valued w.s.st process with autocovariance function $r^y(\cdot)$. Show that the matrix $R = (R_{k,l})$ defined by $R_{k,l} = r^y(l-k)$ $k,l = 1,\dots,p$ is a Hermitian, positive, semi-definite matrix $\rightarrow$ Toeplitz.

- condition for Hermitian: $A = \overline{A^T}$

 for complex w.s.st processes we have:

 $r(\tau) = r^y(\tau) = \overline{r(-\tau)}$

 so, $R_{k,l} = r^y(l-k) = \overline{r^y(k-l)} = \overline{R_{l,k}}$ $\rightarrow$ Hermitian ✓

- condition for positive semi-definite: $\bar{a} A a > 0 \ \forall a \neq 0$

 so $\bar{a}^T R a = \bar{a}^T E(\bar{Y} Y^T) a = E\, \bar{a}^T (\bar{Y} Y^T) a = E(\overline{a^T Y})(a^T Y)^T > 0 \rightarrow$ ✓

- $R_{k,l}$ only depends on $l-k$ so we can consider it a Toeplitz ✓

Computer Controlled Systems

1st midterm test

2017. 10. 19.

theoretical questions (25 points)

(The answers can be given in Hungarian)

1. Define the exponential function e^{At} of a square matrix A using power series. Give an explicit formula to compute e^{At} analytically (not only approximately). (5p)

2. Define the impulse response function h of a SISO linear time invariant (LTI) system. How can we compute h from the matrices (A, B, C) of a state space model? (5p)

3. When do we call an LTI system BIBO stable? What is the necessary and sufficient condition for BIBO stability? (5p)

4. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a positive definite symmetric matrix. Can A have complex conjugate eigenvalues? Does there exist an invertible transformation matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, such that $\bar{A} = TAT^{-1}$ is a stability matrix? Justify your answers! (5p)

5. Define the notion of observability of a state space model (A, B, C). Define the unobservable subspace of (A, B, C). Determine the unobservabe subspace of the following second order LTI system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + b_2 u \\ y &= c_2 x_2 \qquad\qquad c_2 \neq 0 \end{aligned} \qquad (5p)$$

I $S: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$

$s(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix}$ $\quad F = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = ?$

II $x^2+y^2=4$ h. palást $z \in [0,2]$ (felül zárt) alul nyitott

$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\quad \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = ?$

6 $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$ $\quad$ szem. be: $\omega \wedge \eta = \det(A)\, dx_1 \wedge dx_2$

$\eta = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$

Analízis III. 6. heti feladatok
2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$
2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:
$$v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}. \tag{2}$$
Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.
3. HF Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \tag{3}$$
5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)
6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = \mathrm{d}x_2$ és $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.
7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k$$
8. Definíció 2.2.6. (jegyzet 37. old) szerint számoljuk ki a $\mathrm{d}x_{13} \wedge x_4(A) := (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_4(A)$-t, ha:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

9. Határozzuk meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra:
(a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1\mathrm{d}x_1 + x_2\mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1x_2x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.
10. HF Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f\mathrm{d}x_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.
11. Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

Analízis III. 6. heti feladatok

2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

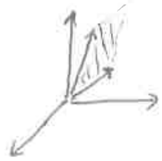
1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|.$$

2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:

$v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$



Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

kavális!

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \,.$$

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \cancel{\wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4.}$
~~(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)~~ (OK marad)

6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = \mathrm{d}x_2$ és $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:

$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k \,.$$

(+) →

Differenciál formák. Külső deriválás.

8. Határozzuk meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra:

(a) $\omega_1 = e^{x_1} \cos(x_1 x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1 x_2 x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

9. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor

$$\omega = f \mathrm{d}x_1,$$

ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

10. (HF) Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

(5)

$$\cancel{(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) =}$$

$$\cancel{= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 +}$$

$$\cancel{+ dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4}$$

$$\cancel{= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (-1)^{?} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4}$$

~~{3,4,1,2} permutáció inverzióinak száma)~~

$$\cancel{3412 \to 3142 \to 1342 \to 1324}$$

$$\cancel{\to 1234}$$

OK! Példa olyan $\omega \neq 0$-ra, amikor $\omega \wedge \omega \neq 0$

$$(dx_1 + dx_2)(dx_1 + dx_2) =$$

$$= dx_1 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2 +$$

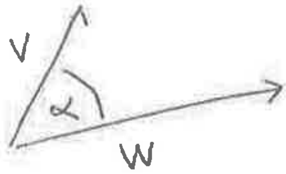
$$+ dx_2 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dx_2 = \cancel{0}!$$

Példa

3. $A = (v\ w)$ $\qquad v, w \in \mathbb{R}^n$

$A =$ 

$$A^T A = \begin{bmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{bmatrix}$$



$$v^T v = \|v\|^2$$

$$v^T w = \langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha$$

$$w^T v = \langle w, v \rangle = \quad -\text{''}-$$

$$w^T w = \|w\|^2$$

$$\det(A^T A) = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \left(\|w\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha\right)^2 =$$

$$= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det(A^T A)} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\alpha$$

4. $dx_i \wedge dx_j (v\ w) = dx_i(v) \cdot dx_j(w) - dx_i(w)\, dx_j(v) = (*)$

$dx_i(v) = v_i$, stb...

$= v_i w_j - w_i v_j$

$dx_j \wedge dx_i = \ldots$ épp fordított előjellel ugyanaz

7.

$$dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_2) = dx_2 \wedge (-dx_2 \wedge dx_1) =$$

$$= -(dx_2 \wedge dx_2) \wedge dx_1 = 0$$

($\Rightarrow$ " átrendezhető, csoportosítható ")

8. $dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)(A) = ?$ $A \in \mathbb{R}^{n \times 3}$

$\cancel{A = (v \,\vdots\, w_1 w_2) = (*)}$ $A = (v \,\vdots\, u w) = \,!$

(*)

$\{1,2,3\}$ permutációk	inverziók száma	/ összegben + vagy –
$\{1;2,3\}$	0	+
$\{1;3,2\}$	1	–
$\{2;1\,3\}$	1	–
$\{2;3\,1\}$	2	+
$\{3;2\,1\}$	1	–
$\{3;1\,2\}$	2	+

$\cancel{(*) = v_i \cdot u_j w_k - v_i u_k w_j + v_j u_i \cdot w_k}$

(*) Speciális / $\boxed{\text{egyszerűbb jelölése}}$ $i=1,\ j=2,\ k=3$

$$dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3)(v \,\vdots\, u w) =$$

$$= v_1 u_2 w_3 - v_1 u_3 w_2 - v_2 u_1 w_3 + v_2 u_3 w_1 - v_3 u_2 w_1 + v_3 u_1 w_2$$

$$dx_2 \wedge dx_3 (u\ w) = \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_2 w_3 - u_3 w_2$$

$$= v_1 \underbrace{\left(u_2 w_3 - u_3 w_2\right)}_{\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}} - v_2 \underbrace{\left(\ldots \right)}_{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}} + w_3 \underbrace{\left(\qquad \right)}_{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

A másik forma hasonlóképp számolható.

$$(dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 \underbrace{(v \; u \; \vdots \; w)}_{\text{ennek a megoldása lesz másképp}}$$

$\Longrightarrow$ az eredmény ugyanaz lesz.

Forms World Party

October 17, 2011

nD-ben elemi k formák

$\Re^n$-ben $I = (i_1, i_2, ..., i_k)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n)$ $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ nD-s k-forma k db vektor által kifeszített paralelepipedont (k = 1 : szakasz, k = 2 : paralelogramma, k= 3 : sima paralelepipedon...) levetít a forma által kijelölt k db bázisvektor által kifeszített térre, és megmondja a "térfogatát". Pl. az $I = (1, 2)$ $dx_I(u, v) = dx_1 \wedge dx_2(u, v)$ az $\bar{u}$ és $\bar{v}$ vektorok által 3D-ben kifeszített paralelogramma xy síkba vetített képének területét adja. dx_i az i. koordinátát. 0 formák a valós számok.
számolva: k db nD-s oszlopvektort mátrixba pakolsz, majd a forma által kijelölt sorokból legyártott determinánst kiszámolod: $dx_I(A) = det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix}$
ahol A_{i_k} -k A sorai pl.:

$$I = (1, 3, 4) \quad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad dx_I(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

nD-ben elemi k formából $\binom{n}{k}$ db van (n db bázisból k-t ennyi képpen tudsz kiválasztani. ezek az nD-s k formák $\binom{n}{k}$ D-s lineáris terének bázisai: $\bigwedge^k(\Re^n)$)

Ék szorzat

τ és ω k és l formák, $A = (A_1, A_2, ..., A_k, ..., A_{k+l})$ N*(k+l)-es mátrix, szorzatuk (k+l)-forma:

$$\tau \wedge \omega(A) = \Sigma_{\sigma \in S(k,l)} (-1)^{sign(\sigma)} \tau(A_{\sigma(1)} ... A_{\sigma(k)}) \omega(A_{\sigma(k+1)} ... A_{\sigma(k+l)})$$

jelmagyarázat:

- σ : egy permutáció (1, 2, 3, ... k+l számsor összekeverve)
- $sign(\sigma)$: a permutáció paritása: páros vagy páratlan számcserével lehet-e elérni az eredeti állapotot (ps : 0, ptl : 1 pl.: $\sigma = (2\ 1\ 3)$ akkor $sign(\sigma) = 1$, mert 1 cserével megoldható. A (2 3 1) -nek már 0 lenne, mert 2 csere kell)
- $\sigma(i)$: az eredeti sorrendből i hova került (pl.: $\sigma = (2\ 1\ 3)$ -ban $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$)
- S(k,l) : (1 ... k+l) olyan permutációi, amikre $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots \sigma(k)$ és $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$ (pl.: (4 1 5 2 3) $\in$ S(3,2) mert $\sigma(1) = 2 < \sigma(2) = 4 < \sigma(3) = 5$ és $\sigma(3+1) = 1 < \sigma(3+2) = 3$)
- $\sigma \in S(k,l)$: minden olyan permutáció, ami tudja a fenti trükköt
- $A_{\sigma(i)}$: az aktuális permutációban az i helye által kijelölt oszlopa A-nak (szal ha $\sigma(i) = j$, akkor $A_{\sigma(i)}$ A j. oszlopa)
- $\tau(A_{\sigma(1)} ... A_{\sigma(k)})$ a τ formába beletesszük a permutáció σ-i által kijelölt oszlopokat

(+)

Pl.:

$$\boxed{dx_{(1,3)} \wedge dx_4}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

ahol $\tau = dx_{(1,3)}$ és $\omega = dx_4$

Ez $\Re^4$-ben egy 2- és egy 1-forma szorzata. A permutációk:

miért nem inkább -1 ?

			$\sigma(1)$	$\gtrless$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$sign(\sigma)$	$\in S(2,1)$?
1	2	3	1	<	2	3	0	✓
1	3	2	1	<	3	2	1	✓
2	1	3	2	>	1	3	1	∅
2	3	1	3	>	1	2	0	∅
3	1	2	2	<	3	1	0	✓
3	2	1	3	>	2	1	1	∅

itt csak azon permutációkat tekintjük melyekre $\sigma_1 < .. < \sigma_k$ (implicit benne van az $\frac{1}{k!}$ -al való szorzás)

Most vesszük a ✓-t permutációkat, a paritásukból eldöntjük az előjelet, majd a σ-ik által kijelölt oszlopokat odaadjuk a formáknak:

$$dx_{(1,3)} \wedge dx_4(A) = \tau(A_1A_2)\omega(A_3) - \tau(A_1A_3)\omega(A_2) + \tau(A_2A_3)\omega(A_1)$$

emlékeztető:

$$\tau(A_1A_3) = \tau\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = dx_{(1,3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 14$$

$$\omega(A_3) = dx_4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 7$$

így:

$$dx_{(1,3)} \wedge dx_4(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \cdot 7 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \cdot 1 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot -4$$

Tanulságok

1. 1 formákra az ék szorzat antikommutatív:

   $$dx_i \wedge dx_j(A) = dx_i(A_1)dx_j(A_2) - dx_i(A_2)dx_j(A_1) = A_{i1} \cdot A_{j2} - A_{i2} \cdot A_{j1} =$$

   $$= -(A_{j1} \cdot A_{i2} - A_{j2} \cdot A_{i1}) = -(dx_j(A_1)dx_i(A_2) - dx_j(A_2)dx_i(A_1)) = -(dx_j \wedge dx_i(A))$$

2. általában: $\tau \wedge \omega = (-1)^{kl}\omega \wedge \tau$
   Ha visszagondoltok a képletre, abban csak ω-t és τ-t megcserélitek, ami a hozzátartozó permutációban is kicseréli a megfelelő tagokat (gyakorlatilag eltolja az egészet). Ez l elem k-val arrébb tolása, ami $k \cdot l$ csere, így a paritás is ennyivel változik. (szal ha k és l páros, akkor megcserélheted, ha az egyik páratlan, akkor előjelet vált)

3. $\tau \wedge \tau = (-1)^{kk}\tau \wedge \tau$ vagyis ha τ páratlan forma, az önmagával vett szorzata 0 (a=-a $\Leftrightarrow$ a=0). Így $dx_i \wedge dx_i = 0$

4. Ha összeszorzol k db 1-formát a képletbe behelyettesítve látható, hogy a forma által kijelölt sorok-ból összerakott determináns képletét kapjuk, ami ugyanaz, ahogy az elején megmondtuk hogy számolunk k-formákat. Innen a képlet:

   $$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

Analízis III. 5. heti feladatok
2014. október 13.

Ismétlés: Sokaság irányítása = "érintőterek irányítása". 135. oldal, 6.5.3. fejezet.

1. Igazoljuk, hogy a vektortér irányítását definiáló reláció valóban ekvivalencia-reláció.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke.

2. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

3. (Részben az órai anyag folytatása. A 113. oldalon Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, illetve az őket tartalmazó mátrix:

1

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}.$$

Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$. (≡ átforgatható)

2 4. Mennyi a $v = (1,2,3)$ és $w = (3,2,1)$ vektorok általk kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

5. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

6. (HF) Igazoljuk, hogy az 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus: ha $\tau, \omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\omega \wedge \tau = -\tau \wedge \omega$.

HF 4

7. (HF) Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

8. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$ (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

9. Igazolja, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

5

$$\omega = e^x \cos(y),$$
$$\omega = x dx + y dy,$$
$$\omega = xyz\ dx \wedge dz$$

3 Példa arra, hogy $\omega \wedge \omega \neq 0$.

(*) $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ $\quad \omega \wedge \omega = ?$

9. hét

Analízis III. 6. heti feladatok
2015. október 16.

Differenciál formák. Külső deriválás.

1. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \qquad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

(7)

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

ω és τ külső szorzata $\boxed{\omega \wedge \tau}$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

(8) 2. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega_1 = e^x \cos(xy), \qquad \omega_2 = xdx + ydy, \qquad \omega_3 = xyz\ dx \wedge dz.$$

HF 3. (HF) (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx_{\cancel{1}}$, ahol f kétszer differenciálható 2 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$. $\mathbb{R}^2$-ben

$d\omega = \sum f'_{x_i} dx_i \wedge dx_j$

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x,y,z)\ dx \wedge dy$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

5. (HF) Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\ dx + f_2(x,y,z)\ dy + f_3(x,y,z)\ dz$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek

6. Igazolja, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazolja, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u,v) \le z \le t(u,v),\ \ (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

(5) + Vektormezők $\longleftrightarrow$ Formák

(1SM) + deriválás $\longleftrightarrow$ külső deriválás

$\omega = f dx + g dy + h dz \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

9. hét

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longrightarrow v = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~$V = \{(v_1, v_2, v_3) \mid v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \mathbb{R}^3\}$ vedjük~~

van $+$: assoc
comm.
egységelem
ellentett elem
skalárszorzat : - lineáris
- egységelem.

~~$\omega = f dx + g dy + h dz$~~

$\omega_1 = a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz$

$\omega_2 = a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz$

$(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3 = \omega_1 + (\omega_2 + \omega_3)$

$\omega_1 + \omega_2 = (a_1 + a_2) dx + (b_1 + b_2) dy + (c_1 + c_2) dz$

ha $p = x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}$
$\hookrightarrow$ ez egy vektortér a $\mathbb{Q}$ fölött

Egyértelműen $a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{5} =$
$b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{5}$
ez csak akkor teljesül,
ha $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

$\hookrightarrow p = 0 \iff x = 0$
$y = 0$
$z = 0$

$p \in V = \{x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} \mid (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3\}$

Az n-dim-s k formák vektorteret alkotnak: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Bázis: elemi k-formák

$dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$

def: $\tau \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot l} \lambda \wedge \tau$

$\omega \wedge (\lambda \wedge \tau) = (\omega \wedge \lambda) \wedge \tau$

$\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$

$T_2(\omega \wedge \tau) = T_1(\omega) \times T_1(\tau)$

$\omega \in \Lambda^0,\ \omega = f$ akkor $T_1(d\omega) = \operatorname{grad} T_0(\omega) = \operatorname{grad} f$

$\omega \in \Lambda^1,\ \omega = f dx + g dy + h dz$

$T_2(d\omega) = \operatorname{rot} T_1(\omega)$

$\omega \in \Lambda^2,\ \omega = f dy dz + g dz dx + h dx dy$

$T_3(d\omega) = \operatorname{div} T_2(\omega)$

Legyen $\mathbb{F}$ egy test $(\mathbb{F}, +, \cdot)$. V lineáris vektortér $\mathbb{F}$ felett, ha
- $\forall u, v \in V$-re $\exists!\ w \in V$: $w = u + v$ (4 axióma)
- skalárszorzat (4 axióma)

Differenciál formák

Jacobi determináns:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(\Phi(u,v))\left(\phi'_{1u}\,du + \phi'_{1v}\,dv\right)\wedge\left(\phi'_{2u}\,du + \phi'_{2v}\,dv\right) =$$

$x = \phi_1(u,v)$

$y = \phi_2(u,v)$

$dx = \phi'_{1u}\,du + \phi'_{2v}\,dv$

$dy = \phi'_{2u}\,du + \phi'_{2v}\,dv$

$$= \iint_R f(\phi(u,v))\left(\phi'_{1u}\phi'_{2v}\,du\,dv + \phi'_{1v}\phi'_{2u}\,dv\,du\right) =$$

$$= \iint_R f(\phi)\,\det(D\phi)\,du\,dv$$

$D \ni (x,y) \Rightarrow R \ni (u,v)$

$\mathbb{R}^n$-ben $\quad x_i = \phi_i(u)$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} dx_i = \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\phi'_{i u_j}\cdot du_j\right) = \boxed{\left[\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\phi'_{i;u_{\sigma_i}}\right)\cdot(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\right]\bigwedge_{i=1}^{n} u_i}$$

$$\iint \underline{F}(x,y,z)\,d\underline{S} = \iint \underline{F}(x,y,z)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_\Gamma f(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}$$

(6) Igazoljuk, hogy az elemi 1 formák $\wedge$ szorzata asszoc. vagyis $dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$

Def: $(\tau \wedge \lambda)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \cdot \lambda(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}})$

vagyis $[(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k](v_1, v_2, v_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{|\sigma|} (dx_i \wedge dx_j)(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}) \cdot v_{3\sigma_3}$

$\sigma \in (1\ 2|3) \to + \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} v_{33}$

$(2\ 1|3) \to - \begin{vmatrix} v_{12} & v_{22} \\ v_{11} & v_{21} \end{vmatrix} v_{33}$

$(1\ 3|2) \to - \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix} v_{32}$

$(3\ 1|2) \to + \begin{vmatrix} v_{13} & v_{23} \\ v_{11} & v_{21} \end{vmatrix} v_{32}$

$(2\ 3|1) \to + \begin{vmatrix} v_{12} & v_{22} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix} v_{31}$

$(3\ 2|1) \to - \begin{vmatrix} v_{13} & v_{23} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} v_{31}$

$2 \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{vmatrix}$

vagy $\sigma \in S_{k+l}$ DE $\cdot \frac{1}{k!\,l!}$

Fontos

$(\tau \wedge \lambda)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} (-1)^{|\sigma|} \tau(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \cdot \lambda(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}})$

$\tau \in \Lambda^k$, $\lambda \in \Lambda^l$

$\sigma \in S(k,l)$ ha $\sigma \in S_{k+l}$ és

$\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ és $\sigma_{k+1} < \dots < \sigma_{k+l}$

+ Asszociativitás!

Él szorzat DEF

2018b

Elemi formák:

(3) $(dx_1 \wedge dx_2) + (dx_3 \wedge dx_4) = \omega$

$\omega \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2$

$= 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$

(4) $\omega = dx_2 \quad \eta = dx_1 \wedge dx_2$

$\omega \wedge \eta = dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_2) \underset{\text{anti komm.}}{=} -dx_2 \wedge (dx_2 \wedge dx_1) \underset{\text{asszoc}}{=} -\underbrace{(dx_2 \wedge dx_2)}_{=0} \wedge dx_1$

(5) (a) $d\omega_1 = d(e^x \cos(xy)) = e^x(\cos(xy) - y\sin(xy))\,dx - xe^x \sin(xy)\,dy$

(b) $d\omega_2 = d(x\,dx + y\,dy) = \cancel{x_x'\, dx \wedge dx} + x_y'\, dy \wedge dx + y_x'\, dx \wedge dy + y_y'\, dy \wedge dy$

$= 0$

(c) $d\omega_3 = d(xyz\, dx \wedge dz) = yz\, dx \wedge dx \wedge dz + xz\, dy \wedge dx \wedge dz + xy\, dz \wedge dx \wedge dz$

$= -xz\, dx \wedge dy \wedge dz$

(I) legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \Rightarrow df = \underbrace{f_x'\, dx + f_y'\, dy + f_z'\, dz}$ $= \langle \operatorname{grad} f, de \rangle$

olyan mintha az lenne,
hogy $f_x'\, \underline{i} + f_y'\, \underline{j} + f_z'\, \underline{k}$

(II) legyen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad d(\langle F, de \rangle) = d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) =$

$=$

Differenciál formák

$$e^x \approx T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$(ai+bj+ck)\times(ei+fj+gk) =$$

$$= \cancel{ae\, i\times i} + af\, i\times j + ag\, i\times k +$$

$$+ ba\, j\times i + \cancel{bf\, j\times j} + bg\, j\times k +$$

$$ce\, k\times i + cf\, k\times j + \cancel{cg\, k\times k} =$$

$$= (af - ba)(i\times j)$$
$$+ (ag - ce)(i\times k)$$
$$+ (bg - cf)(j\times k) = \begin{vmatrix} b & f \\ c & g \end{vmatrix} (j\times k)$$

$i\times j = k$	$j\times k$	$dy\wedge dz$
$j\times k = i$	$k\times i$	$dz\wedge dx$
$k\times i = j$	$i\times j$	$dx\wedge dy$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$$ ugyanis az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázist alkot az $\mathbb{R}^3$-ban!

Ugyanígy dx, dy, dz bázist alkot az $\mathbb{R}^3$-ban

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\wedge$ vs. $\times$

A $\wedge$ szorzat a vektoriális szorzat általánosítása

$v = (v_1 \; v_2 \; v_3) \qquad u = (u_1 \; u_2 \; u_3)$

$$i \times i = 0 \qquad j \times j = 0 \qquad k \times k = 0$$

$$u \times v = (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \times (v_1 i + v_2 j + v_3 k) =$$

$$= u_1 v_2 \, i \times j + u_1 v_3 \, i \times k$$
$$+ u_2 v_1 \, j \times i + \qquad + u_2 v_3 \, j \times k$$
$$+ \qquad + u_3 v_1 \, k \times i + u_3 v_2 \, k \times j =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)(j \times k) \longrightarrow i$$
$$+ (u_3 v_1 - u_1 v_3)(k \times i) \longrightarrow j$$
$$+ (u_1 v_2 - u_2 v_1)(i \times j) \longrightarrow k$$

éppen ezért $\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} = dS$

tehát van $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\langle F, dl \rangle = f_1 \, dx + f_2 \, dy + f_3 \, dz$$

$$d(\langle F, dl \rangle) = \cancel{f'_{1x} \, dx \wedge dx} + f'_{1y} \, dy \wedge dx + f'_{1z} \, dz \wedge dx$$
$$+ f'_{2x} \, dx \wedge dy + \cancel{f'_{2y} \, dy \wedge dy} + f'_{2z} \, dz \wedge dy$$
$$\ldots \quad f'_{3y} \, dy \wedge d \qquad =$$

$$= (f'_{2x} - f'_{1y}) \, dx\,dy$$
$$(f'_{1z} - f'_{3x}) \, dz\,dx$$
$$(f'_{3y} - f'_{2z}) \, dy\,dz = (\mathrm{rot}\, F) \cdot \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$\wedge$ vs. $\times$

dS

$$S(u,u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix} \qquad d\underline{S} = \left(S'_u \times S'_v \right) d(u,v) =$$

$$= R \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(u,u) =$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} d(u,u)$$

$$d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

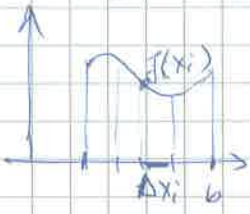
$$x(u,u) = R\cos u \Rightarrow \left.\begin{aligned} dx &= -R\sin u\, du \\ dy &= R\cos u\, du \\ dz &= dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow d\underline{S} = \begin{pmatrix} R\cos u\, du\, dv \\ dv\,(-R\sin u)\,du \\ (-R\sin u\, du)(R\cos u\, du) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R\cos u\, du\, dv \\ R\sin u\, du\, dv \\ -R^2 \sin u \cos u\, \cancel{du\,du} \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} du\, dv$$

differenciál formák értelmezése

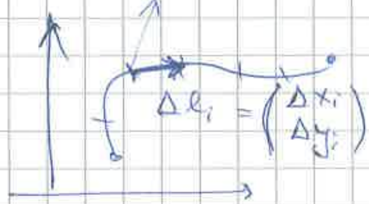
(1) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$



$$T \simeq \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) Legyen $\gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b] \}$

$\vec{F}(x_i, y_i)\ \vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

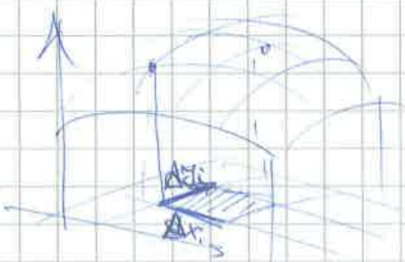


$$W \simeq \sum_i \left\langle \vec{F}(x_i, y_i), \Delta \ell_i \right\rangle = \sum_i f \Delta x_i + g \Delta y_i$$

határátmenetben:

$$\int_\gamma \underbrace{f(x,y)\,dx}_{\text{hossz}} + \underbrace{g(x,y)\,dy}_{\text{hossz}}$$

(3) Kettős integrál



$$V \simeq \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$\Leftarrow \iint \underbrace{f(x,y)\,dx \wedge dy}_{\text{terület}}$$

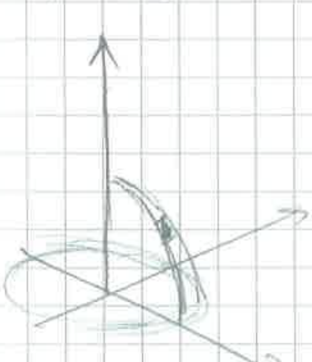
(4) Felületi integrál

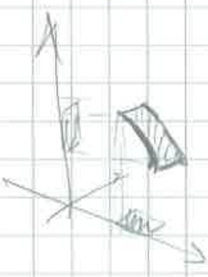
$x = \cos\theta \sin\varphi$
$y = \sin\theta \sin\varphi$
$z = \cos\varphi$

$\Delta x = -\sin\theta \sin\varphi\,\Delta\theta + \cos\theta\cos\varphi\,\Delta\varphi$

$\Delta y = \cos\theta \sin\varphi\,\Delta\theta + \sin\theta\cos\varphi\,\Delta\varphi$

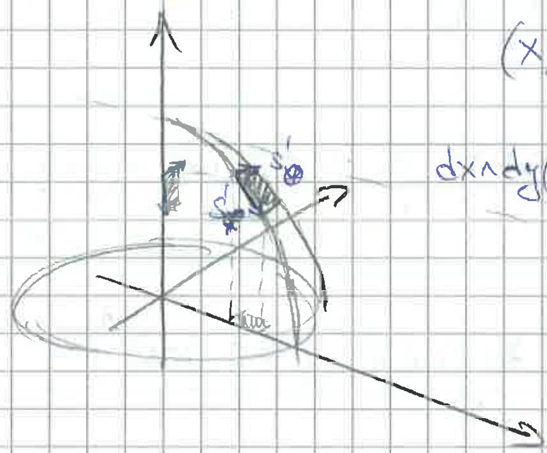
$\vec{F}_i := \vec{F}(x_i, y_i, z_i)$





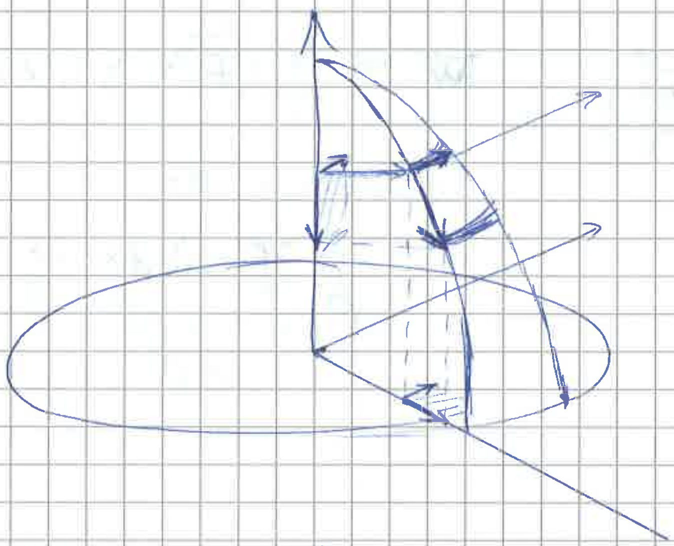
2018 b
Magyarázat

ha van egy felület darabkám



(x,y)-ra vett vetülete területe:

$$dx \wedge dy(s'_\theta, s'_\varphi) = \begin{vmatrix} s'_{1\theta} & s'_{1\varphi} \\ s'_{2\theta} & s'_{2\varphi} \end{vmatrix}$$



$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_R \langle \vec{F}(s(\theta,\varphi)), \underbrace{s'_\theta \times s'_\varphi}_{\text{területvektor}} \rangle \, d(\theta,\varphi)$$

↺ területvektor × irányú komponense a terület yt vetül

Analízis III. 6. heti feladatok

2018. október 15.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a síkon a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2. Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor $v, w \in \mathbb{R}^n$. Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$, ahol A a két vektort tartalmazó mátrix, $A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$

3. Mennyi a $v = (1, 0, 1)$ és $w = (0, 1, 0)$ vektorok általk kifeszített paralelogramma területe? Látjuk-e ezt szemléletesen is?

- egyes integrál
- vonal integrál
- kettős felületi integrál

formák
↳ hossz, T
↳ függvény
↳ vektor

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az 1-formák külső szorzata antiszimmetrikus. Ezért $\omega \wedge \omega = 0$, ha $\omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$.
Segítség: lássuk be, hogy az *elemi 1-formák* külső szorzata antiszimmetrikus:
$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. (Figyelem: $\omega \wedge \omega \neq 0$)

6. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

[HF$_1$] Adott $\mathbb{R}^2$-ben két 1-forma: $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$, $\tau = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D \cdot dx_1 \wedge dx_2$, ahol $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

(a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$-ban ill. $\mathbb{R}^n$-ben?

(b) Mi van a 'háttér'-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

- error propagation

7. Határozzuk meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:
(a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1 x_2)$ (b) $\cancel{\omega_2 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2}$ $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ (c) $\omega_3 = x_1 x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_3$.

8. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f dx_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $d(d\omega) = 0$.

[HF$_2$] Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

Error propagation:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \quad ; \quad \delta x := x - \bar{x}$$

$x = f(u, v, \dots)$ csak u, v-t tudjuk mérni, x-et nem!

$$\boxed{\delta x = \delta u \frac{\partial x}{\partial u} + \delta v \frac{\partial x}{\partial v} + \dots}$$

$$S_x^2 = \sum_{i,j} S^2_{u_i u_j}\frac{\partial x}{\partial u_j}\frac{\partial x}{\partial u_i} \quad ; \quad S^2_{u_i u_j} = \underbrace{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(u_{ik}-\bar{u}_i)(u_{jk}-\bar{u}_j)}_{=0 \text{ ha uncorrelated!}}$$

$$= \sum_i S^2_{u_i}\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 \quad \text{ha} \leftarrow$$

$$s(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \qquad s'_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\cdot\sin\varphi$$

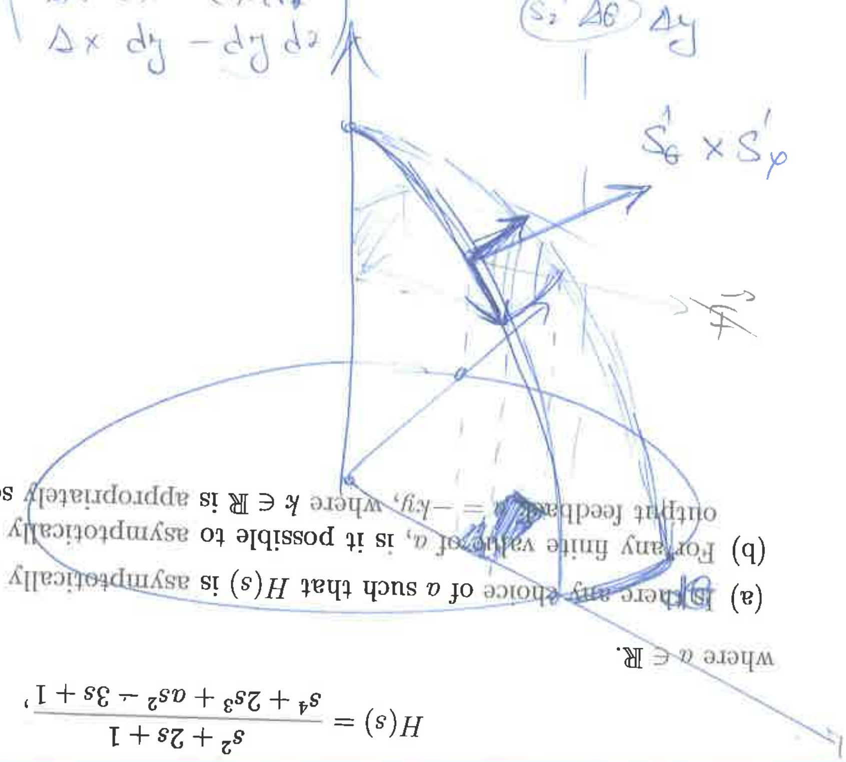
$$s'_\theta\,\Delta\theta \times s'_\varphi\,\Delta\varphi$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta y\,\Delta z - dz\,dy\\ \Delta z\,dx - dx\,dz\\ \Delta x\,dy - dy\,dx\end{pmatrix}$$

$(s'_\theta\,\Delta\theta)\,\Delta x$

$(s'_\theta\,\Delta\theta)\,\Delta y$

$s'_\theta \times s'_\varphi$



$$H(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^4+2s^3+as^2-3s+1},$$

where $a \in \mathbb{R}$.

(a) Is there any choice of a such that $H(s)$ is asymptotically stable? Why? (2p)

(b) For any finite value of a, is it possible to asymptotically stabilize $H(s)$ by a linear output feedback $u = -ky$, where $k \in \mathbb{R}$ is appropriately selected? Why? (3p)

rror propagation

pld:

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$$ meg ahogyjuk adni úgy új paraméterezéssel $(u,v) \in D$

$$\left.\begin{array}{l} u' = u+v \\ v' = u-v \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}(u'+v') \\ v = \frac{1}{2}(+u'-v') \end{array}}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

det $= -1-1=-2$ ✓

$$E = \langle r'_u, r'_u \rangle = \|(-R\sin u, R\cos u, 0)\| = R^2$$

$$F = \cancel{2}\langle r'_u, r'_v \rangle = (-R\sin u, R\cos u, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$G = 1$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ez egy tenzor}$$

Pirossal kiemelve!

$\vec{a}$ $a = a_1 r'_u + a_2 r'_v$

$\Downarrow$

$$a \cdot b = [a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

1. Az erdő fohásza Motiváció Oszh

2. Ház rajzolása a táblára mellette az erdő

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = r(u,v) \Bigg\} \Rightarrow$$

legyen $t \in (a,b)$

$r(u(t), v(t)) \longrightarrow$ ez egy görbe

$$\int_\Gamma dl = \int_\Gamma \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{} =$$

$$dx = x'_u\, du + x'_v\, dv = x'_u\, u'\, dt + x'_v\, v'\, dt$$

$$dx^2 = (x'_u u' + x'_v v')^2\, dt^2$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'_u u' + x'_v v')^2 + (y'_u u' + y'_v v')^2 + }\, dt$$

$$dl = \| dr(u,v) \| = \| r'_u\, du + r'_v\, dv \| =$$

$$= \| r'_u u' + r'_v v' \|\, dt = \sqrt{u'^2 \langle r'_u, r'_u \rangle + 2u'v' \langle r'_u, r'_v \rangle}\; dt$$

Reimann metrikus tenzor

Legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$ „henger"

Meg akarjuk adni más paraméterezéssel:

$$\begin{cases} u' = u+v \\ v' = u-v \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = \frac{1}{2}(u'+v') \\ v = \frac{1}{2}(u'-v') \end{matrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \det = -2 \checkmark$$

↳ mire is jó ez pontosan?

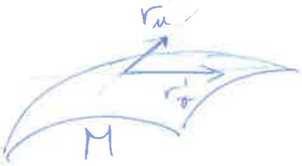
$$\left.\begin{aligned} E &= \langle r_u', r_u' \rangle = R^2 \\ F &= \langle r_u', r_v' \rangle = 0 \\ G &= \langle r_v', r_v' \rangle = 1 \end{aligned}\right\}$$

Reimann metrikus tenzor:

$$G = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Két vektor skalárszorzata: $a_M = a_1 r_u' + a_2 r_v'$ $\quad \vec{a}_M = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$b_M = b_1 r_u' + b_2 r_v'$



$$a \cdot b = a_1 \langle r_u', r_u' \rangle b_1 + a_1 \langle r_u', r_v' \rangle b_2 + \dots$$

$$= (a_1 \; a_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_M^{\,T} G_M \vec{b}_M$$

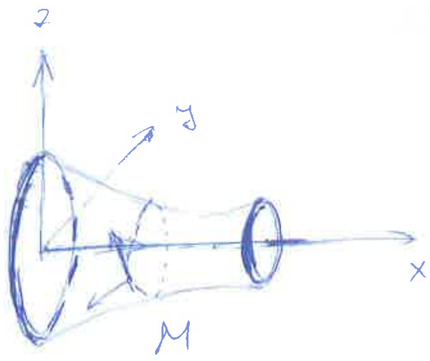
A tangenstér tulajdonképpen az a világ amelyben az adott görbült tér lakói lakanak

A normáltér az a világ amelyet az adott görbült tér lakói NEM látnak, nem tudnak elképzelni

Reimann m. tenzor
Hipertér, görbült

Tehát a szög két érintő vektor között:

$$\boxed{\langle \vec{a}_M, \vec{b}_M \rangle_M = \vec{a}_M^{\,T} \underbrace{G_M}_{\text{metrikus tenzor}} \vec{b}_M}$$



Legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \end{pmatrix}$

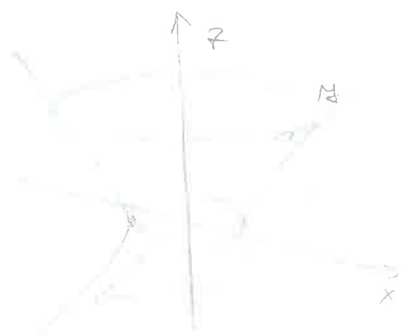
$$r'_u = \begin{pmatrix} 1 & f'(u)\cos v & f'(u)\sin v \end{pmatrix}^T$$

$$r'_v = \begin{pmatrix} 0 & -f(u)\sin v & f(u)\cos v \end{pmatrix}^T$$

$$G_M^{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1+f'^2(u) & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall (u,v) \in D\text{-re}$$

Legyen egy hiperboloid: $x^2+y^2-z^2=1$

$x^2+y^2=1+z^2$



$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2}\cos v \\ \sqrt{1+u^2}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$r'_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v & \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin v & 1 \end{pmatrix}^T$$

ha $z=0$

$$r'_v = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+u^2}\sin v & \sqrt{1+u^2}\cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_M = \begin{pmatrix} \frac{1+2u^2}{1+u^2} & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall u,v \in D\text{-re}$$

Lehet, hogy nem is ez a metrikus tenzor? Bár valahol írják, hogy a Riemann féle m. tenzor csak pozitív lehet!

legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ legyen $t \in (a,b)$

$r(u(t), v(t))$ ez egy görbe

Ennek hossza: $\int_\gamma \|d\underline{r}\| = \int_\gamma \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = (*)$

$dx = x'_u\,du + x'_v\,dv = x'_u\,u'\,dt + x'_v\,v'\,dt$

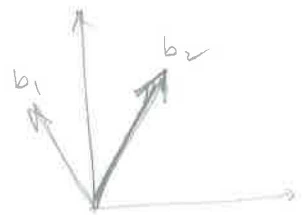
$dx^2 = (x'_u u' + x'_v v')\,dt^2$

$$(*) = \int_a^b \sqrt{(x'_u u' + x'_v v')^2 + (y'_u u' + y'_v v')^2 + (z'_u u' + z'_v v')^2}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{u'^2\langle r'_u, r'_u\rangle + 2u'v'\langle r'_u, r'_v\rangle + v'^2\langle r'_v, r'_v\rangle}\,dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(u'\ \ v')\, G_M \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}}\,dt$$

Ámúgy vehetünk helt egyenesed nem merőleges bázist,
és abból definiálunk egy új teret:



ugyanúgy: $(a_1\ \ a_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \langle \vec{a}_B, \vec{b}_B \rangle_B$

metrikus tenzor
görbült tér

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; u irány szerinti deriválja: $\langle \operatorname{grad} f, u \rangle = \left[\frac{d}{d\alpha} f(v + \alpha u)\right]_{\alpha=0}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \implies \frac{\partial f}{\partial v} \cdot u = \left[\frac{d}{d\alpha} f(v + \alpha u)\right]_{\alpha=0}$

$$\langle v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \langle v_2, w_1 \rangle \\ \langle v_2, w_1 \rangle & \langle v_2, w_2 \rangle \end{vmatrix} \to \text{external algebra!}$$

Inner product: $u^i v_i = \underline{u} \cdot \underline{v}$

Cross product: $\underline{u} \times \underline{v} = \varepsilon^i_{jk} u^j v^k e_i = \sum_{j,k} \varepsilon^i_{jk} u^j v^k e_i$

$\varepsilon^i_{jk} = \delta^{il} \underbrace{\varepsilon_{ljk}}$

↳ Levi-Civita symbol

sign of a permutation

$\varepsilon_{\dots i_p \dots i_q \dots} = - \varepsilon_{\dots i_q \dots i_p \dots}$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (1,2) \\ -1 & (i,j) = (2,1) \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Matrix mult.: $C^i_k = A^i_j B^j_k$

Trace of A^i_j : A^i_i

Outer product: $A^i_j = u^i v_j = (uv)^i_j$

$j = 1: \sum_{j,k} \varepsilon^1_{jk} u^j v^k e_i =$

$$= \varepsilon^1_{23} u^2 v^3 e_1 + \varepsilon^1_{32} u^3 v^2 e_1$$

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon^2_{13} = \delta^{2l} \varepsilon_{l13} = \delta^{22} \varepsilon_{213} = \varepsilon_{213}$$

Raising index: $T^\alpha_\beta \implies T^{\mu\alpha} = g^{\mu\sigma} T^\alpha_\sigma$ } Ez már magas

TODO: metric tensor

lowering

Einstein notation

Jacobi identity:

$$a\times(b\times c)+b\times(c\times a)+c\times(a\times b)=0$$

Ha van nekem: !!

$$(u_1e_1+u_2e_2)\wedge(v_1e_1+v_2e_2)=\cancel{u_1v_1e_{11}}+u_1v_2e_{12}$$
$$u_2v_1e_{21}+\cancel{u_2v_2e_{22}}$$
$$=(u_1v_2-u_2v_1)e_{12}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 & v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1v_1 & u_1v_2\\u_2v_1 & u_2v_2\end{pmatrix}}$$

↳ Tensor product

$$\boxed{(u\cdot v^T)=(v\cdot u^T)^T}$$

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1u_1 & v_1u_2\\v_2u_1 & v_2u_1\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bivector}} 1$ dim

$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{bivector}} 3$ dim

$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{bivector}} 6$ dim

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{bivector}} \binom{n}{2}$ dim

$$\boxed{\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{k-vector}} \binom{n}{k} \text{ dim}}$$

Bivector ≡ skew symmetric matrix.

Lie algebra:

$[x,y]=xy-yx$

↳ bilinear

↳ $[x,x]=0$: „alternativity"

↳ Jacobi identity

↳ anticommutative

Heisenberg algebra

$[x,y]=$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{x}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{y}-\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{z}$$

Bivector:

$$\boxed{\begin{aligned}a\wedge b&=\tfrac{1}{2}(ab-ba) \text{ ext.}\\ a\cdot b&=\tfrac{1}{2}(ab+ba) \text{ inl}\end{aligned}}$$

$a\cdot b+a\wedge b=ab$

„The exterior product of two vectors is a bivector"

Jelölés: $B=e_1\wedge e_2=e_1e_2=e_{12}$

pld: $C=e_{12}+e_{34}$ nem írható fel két vector $\wedge$ szorzataként

Einstein notation

Maxwell egyenletek a „space-time"-ban: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\oiint_{\partial\Omega} E\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho\,dV \qquad \nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{\partial\Omega} B\,dS = 0 \qquad \nabla B = 0$$

$$\oint_{\partial\Sigma} E\,dl = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B\,dS \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} B\,dl = \mu_0 \iint_{\Sigma} J\,dS + \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_{\Sigma} E\,dS \qquad \nabla \times B = \mu_0\left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$E = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

ϕ → scalar potential

$$B = \nabla \times A$$

A → vector potential

Másik forma:

$$\oiint_{\partial\Omega} E\,dS = 4\pi \iiint_{V} \rho\,dV \qquad \nabla E = 4\pi\rho$$

$$\oiint_{\partial\Omega} B\,dS = 0 \qquad \nabla B = 0$$

$$\oint_{\partial\Sigma} E\,dl = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma} B\,dS \qquad \nabla \times E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} B\,dl = \frac{1}{c}\left[4\pi \iint_{\Sigma} J\,dS + \frac{d}{dt}\iint_{\Sigma} E\,dS\right] \qquad \nabla \times B = \frac{1}{c}\left(4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

electric, magnetic bivector: $\boxed{\bar{E}, \bar{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{3,1})}$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{c}\bar{E} e_4 + \bar{B} e_{123} \quad = \text{Electromagnetic tensor!}$$

$$\mathbb{J} = \bar{j} + c\rho e_4 = \text{4-current}$$

$\bar{j}$ → current density

ρe_4 → charge density

$$\nabla M = \nabla \cdot M + \nabla \wedge M = \text{„div + rot" bivektorosan}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla}\right) = \partial_\mu = {}_{,\mu} \quad \Big\}\ \text{covariant}$$

$$\partial^\alpha = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial_t}{c}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z\right) \quad \Big\}\ \text{contravariant}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu = \underbrace{g^{\mu\nu}}_{\text{inverse Minkowski metric}} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \implies \text{hullámegyenlet!}$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

SR : special rel

GR : general rel.

$$(ai + bj + ck) \wedge (ei + fj + gk) = \begin{pmatrix} 0 & af - be & ag - ce \\ & 0 & bg - cf \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Einstein notation

(+1) $S = S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ $\quad \omega = f\,dxdy + g\,dydz + h\,dxdz$

$\int_S \omega = ? \quad = \iint_S (g,-h,f)\,dS$

$dS = \begin{pmatrix} dydz \\ dzdx \\ dxdy \end{pmatrix}$

Analízis III. 6. heti feladatok

2015. október 16.

Differenciál formák. Külső deriválás.

1. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \qquad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

2. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega_1 = e^x \cos(xy), \qquad \omega_2 = xdx + ydy, \qquad \omega_3 = xyz\ dx \wedge dz.$$

3. (HF) (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx_1$, ahol f kétszer differenciálható 2 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$.

Integrálás sokaságokon.

(1) 4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x,y,z)\ dx \wedge dy$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

(2) 5. (HF) Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\ dx + f_2(x,y,z)\ dy + f_3(x,y,z)\ dz$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek

(6) 6. Igazolja, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

(5) 7. Igazolja, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u,v) \le z \le t(u,v),\ \ (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

(3) $n=2$-ben, sokaságon vett integrál
$k=1$, $k=2$ dim $\quad (x,y) \to \iint d(x,y) \quad \int ds$

2016
10. hét

(4) $n=2$, $k=2$ esetben ált Stokes tétel ? $\Rightarrow$ GREEN tétel
DIFFEGR...

$$(a\,dx + b\,dy) \wedge (c\,dx + f\,dy) =$$

$$= ac\,\cancel{dx \wedge dx} + af\,dx \wedge dy + bc\,dy \wedge dx + \cancel{bf\,dy \wedge dy} =$$

$$= (af - bc)\,dx \wedge dy$$

Green T:

$$\oint_{\partial\Delta} P\,dx + Q\,dy = \iint_\Delta d(P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \iint_\Delta \cancel{P'_x\,dx \wedge dx} + P'_y\,dy \wedge dx + Q'_x\,dx \wedge dy + \cancel{Q'_y\,dy \wedge dy} =$$

$$= \iint_\Delta -P'_y\,dx \wedge dy + Q'_x\,dx \wedge dy$$

$$= \iint_\Delta (Q'_x - P'_y)\,dx \wedge dy$$

Green tétel

$$\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \iint_S P'_y\,dy\,dx + Q'_x\,dx\,dy + P'_z\,dz\,dx + R'_x\,dx\,dz +$$

$$+ Q'_z\,dz\,dy + R'_y\,dy\,dz =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\,dy\,dz + (P'_z - R'_x)\,dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$$d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

Klasszikus Stokes tétel!

$\boxed{\text{Stokes T}}$

$$dS = \sqrt{(dy\,dz)^2 + (dz\,dx)^2 + (dx\,dy)^2}$$

$$\sqrt{\left|\quad\right|^2 + \left|\quad\right|^2 + \left|\quad\right|^2}$$

$$dS = |S'_u \times S'_v|\ du\,dv$$

Analízis III. 7. heti feladatok
2017. október 27.

Differenciál formák, külső deriválás $\mathbb{R}^3$-ban.

1. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:
   (a) $\omega_1 = e^x \cos(xy)$ (b) $\omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ (c) $\omega_3 = xyz\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$.

2. • Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$-ban.
   • deriválás, külső deriválás
   • $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z \longleftrightarrow (f, g, h)$
   • $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, elemei formák $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val való analógiája

3. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:
$$\omega = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z.$$
   Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:
$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$
   Az ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál forma differenciál 2-forma:
   (a) $\omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ (b) $\omega = f(x, y, z)\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$
   Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:
$$M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$
   Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

[F] 5 Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x, y, z)\ \mathrm{d}x + f_2(x, y, z)\ \mathrm{d}y + f_3(x, y, z)\ \mathrm{d}z$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\displaystyle\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

6. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.
   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u, v))\ :\ (u, v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazoljuk, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.
   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u, v) \le z \le t(u, v),\ \ (u, v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

8. Igazoljuk, hogy ha $F\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén
$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = 0,$$
   ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.

Integrálok sokasága:

I egységkörön $\iint f(x,y)\, d(x,y)$

II vonal mentén $\int_\gamma f\, dl$ (skalár függvény)

III vonal mentén $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$

IV felület mentén integrálja $\int f_1\, dy\,dz$

V felület mentén integrálja a $\int \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$

VI térfogati integrál a hengeren

Poincaré lemma

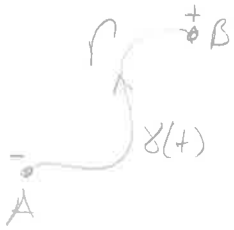
$\mathbb{R}^3$-ban differenciál formák + Stokes T spec. esetei

Integrálok áttekintése

$\boxed{n = 3}$

① $k = 1$: $M = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b] \}$

legyen egy diff-0 forma : $\omega_0 = f(x,y,z)$



$\partial M = \{ \underset{-}{A}, \underset{+}{B} \}$

$d\omega_0 = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \underbrace{\langle \text{grad } f, d\underline{l} \rangle}_{\text{potenciálos}}$

$$\int_M d\omega_0 = \int_{\partial M} \omega_0$$

$$\boxed{\int_M \langle \text{grad } f, d\underline{l} \rangle = \int_{\partial M} f} = \int_A^B f = f(B) - f(A)$$

Tehát potenciálos F vektormező vonalintegrálja :

$$\int_\Gamma F \, d\underline{l} = f(B) - f(A) \quad \text{ahol } \underline{F = \nabla f}$$

---

② $k = 2$: $M = \{ S(u,v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in D \}$

$\partial M =$ zárt görbe

$\omega_1 = F \, d\underline{l} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

$d\omega_1 = \langle \nabla \times F, d\underline{S} \rangle$ emlék: $d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$

$$\int_M d\omega_1 = \oint_{\partial M} \omega_1$$

$$\int_M \langle \nabla \times F, d\underline{S} \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, d\underline{l} \rangle$$

2016

$k = 3$ $\quad M \in \mathbb{R}^3$ összefüggő TELJES BIM térrész.

$\partial M \in \mathbb{R}^3$ zárt felület.

$$\omega_2 = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy = F\,d\underline{S} \qquad F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

$$d\omega_2 = \left(f'_x + g'_y + h'_z\right) dx\,dy\,dz = \nabla F \cdot dV$$

$$\int_M d\omega_2 = \oint_{\partial M} \omega_2 \longrightarrow \int_M \nabla F\,dV = \oint_{\partial M} F\,d\underline{S}$$

$\boxed{n = 2}$ ha $k = 1$ (u.a. mint $n = 3, k = 1$)

② $k = 2$ adott egy $M \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz reinhdmosa $\mathbb{R}^2$-nek

~~adott~~ $\partial M \subset \mathbb{R}^2$ 1-dim. sík.

$$\omega_1 = P\,dx + Q\,dy$$

$$d\omega_1 = d(P\,dx + Q\,dy) = \cancel{P'_x\,dx \wedge dx} + P'_y\,dy \wedge dx + Q'_x\,dx \wedge dy + \cancel{Q'_y\,dy \wedge dy} = (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$$

$$\int_M d\omega_1 = \int_{\partial M} \omega_1 \longrightarrow \boxed{\int_M (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy}$$

(1) $\mathbb{R}^3$-ban legyen egy diff-2-forma : $\omega = f\,dx\,dy$

$M \subset \mathbb{R}^3$: $M = \{\overbrace{(u, v, \varphi(u,v))}^{\Phi(u,v)} \mid (u,v) \in D\}$

$$\int_M \omega \overset{\Delta}{=} \int_D \omega(D\Phi)\,du\,dv$$

$$\omega(D\Phi) = f(\Phi(u,v))\Big[(dx \wedge dy)(D\Phi)\Big] =$$

$$= f(\Phi(u,v))\left[(dx\wedge dy)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \varphi'_u & \varphi'_v\end{pmatrix}\right] =$$

$$= f(\Phi(u,v))\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = f(\Phi(u,v))$$

$$\int_M \omega \overset{\Delta}{=} \int_D f(\Phi(u,v))\,du\,dv$$

definíció szerint

Nem definíció szerint, hanem formulában:

$$\int_M \omega = \int_M f\,dx\,dy = \int_M f(\underline{r})\,dx\,dy = \int_D f(\Phi(u,v))\,du\,dv$$

$x(u,v) = u$

$y(u,v) = v$

$dx = x'_u\,du + x'_v\,dv = du$

$dy = y'_u\,du + y'_v\,dv = dv$

ha $\omega = f\,dx\,dz$, $M = \{s(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$

$$\int_M \omega \overset{\Delta}{=} \int_D \omega(Ds)\,du\,dv \overset{(*)}{=} \int_D f(s(u,v))\,\varphi'_v\,du\,dv$$

$$\omega(Ds) = (f\,dx\,dz)(Ds) = f(s)\Big[\underbrace{dx\,dz\,(Ds)}_{\begin{vmatrix}1 & 0\\ \varphi'_u & \varphi'_v\end{vmatrix} = \varphi'_v \ (*)}\Big] \quad ; \quad Ds = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \varphi'_u & \varphi'_v\end{pmatrix}$$

2016

hol 3 gyak.

10. hét - 1 -

Általánosabban: adott egy $\omega = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy$

$$M = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

$$\int_M \omega = \int_D \omega(Ds)\,du\,dv \overset{(*)}{=\!=} \int_D \left\langle F(s(u,v)), s'_u \times s'_v \right\rangle$$

$$Ds = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$\omega(Ds) = f(s)\underbrace{\left[dy\,dz(Ds)\right]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}}_{y'_u z'_v - z'_u y'_v}} + g(s)\underbrace{\left[dz\,dx(Ds)\right]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}}_{z'_u x'_v - x'_u z'_v}} + h(s)\underbrace{\left[dx\,dy(Ds)\right]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}_{x'_u y'_v - y'_u x'_v}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f(s) & g(s) & h(s) \end{pmatrix}}_{F^T(s(u,v))} \underbrace{\begin{pmatrix} y'_u z'_v - z'_u y'_v \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix}}_{s'_u \times s'_v} = \left\langle F(s(u,v)), s'_u \times s'_v \right\rangle \quad (*)$$

DEFINICIÓ SZERINT

Intuitívabban: $dy\,dz = (y'_u\,du + y'_v\,dv) \wedge (z'_u\,du + z'_v\,dv) =$

$$= (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} du\,dv$$

④ $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=c\}$

$\exists$ paraméteres diffható megoldsa:

$M = \{\gamma(t)\in\mathbb{R}^2 \mid t\in[a,b]\}$

ekkor $f(\gamma(t)) = c \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} f(x,y) \perp$ érintővekt.

$\forall t: \binom{x}{y} = \gamma(t)$

$[\operatorname{grad} f(r)]_{r=\gamma(t)} \cdot \dot\gamma(t) = 0$

$[\operatorname{grad} f(r)]_{r=\gamma(t)} \perp \dot\gamma(t)$

⑤ $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos $\Rightarrow \exists G : \underline{F = \nabla\times G}$

$$\iint_S F\,d\underline{S} \overset{\text{Stokes}}{=} \iiint_{\text{Int}(S)} d(\underbrace{F\,d\underline{S}}_{d\omega_1}) = 0$$

legyen $\omega_1 = \langle G, d\underline{\ell}\rangle \in \Lambda^1(\mathbb{R})$

$d\omega_1 = \langle \nabla\times G, d\underline{S}\rangle \in \Lambda^2(\mathbb{R})$

$d(d\omega_1) \equiv 0$

D8* $\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

$r := \Phi(r)$

2017b

hal 3 zh

10. lat -2

DIFFGEO3

$\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ ← nem. diff. forma $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ → differenciál 0 forma

$\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^{n \times 2}$ mert alternálónak kell lennie

Ékv. definíció: $\omega \wedge \tau \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

$\tau \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$

Tulajdonságok:
- asszociatív
- $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl} \tau \wedge \omega$
- $(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) \wedge \tau = \alpha_1 \omega_1 \wedge \tau + \alpha_2 \omega_1 \wedge \tau$
- $dx_I \wedge dx_J = \begin{cases} 0 & \text{ha } I \cap J \neq \emptyset \\ dx_{I \cup J} & \text{ha } I \cap J = \emptyset \end{cases}$

$I, J \in \{1, n\}$

$|I| = k \quad |J| = l$

Poincare lemma: „$d^2 = 0$"

$\omega = f(x, y, z)$

$d\omega = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$

$$d(d\omega) = f''_{xx} \, dx \wedge dx + f''_{xy} dy\,dx + f''_{xz} dz\,dx$$
$$+ f''_{yx} dx\,dy + 0 + f''_{yz} dz\,dy$$
$$+ f''_{zx} dx\,dz + f''_{zy} dy\,dz + \cancel{f''_{zz} dz\,dz} = 0$$

2017b

6. ea

Anal 3

1.) 0 formá~~ban~~ $\omega_0 = f(x,y,z)$ skalármező

$\omega_0 \xmapsto{T_0} f$

2) 1 forma $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ - beli bázis dx, dy, dz

$\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$\omega_1 \longmapsto F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$T_1 : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \{F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\}$

legyen $\omega_1 = d\omega_0 = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$

$$\boxed{T_1(d\omega_0) = \mathrm{grad}(T_0\omega_0)}$$

3) 2 forma $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ - beli bázis $dx\,dy \quad dx\,dz \quad dy\,dz$

$\omega_2 = F\,dx\,dy + G\,dx\,dz + H\,dy\,dz$

$F, G, H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$\omega_2 \longmapsto \begin{pmatrix} +H \\ -G \\ +F \end{pmatrix}$

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$d\omega_1 = (-f'_y + h'_x)\,dx\,dy + (f'_z + h'_x)\,dx\,dz + (-g'_z + h'_y)\,dy\,dz$

$= \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ h'_x - f'_y \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}}_{d\vec{S}}$

4) 3 forma $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$: $dx\,dy\,dz$

$T^3 : \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \to \{\text{skalármezőkre}\}$

$d\omega_2 = (F'_z - G'_y + H'_x)\,dx\,dy\,dz \Rightarrow T_3(d\omega_2) = \mathrm{div}(T_2\omega_2)$

20176
6. ea
Anal 3

$$\int_M \omega = ?$$

ω diff k forma $\mathbb{R}^n$-ben

$M \subset \mathbb{R}^n$ k dim diff sokaság

$$\int_M \omega = k \text{ dim-s többes integrál}$$

Pl $n = k = 3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ nyílt térrész

$\omega = f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Pl $\mathbb{R}^2$-ben $k = 1$

$\omega = f(x,y)\, dx \qquad \tau = g(x,y)\, dy$

M 1-dim sokaság $\equiv C$ görbe

$C = \{ \sigma(u) \mid u \in [a,b] \}$

$\sigma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$

$\sigma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$

$$\int_M \omega = \int_C f(x,y)\, dx = \int_a^b f(\sigma(u))\, x'(u)\, du$$

$(x,y) \longleftrightarrow \sigma(u)$

$dx \longleftrightarrow x'(u)\, du$

$C \longleftrightarrow [a,b]$

$\sigma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ diff „térkép"

$$D\sigma = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix}$$

$dx(D\sigma) = x'(u)$ $\Leftarrow$ ez miért van így $\quad dx = x'dt$

$dx + dy = x'dt + y'dt$

$dx(t) = dx(\dot{\gamma}(t))\,dt$

M k dim. sokaság

Tfh egyetlen térképpel megadható

$\exists\, \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$\phi(B) = M$ egy-egy ért.

B egyszeresen $\mathbb{R}^k$-ban

$D\phi$ teljes rangú ; ω diffható k-forma $\in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

<u>DEF</u> $$\int_M \omega = \int_B \omega(d\phi)\, d(u_1, \dots, u_k)$$

M felület $\mathbb{R}^3$-ban

$S = M = \{(u, v, \varphi(u,v)) : (u,v) \in D\}$, legyen $\omega = f\,dx\,dy$

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u,v) \end{pmatrix}$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

$$\int_M \omega = \iint_D f(u,v,\varphi(u,v)) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d(u,v)$$

<u>Pl</u> : $M = \{S(u,v) \mid (u,v) \in D\}$

$\omega = f\,dx\,dy + g\,dy\,dz + h\,dx\,dz$

2017b

Stokes tétel

$\mathbb{R}^n$-ben adott M k- dim sokaság

Hgy ∂M $k-1$ dim. sokaság

Adott ω egy diff. $k-1$ forma

Ekkor $\displaystyle\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

spec eset: $n=1$, $k=1$

$\mathbb{R}^1$-ben $M=(a,b) \Longrightarrow \partial M = \{a,b\}$

$\omega = f(x)$ 0 forma

$d\omega = f'(x)\,dx$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_{\{a,b\}} f(x) = f(b)-f(a)$$

Spec eset $n=2$ $k=2$

$\mathbb{R}^2$-ben $M \subset \mathbb{R}^2$

∂M: zárt görbe

$\omega = P\,dx + Q\,dy$

$d\omega = -P'_y\,dx\,dy + Q'_x\,dx\,dy$

$$\int_M \left(-P'_y + Q'_x\right) dx\,dy = \oint_{\partial M} P\,dx + Q\,dy$$

2017b

6. ea

hud 3

-5-

Differenciál formák $\mathbb{R}^3$-ban

legyen $\omega_0 = f(x,y,z)$

$$d\omega_0 = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{e}\rangle$$

---

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz = \langle \vec{F}, d\vec{e}\rangle$

$$\begin{aligned} d\omega_1 = {} & f'_y\,dy\,dx + f'_z\,dz\,dx \\ & + g'_x\,dx\,dy + g'_z\,dz\,dy \\ & + h'_x\,dx\,dz + h'_y\,dy\,dz = \\ = {} & (h'_y - g'_z)\,dy\,dz + (f'_z - h'_x)\,dz\,dx + (g'_x - f'_y)\,dx\,dy \\ = {} & \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}}_{:= d\vec{S}} = \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S}\rangle \end{aligned}$$

ahol $\vec{F} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}$$

---

legyen $\omega_2 = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy = \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle$

$$d\omega_2 = (f'_x + g'_y + h'_z)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV = d(x,y,z)} = \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dV$$

$\cancel{d\vec{S}(D\phi)\,du\,dv = \left(dy\,dz(D\phi)\right)du\,dv}$

$\cancel{dy\,dz(D\phi) = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} =}$

Differenciálformák $\mathbb{R}^1$-ben:

legyen $\omega_0 = f \in \Lambda^0(\mathbb{R})$

$$d\omega_0 = f_x\,dx \in \Lambda^1(\mathbb{R})$$

Differenciálformák $\mathbb{R}^2$-ben:

legyen $\omega_0 = f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^2)$

$$d\omega_0 = f'_x\,dx + f'_y\,dy = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{e}\rangle$$

---

legyen $\omega_1 = P\,dx + Q\,dy = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \langle \vec{F}, d\vec{e}\rangle$

$$d\omega_1 = P'_y\,dy\,dx + Q'_x\,dx\,dy$$

$$= \left(-P'_y + Q'_x\right) dx\,dy$$

legyen $\omega_0 = f\,dx\,dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$

$n=3 \quad k=3$ (divergencia tétel)

legyen $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy = \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$d\omega = \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = (f'_x + g'_y + h'_z)\,dx\,dy\,dz$$

$M \subset \mathbb{R}^3 \qquad \partial M$ egy felület

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega \qquad \text{azaz} \qquad \int_M \operatorname{div} \vec{F}\,dV = \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$n=3 \quad k=2$ (Stokes tétel)

$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle \implies d\omega = \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ 2 dim. sokaság

$$\int_M \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle$$

$n=3 \quad k=2$ (Potenciálfüggvény tétel)

$\omega \in \Lambda^0(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = f \implies d\omega = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{e} \rangle$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dim. sokaság

$$\int_M \langle \operatorname{grad} f, d\vec{e} \rangle = \int_{\partial M} f = f(B) - f(A)$$

2017b

DIFFGEOM 3

hét 3
gyak 7

Vektoriális szorzat

$$\omega = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz = \overbrace{(f_1 \;\; f_2 \;\; f_3)}^{\vec F}\, d\vec{l}$$

$$\tau = g_2\,dx + g_2\,dy + g_3\,dz = \underbrace{(g_1 \;\; g_2 \;\; g_3)}_{\vec G}\, d\vec{l}$$

$$\omega \wedge \tau = \langle \vec F \times \vec G,\; d\vec S \rangle$$

ugyanis: $\omega \wedge \tau = f_1 g_2\,dx\,dy - g_1 f_2\,dx\,dy$

$$+ (f_3 g_1 - f_1 g_3)\,dz\,dx$$

$$+ (f_2 g_3 - f_3 g_2)\,dy\,dz = \cancel{(f_1 g_2 - f_2 g_1}$$

$$= \begin{pmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$= \langle \vec F \times \vec G,\; d\vec S \rangle$$

$$\omega \xmapsto{T_1} \vec F$$

$$\tau \longmapsto \vec G$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec F &= T_1(\omega) \\ \vec G &= T_1(\tau) \\ \vec F \times \vec G &= T_2(\omega \wedge \tau) \end{aligned}}$$

$d\vec{S}$ miért az ami?

Eddig: $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param.}} \iint_D \langle \vec{F}(\phi(u,v)), \phi'_u \times \phi'_v \rangle d(u,v)$

tehát $d\vec{S} \xrightarrow[\text{behely.}]{\text{param.}} (\phi'_u \times \phi'_v)\, du\, dv$

$$S = \left\{ \phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \qquad \phi'_u \times \phi'_v = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix}$$

Differenciálformák ismeretében,

legyen $d\vec{S} = \begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}$

$$d\vec{S} \xrightarrow[\text{behelyett.}]{\text{param.}} d\vec{S}(D\phi)\, du\, dv = \begin{pmatrix} dy\, dz(D\phi) \\ dz\, dx(D\phi) \\ dx\, dy(D\phi) \end{pmatrix} du\, dv =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \end{pmatrix} du\, dv$$

$d\vec{S}$

DIFFGEOM3

2017b

hud 3 gyak 7

Differenciál formulák integrálása

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy = (f \;\; g \;\; 0)\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\rangle$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in [a,b] \right\} \Rightarrow D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

legyen $\omega_2 = f\,dy\,dz = (f \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} = \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle$

$$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in D \right\} \Rightarrow Ds(u,v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

Integrálás definíció szerint:

$$\int_\Gamma \omega_1 = \int_a^b f(\gamma(t))\, \underbrace{dx(D\gamma(t))}_{x'(t)}\,dt + g(\gamma(t))\, \underbrace{dy(D\gamma(t))}_{y'(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\, x'(t)\,dt + g(\gamma(t))\, y'(t)\,dt$$

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{\ell}\rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,dt \quad \text{(ahogy eddig csináltuk)}$$

$$\int_S \omega_2 = \iint_D f(s(u,v))\; dy\,dz\big(Ds(u,v)\big)\ \cancel{d(u,v)}\ du\,dv$$

$$= \iint_D f(s(u,v)) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} du\,dv$$

$$= \iint_D f(s(u,v))\ \boxed{!\,(y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv}$$

ez lett a $dy\,dz$-ből

$dy\,dz = (y'_u\,du + y'_v\,dv) \wedge (z'_u\,du + z'_v\,dv) = y'_u z'_v\,du\,dv + y'_v z'_u\,dv\,du = (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv$

ahogy eddig csináltuk volna:

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iint_S \langle \vec{F}(s(u,v)),\ s'_u \times s'_v \rangle\, d(u,v)$$

$$= \iint_S \left\langle \vec{F}(s(u,v)),\ \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \right\rangle d(u,v)$$

$$= \iint_S f(s(u,v)) \cdot (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv$$

DEF szerinti $\int$

2017b

hét 3

gyak 7

DiffGeom 1

Differenciál formulák integrálása

Definíció szerint $\Leftarrow$ legyen $\begin{cases} \omega_1 = f\,dx + g\,dz \\ \Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in [a,b] \right\} \end{cases}$

legyen $\begin{cases} \omega_2 = f\,dy\,dz \\ S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in D \right\} \end{cases}$

F2 :

$$\oint\!\!\oint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_V 1\,dV =$$

$$= \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1\,dz\,d(x,y) = \iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y)$$

$$= \int_0^R \int_0^{2\pi} 1 - r^2\,d\vartheta\,dr = 2\pi \cdot \left(r - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left(R - \frac{R^3}{3} \right) = \cancel{\frac{2\pi R^2}{3}}$$

Gauss tétel levezetése a Stokes tételből:

$$\boxed{\oiint_S \langle F, d\underline{S} \rangle = \iiint (\operatorname{div} F)\, dV}$$

legyen $F = (f, g, h)$

$$d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = f\, dy dz + g\, dz dx + h\, dx dy = \langle F, d\underline{S} \rangle$$

$$d\omega_2 = (\operatorname{div} F)\, \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

Hogyan lehetne ezt a legkorrekt[ebben] levezetni

legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 3 dim sokaság (i.e. tartomány) összefüggő

ekkor $\partial M \subset \mathbb{R}^3$ egy zárt 2 dim sokaság.

legyen ω egy diff 2 forma:

$$\omega_2 = f_1\, dy dz + f_2\, dz dx + f_3\, dx dy = F \cdot d\underline{S}$$

$$d\omega_2 = (\operatorname{div} F)\, \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

tehát

$$\oint_{\partial M} \omega_2 = \int_M d\omega_2 \iff \oint_{\partial M} \langle F, d\underline{S} \rangle = \int_M (\operatorname{div} F)\, dV$$

∫-ás sokaságon diff formá[n]

$\Phi : D \to M$

$$\boxed{\int_M \omega = \int_D \omega(\Phi) \, du_1 \dots du_k}$$

$$\omega_0 \in \Lambda^0(\mathbb{R}^3) \equiv \mathbb{R}$$

$$\omega_0 = f(r)$$

$$d\omega_0 = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz = \langle \operatorname{grad} \omega_0, d\underline{l} \rangle$$

$$\omega_1 = f\, dx + g\, dy + h\, dz = \langle F, d\underline{l} \rangle$$

$$d\omega_1 = \langle \operatorname{rot} F, d\underline{S} \rangle$$

$$\omega_2 = f\, dy dz + g\, dz dx + h\, dx dy = \langle F, d\underline{S} \rangle$$

$$d\omega_2 = (\operatorname{div} F)\, dV$$

$$d\underline{l} \triangleq \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$d\underline{S} \triangleq S'_u(u,v) \times S'_v(u,v)\, du\, dv$$

$$dV \triangleq \text{"} d(x,y,z) \text{"} = dx\, dy\, dz$$

2017

Anal 3
gyak 10.

Általános Stokes $\Longrightarrow$ Speciális Stokes

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

I $\quad \omega = \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$

II $\quad d\omega = \langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle \quad$ feltéve $\quad d\vec{S} = \begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}$

III $\quad$ hogy is volt eddig $\quad d\vec{S} \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param.}} (\vec{s}_u' \times \vec{s}_v')\, d(u,v)$

van-e köze a kettőnek egymáshoz

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

legyen $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz = \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ ahol $\vec{F} = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g \\ h \end{pmatrix}$

és $d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$$d\omega = -f_y'\, dx\, dy + f_z'\, dz\, dx + g_x'\, dx\, dy - g_z'\, dy\, dz - h_x'\, dz\, dx + h_y'\, dy\, dz = \underbrace{\begin{pmatrix} h_y' - g_z' \\ f_z' - h_x' \\ g_x' - f_y' \end{pmatrix}^T}_{\nabla \times \vec{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}}_{:= d\vec{S}} = \underbrace{\langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_{\text{diff 2-forma}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \iint_M \langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle}$$

DIFFGEOM $\quad$ Stokes $\Rightarrow$ Stokes 2018

Paraméteres behelyettesítése eddig / innentől (∫ sokaságon)

$$\iint_M \langle \vec{F}, d\vec{s}\,\rangle = \iint_D \langle \vec{F}(s(u,v)),\ s'_u \times s'_v \rangle \, d(u,v)$$ eddig!

A sokaság paraméteres megadása:

$$M = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow dy\,dz \\ \leftarrow dz\,dx \\ \leftarrow dx\,dy \end{array}$$

$$(dx \wedge dy)(Ds) = (dx \wedge dy)\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Általános ∫-ból vezessük le a felületekhez $\boxed{\text{levezetés}}$ $\boxed{\text{képletét}}$

$$\iint_M \langle F, d\vec{s}\,\rangle = \iint_D \langle F(s(u,v)),\ s'_u \times s'_v \rangle \, du\,dv$$

miért van így?

$$\langle F, d\vec{s}\,\rangle = f\,dy\,dz + \dots$$

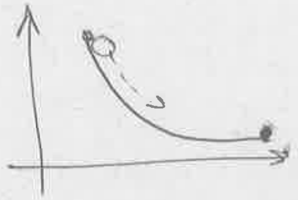
$$f\,dy\,dz \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param}} f(s(u,v)) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

...

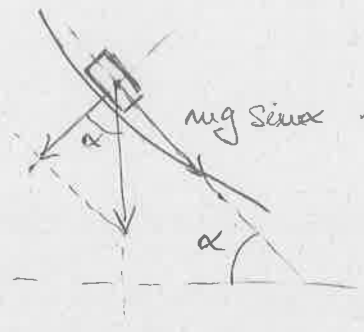
ebből jön ki a lényeg! ...

Variációszámítás — Courant John II/2 737 old-tól

Bernoulli feladat (1696) - lejtés dolog



dinamikai szempontból:



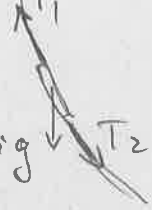
$mg \sin\alpha = mg \sin(-y'(t)) = m \cdot a$

$$T = \int_0 \int_0^t mg \sin(-y'(t))\,dt$$

(nem olyan egyszerű)

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-y_1}}\,dx} \Longrightarrow \text{cikloid}$$

Maximális felszínű forgástest:



$$\boxed{S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx} \Longrightarrow \text{láncgörbe}$$

↳ ennek fizikai levezetése érdekes lehet

$$\mathcal{C} = \left\{ \Phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{kétszer folyt differenciálható} \\ \Phi(x_0) = y_0 \ , \quad \Phi(x_1) = y_1 \end{array} \right\}$$

↓

megengedhető függvények.

$\forall\, \phi \in \mathcal{C} \longmapsto I(\phi) \in \mathbb{R}$

$I : \mathcal{C} \longmapsto \mathbb{R}$ funkcionál, speciális alakú

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\,dx \longrightarrow \min \quad \phi \in \mathcal{C}\text{-re}$$

↓

jelöljük inkább kicsi $y(x)$-el!

Szükséges feltétel az I-re

Tfh $u \in \mathcal{C}$ -ben I minimuméllis vagyis $I(u) \le I(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_0 = \{ \eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}, \text{ kétszer folyt diff } \; \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \}$$

akkor $\left.\begin{array}{l}\forall \phi \in \mathcal{C} \\ \forall \eta \in \mathcal{C}_0\end{array}\right\}$-re : $\phi + \eta \in \mathcal{C}$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad u + \varepsilon\eta \in \mathcal{C}$

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta) \geq I(u) \quad \forall \varepsilon \neq 0$$

G diff. ezért $G'(0) = 0$

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))\, dx$$

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u(\cdot)\eta + F'_{u'}(\cdot)\eta' \right) dx$$

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u(x, u, u')\eta(x) + F'_{u'}(x, u, u')\eta'(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}_0\text{-ra igaz}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}(x, u, u')\eta'(x)\, dx = \underbrace{\left[F'_{u'}(x, u, u')\eta(x) \right]_{x_0}^{x_1}}_{=0 \text{ mert } \eta(x_0),(x_1)=0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u')\eta(x)$$

tehát:

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left(F'_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u') \right) dx$$

Lemma Tfh $\left.\int_a^b C(x)\eta(x)\, dx = 0 \quad \forall \eta(x) \text{ folyt fv} \atop \eta(a) = \eta(b) = 0\right\} \Longrightarrow C(x) \equiv 0$

(T) Tfh $u \in \mathcal{C}$ optimális 2x folyt. diff

akkor $L[u] = F'_u - \dfrac{d}{dx} F'_{u'} = 0$

Euler-Lagrange

Anal 3
ea. 7-2-

Megengedett fv-ek

$$\mathcal{C} = \{ \phi:[x_0,x_1]\to\mathbb{R},\ \text{kétszer folyt diffható} \}$$
és $\phi(x_0)=y_0 \quad \phi(x_1)=y_1$

Funkcionál: $$\phi \longmapsto I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\phi(x),\phi'(x))\,dx$$

(T) HA $u\in\mathcal{C}$ szélsőérték, akkor

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'} = 0$$ Euler egyenlet

u: stacionárius megoldás

Biz: $G(\varepsilon) = I(u+\varepsilon\eta)$

$$G'(0)=0 \iff L[u]=0$$

$\boxed{\delta I(u) \text{ első variációja}}$

előadáson ez szerepelt. Megnézni, melyik a jó!

Speciális esetek

1) $F(x,u,\cancel{u'}) \Rightarrow \underbrace{L[u] = F'_u = 0}_{\text{algebrai egyenlet}}$ ~~$\Rightarrow F_u(x,u)=C$~~

2) $F(x,u')$

ekkor:

$L[u] = -\frac{d}{dx}F'_{u'} = 0 \Rightarrow F'_{u'} = C$ algebrai egyenlet u'-ra, azután már csak $\int$ kell!

3) $F(\cancel{x},u,u')$

$E = \underbrace{F - u'F'_{u'}} = C$

Figyelem ez nem elvivendő alak, hanem speciális eset.

A Hamilton egyenletek is csak egy speciális eset (talán)!

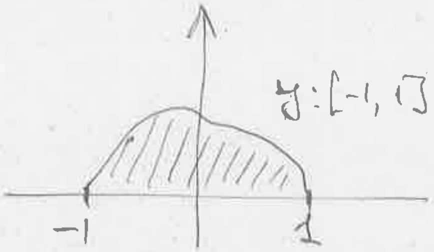
D'Alambert elv: minden rendszer az energia minimalizálására törekszik.

2017 b

Didó – probléma

max $\int_{-1}^{1} y(x)\,dx$

feltéve, hogy $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = L$



$y:[-1,1] \to \mathbb{R}_+$

Ált: max $I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,\phi,\phi')\,dx$

+ feltéve: $J(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,\phi,\phi')\,dx = L$

Mo: Lagrange féle multiplikátor!

$I_\lambda(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} (F - \lambda G)\,dx$ → stacionárius függvényeit keressük

Didó megoldása:

$$F - \lambda G = y - \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$\cancel{F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} =}$$

$$E = y - \lambda\sqrt{1+y'^2} + y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = y - \frac{\lambda y'^2 + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$ szeparábilis DE

ennek megoldása: $(x+D)^2 + (y-C)^2 = \lambda^2$

Izoperimetrikus feladat: Adott kerületű síkidomok; területe mikor maximális

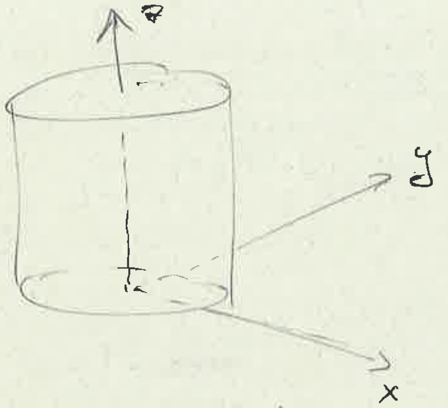
Gyakorlaton!

Dudás Didó feladat: adott kerületű tartomány
kerülete mikor minimális.

Feladat: (S) henger felületén két pont

$\Gamma \subset S \qquad \Gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in [a,b] \}$

$\min \ell(\Gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| \, dt$



$x = \cos\theta$
$y = \sin\theta$
$z = z$

$\theta \in [0, 2\pi]$
$z \in [0, 1]$

Görbe megadás
$\theta = \theta(t)$
$z = z(t)$

feladat: min a görbe hosszát

Tehát van 2 db függvény

$\mathcal{C} = \{ \phi = (\phi_1, \phi_2) \mid \phi_j : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diff. perem felt. adottak $\}$

$I : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \qquad I(\phi_1, \phi_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi') \, dx \overset{\text{jel}}{\equiv} I(\phi)$

$\min I(\phi)$

Szükséges felt: tfh $u_1, \dots, u_n$ optimum
azaz $I(u) \le I(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}$

perturbáció j-edik koordinátát perturbálom.

u_j helyett $u_j + \varepsilon\eta_j$

$G(\varepsilon) = I(u_1, \dots, u_j + \varepsilon\eta_j, \dots, u_n)$

$G(0) \le G(\varepsilon)$ $\forall \varepsilon$-ra $\Longleftrightarrow G'(0) = 0$

(T) Szükséges feltétel:
Tfh $u_1, \dots, u_n$ optimum akkor: $\boxed{L_j[u] = F'_{u_j} - \frac{d}{dx} L'_{u_j'} = 0}$

2017b

Anal 3
8. ea

Pl: $\mathbb{R}^3$-ban két pont, legrövidebb út.

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad$ $P_1(x_1, x_2, x_3)$ $\quad \Big\}$ + szélsőérték feltételek $\gamma(x)$-re P_0 és P_1 kapcsán

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}_{F(x, y, y', z, z')} \, dx$$

Euler egyenletek: $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C$

$$F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z'} = 0 \Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = D$$

Speciális eset

ha F nem függ x-től: $F(\cancel{x}, u_j, u_j')$

All: $u = (u_1, \dots, u_n)$ optimum, akkor

$$\boxed{F - \sum_{j=1}^{n} u_j' F'_{u_j'} = C}$$

Fizikai háttér: $x \approx$ időt jelenti

Hamilton elv: adott állapotból

általánosított koordináták

$q_1, \dots, q_n$

pl. pontszerű test: $n=3$

2 pont: $n=5$

$\big(q_1(t_0), \dots, q_n(t_0)\big) \longrightarrow \big(q_1(t_1), \dots, q_n(t_1)\big)$

+ Jellemzők: $U(t)$ helyzeti energia

$T(t)$ mozgási energia

Leghosszabb hatás elve

$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt \to$ min.

Konkrét eset.

$U(q_1, \dots, q_n)$

$T(\dot q_1, \dots, \dot q_n) = \dot q^T A \dot q$

Opt. m.o. esetén:

$U + T =$ konst

Brachistocrone

$$\min_{y} \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)-y_1}}}\,dx \qquad \text{ogyak.}$$

$$F(x,u,u') = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u-y_1}}$$

$\hookrightarrow$ hova ér $y_1 := 0$

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$$

Térbeli Brachistocrone: $y = y(x)$

$z = z(x)$

$$\min_{y,z} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}}{\sqrt{z(x)-z_1}}\,dx$$

$\hookrightarrow$ legyen $z_1 := 0$

(T) Ha $\underbrace{(u_1(x),\, u_2(x))}_{:= u(x)}$ optimum

$L_1[u_1] = 0 \quad L[u_2] = 0 \quad$ akkor $L[u_1] = F'_{u_1} - \frac{d}{dx} F'_{u_1'}$

Geodetikus görbék

Adott $S \subseteq \mathbb{R}^3$ felület

$S = \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \}$ $D \subset \mathbb{R}^2$

$P_1, P_2 \in S$ Keressünk olyan görbét, amelynek hossza min.

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \qquad \text{Felületen lévő görbét} \quad \begin{matrix} u = u(t) \\ v = v(t) \end{matrix}$$

$$x(t) = x(u(t),\, v(t))$$

$\dot{x}(t) = x'_u\, \dot{u} + y'_v\, \dot{v}$

$\dot{y}(t) = y'_u\, \dot{u} + y'_v\, \dot{v}$ u.e. y-ra

ekkor $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{u}^2\big(\overbrace{x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2}^{P}\big)$
$+\dot{v}^2\big(\overbrace{x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2}^{Q}\big)$
$+2uv\big(\overbrace{x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'}^{R/2}\big)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{u}^2 P + \dot{v}^2 Q + uv R}\, dt \overset{v=v(u)}{=\!=} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{P+v'Q+uvR}\, du$$

---

legyen $f(x,y) = \sin(x+y)$
mi a min. út két p között.

legyen $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$

$v = v(u) \;\; |d$
$\dot{v} = v'\dot{u}$
$u(t_0) = u_0$
$u(t_1) = u_1$

$x(t) = x$
ekkor $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ f(x,y(x)) \end{pmatrix}$ $\quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ f_x' + f_y' y' \end{pmatrix}$

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+y'^2+f_x'^2+2f_x' f_y' y' + f_y'^2 y'^2}$$

Korlátozás:
min $I(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')\,dx$

u. h. $J(u) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')\,dx = 0$

$$K(u) = \int_{x_0}^{x_1} (F+\lambda G)\,dx$$

Pl. legyen $u: D \to \mathbb{R}$ ahol $D \subset \mathbb{R}^2$
$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x,y) \end{pmatrix} : (x,y) \in D \right\}$

feltétel: $A(S) = \iint_D \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\; d(x,y) \to \min$
u. h. $u(x,y) = u_0(x,y)$
ha $(x,y) \in \partial D$

Anal 3
e.a. 9

Megengedett fv. halmaza

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi : D \to \mathbb{R},\ \text{kétszer folyt. diff. és } \phi(x,y) = u_0(x,y)\ \ \forall (x,y) \in \partial D \right\}$$

Adott $I(\phi)$ funkcionál

$$I(\phi) = \iint_D F\left(x,y,\phi(x,y), \phi'_x(x,y), \phi'_y(x,y)\right) d(x,y)$$

Szükséges felt.: Tfh. $u(x,y)$ optimum.

legyen $\eta : D \to \mathbb{R}$ $\quad \eta|_{\partial D} \equiv 0$

$G(\varepsilon) = I(u+\varepsilon\eta)$ egyváltozós $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény

$G'(0) = 0$

$$G(\varepsilon) = \iint_D F(x,y,u+\varepsilon\eta, u'+\varepsilon\eta'_x, u'+\varepsilon\eta'_y)\, d(x,y)$$

$G'(\varepsilon) = \dots$

$$G'(0) = \iint_D \eta\, L[u]\, d(x,y) \equiv 0 \quad \forall \eta$$

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_x} - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_y} = 0$$

Min. felszín: $A(S) = \iint_D \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\, d(x,y)$

$$F'_{u_x} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \qquad \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_x} = \dots$$

$$\int_0^T \int_0^\ell \left(\frac{m}{2\ell} u_t'^2 - \tau\sqrt{1+u_x'^2}\right) dx\,dt$$

$D = [0,T]\times[0,\ell]$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{m}{\ell} u'_t - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau u'_x}{\sqrt{1+u_x'^2}} = 0$$

$u_x'^2 \approx 0$

ekkor $\frac{m}{\ell} u''_{tt} = \tau u''_{xx}$

hullám egyenlet

Húr mozgás $\quad$ L – hosszú gumi szalag

mozgási energia: $K \approx \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$ $\quad K = \frac{m}{2\ell}\int_0^\ell u_t'(t,x)\,dx$

potenciális energia: $U = \tau \int_0^\ell \left(\sqrt{1+u_x'^2} - 1\right) dx$

Analízis III. 4. heti feladatok

2016. októver 7.

Variációszámítás 1. rész

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgásfelszín felülete:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

. Igazoljuk a variációszámítás eszközeivel, hogy a síkon két pontot összekötő görbék közül az egyenesszakasz ívhossza minimális.
(Ez a feladat lesz jó az alapfeladat, és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlésére)

$F - u'\dfrac{\partial F}{\partial u'} = C$

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$2u + u'^2 + 2u' = C$

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\,dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

HF$_1$ Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\,dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

4. (Minimális felszínű forgástest) Keressük az $f : [0;1] \to R$ kétszer folytonosan differenciálható. A(0,1) és B(1,e) pontokat összekötő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.

HF$_2$ Írjuk fel a megfelelő $E(x)$ energiafüggvényt és számoljuk ki az összes stacionárius megoldást az $F(x,u,u') = \sqrt{u}\cdot\sqrt{1+(u')^2}$ alapfüggvény esetén.

5. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását Brachistochrone (síkban)

D4* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\,dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

ahol $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

Analízis III. 8. heti feladatok
2017. november 10.

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:
$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

2. Adott a síkon két pont $A(a, \alpha)$ és $B(b, \beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat összekötő görbék közül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz. (Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \left(2u + (u')^2\right) \mathrm{d}x, \qquad u(0) = 0,\ u(1) = 1$$
$$[\mathrm{HF}]\,(b)\quad I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((u')^2 - u^2\right) \mathrm{d}x, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0$$

4. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet az alábbi funkcionálok esetén és számoljuk ki annak összes megoldását:
$$(a)\ I(u) = \int_0^1 (x + u + 3u')\mathrm{d}x \qquad\qquad (b)\ I(u) = \int_0^2 (u + x\,u')\mathrm{d}x$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az alábbi alapfüggvények esetén:
$$(a)\ F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u\sin x \qquad [\mathrm{HF}]\,(b)\ F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$$

Állítás. Az alkalmazásokban leggyakoribb esetében, az alapfüggvény $F(x, u, u')$ nem függ közvetlenül x-től, azaz $F = F(u, u')$ alakú. Ekkor definiáljuk a következő energiafüggvényt:
$$E(x) = F\big(u(x), u'(x)\big) - u'(x)F'_{u'}\big(u(x), u'(x)\big), \quad \text{avagy rövidebben: } E = F - u'F'_{u'} \tag{1}$$
Ekkor a stacionárius megoldások meghatározása végett elégséges megoldani az Euler-egyenlettel ekvivalens $E = F - u'F'_{u'} = C_1$ differenciálegyenletet, ahol $C_1 \in \mathbb{R}$ konstans.

---

6. (Minimalis felszínű forgástest) Keressük az $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható,
$$f(0) = f(2) = \frac{e^2 + 1}{2e} \tag{2}$$
feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.

7. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását: $T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\dfrac{1 + y'(x)^2}{\frac{E_0}{mg} - y(x)}}\, \mathrm{d}x.$

8. (Elgondolkodtató) Adjuk meg azt az $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $u(a) = u(b) = u_0$ és az $u(x)$ függvény alatti **előjeles** terület minimális, vagyis $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$ minimális. Adjuk meg a megfelelő Euler-egyenletet. Ha az energiafüggvényt alkalmazzuk látszólag ellentmondásba ütközünk, miért? Miért nincs ellentmondás?

D6* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ függvényt:
$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, \mathrm{d}x, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Bioreactor Manuscript

$$E = F - u' F'_{u'}$$

$$\frac{d}{dx} E = F'_u\, u' + \cancel{F'_{u'}\, u''} - \cancel{u'' F'_{u'}} = u' \left(F - \frac{d}{dx} F'_{u'} \right)$$

$$I(u) = \int_a^b u \, dx \qquad u(a) = u(b) = 1$$

$$E = F - u' F'_{u'} = \underline{\mu = \text{const.}} \qquad \mu(x) = \underline{1}$$

$$F'_u = 1 \neq 0$$ <u>nichts</u>

4

Analízis III. ~~7~~. heti feladatok

201~~5~~6. ~~november 6.~~

október 7

Variációszámítás 1. rész.

$x, f(x)$

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgásfelszín felülete:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

(4) + Adott két pont $A(0,1)$ és $B(1,e)$: ~~ezeket~~ összekötő görbék közül minimális felületű forgástest? (?)

2. Igazoljuk a variációszámítás eszközeivel, hogy a síkon két pontot összekötő görbék közül az egyenesszakasz ívhossza minimális.
(Ez a feladat lesz jó az alapfeladat, és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlésére)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4. (HF) Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 1.$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$ alapfüggvény esetén.

6. (HF) Írjuk fel a megfelelő $E(x)$ energiafüggvényt és számoljuk ki az összes stacionárius megoldást az $F(x, u, u') = \sqrt{u} \cdot \sqrt{1 + (u')^2}$ alapfüggvény esetén.

7. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

(5) + Határozzuk meg a Bernoulli feladatot ...

(?) D3* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

ahol $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

~~(Megjegyzés: Az integrálban szereplő fv-t kétszer folyt diff-hatók,~~

$I(u) = \int F(x, u, u')\, dx$

Gyak 4.
Variációsz...

(1) Adott (x_0, y_0) (x_1, y_1) őket összekötő legrövidebb görbe

$f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ ú.h. $f(x_0) = y_0$ $f(x_1) = y_1$

$$\min \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx \implies F(u') = \sqrt{1 + u'^2}$$

Euler egyenlet: $\cancel{F'_u} - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2} u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \text{const} = C$$

$$u'^2 = C + C u'^2$$

$$u'^2 (1 - C) = C$$

$$u' = \sqrt{\frac{C}{1-C}} = D \quad \Big| \int dx$$

$$\int u'\, dx = Dx + C$$

$$u = Dx + C$$

vagy: $\int_{x_0}^{z} u'(x)\, dx = \int_{x_0}^{z} D\, dx \implies u(z) - u(x_0) = D(z - x_0)$

$$u(x) = y_0 + D(x - x_0)$$

$u(x_0) = y_0$ ✓

$u(x_1) = y_0 + D(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow D = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$$\boxed{u(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

ü

(1) A – B legrövide

(2) Forgástest min fe

2006. 10. 7

Anal 3 gyak 4

Variációszám. (...

(2') Átrezető feladat

Forgásfelület felülete: $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

Biz: legyen $s(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$ $(x,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi) = D$

$$S'_x \times S'_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ f'_x\cos\theta \\ f'_x\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x)\sin\theta \\ f(x)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x f\cos^2\theta + f'_x f\sin^2\theta \\ -f\cos\theta \\ -f\sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x f \\ -f\cos\theta \\ -f\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\| S'_x \times S'_\theta \| = \sqrt{f'^2_x f^2 + f^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta} = f\sqrt{f'^2_x + 1}$$

$$S = \iint_S dS = \iint_D \| S'_x \times S'_\theta \|\, d(x,\theta) = \iint_D f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, d(x,\theta) =$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, d\theta\, dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \int_0^{2\pi} 1\, d\theta =$$

$$= \boxed{2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

(2')

Minimalizáljuk! : min $\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \Rightarrow F(u,u') = u\sqrt{1+u'^2}$

$$E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = u\sqrt{1+u'^2} - u'\cdot u\cdot\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1+u'^2-u'^2\right) =$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = \text{konst} = C$$

$$u^2 = C^2(1+u'^2) \Rightarrow u'^2 = \frac{u^2}{c^2} - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{c}\sqrt{u^2-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\int_a^z \frac{u'}{\sqrt{u^2-c^2}}dx = \int_a^z 1\,dx \Rightarrow \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right)\Big|_a^z = \frac{z-a}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcch}\frac{u(z)}{c} - \operatorname{arcch}\frac{y_0}{c} = \frac{z-a}{c}$$

$$\boxed{u(z) = C\cosh\left(\operatorname{arcch}\frac{y_0}{c} + \frac{z-a}{c}\right)} \cancel{C\left(\frac{y_0}{c}\cosh\left(\frac{z-a}{c}\right)+\right)}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$

$$\operatorname{arsinh}(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - 1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\right) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x$$

$$\operatorname{arsinh}(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+6+e^{-2x}}{4}}\right)$$

$$\boxed{u(x) = c\left[\frac{y_0}{c}\cosh\left(\frac{x-a}{c}\right) + \sinh\left(\operatorname{arcosh}\frac{y_0}{c}\right)\sinh\left(\frac{x-a}{c}\right)\right]}$$

$$\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \left[\frac{e^{+x}-e^{-x}}{2}\right]_{x=\operatorname{arcosh} x} =$$

$$= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} - e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2+1} - x - \sqrt{x^2-1}}{2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$\sinh\left(\operatorname{arcosh}\frac{y_0}{c}\right) = \frac{\sqrt{y_0^2+c^2} - \sqrt{y_0^2-c^2}}{2c}$$

$$\boxed{u(x) = y_0\cosh\left(\frac{x-a}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_0^2+c^2} - \sqrt{y_0^2-c^2}\right)\sinh\left(\frac{x-a}{c}\right)}$$

Aud 3
Zadatak 4

③ $I(u) = \int_0^1 \left(2u + (u')^2\right) dx \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

$F : 2u + u'^2$

$E = F - u' \dfrac{\partial F}{\partial u'} = 2u + u'^2 - u' \cdot 2u' = 2u - u' = \text{konst} =: C$

$u' = 2u + C \quad \Rightarrow \quad v' = 2v$

legyen $v = u + \dfrac{c}{2}$, $v' = u'$ $\quad \Big| \quad \displaystyle\int_0^z \frac{v'}{v} dx = \int_0^z 2\, dx \Rightarrow \ln|v|\Big|_0^z = 2z$

$\ln|v(z)| - \ln|v(1)| = 2z$

$\ln\left|u(x) + \dfrac{c}{2}\right| - \ln\left|u(1) + \dfrac{c}{2}\right| = 2x$

$\ln\left|u(x) + \dfrac{c}{2}\right| - \ln\left|\dfrac{c+2}{2}\right| = 2x$

$\ln\left|u(x) + \dfrac{c}{2}\right| = 2x + \ln\left|\dfrac{c+2}{2}\right|$

$\left|u(x) + \dfrac{c}{2}\right| = e^{2x} \cdot \left|\dfrac{c+2}{2}\right| \qquad$ tfh $c \geq -2$

$\left|u(x) + \dfrac{c}{2}\right| = e^{2x} \cdot \dfrac{c+2}{2}$

$u(x) = -\dfrac{c}{2} + \dfrac{c+2}{2} e^{2x}$

$u(0) = -\dfrac{c}{2} + \dfrac{c+2}{2} = 1 \quad$ Hibás!

③ $F = 2u + u'^2$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad (*)$$

Vagy:

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C \Rightarrow 2u + u'^2 - u'(2u') = C$$

$$2u - u'^2 = C$$

$$u' = \sqrt{2u + C}$$

$$(*) \Rightarrow u'' = 1 \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$I(u) = \int_0^1 (2u + u'^2)\, dx$$

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C \Rightarrow u'^2 - 2u = C \quad \Big| \frac{d}{dx} \Rightarrow$$

$$2u'u'' - 2u' = 2u'\underbrace{(u'' - 1)}_{=0} = 0$$

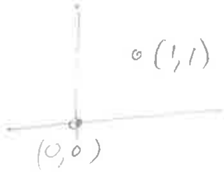
$$u'^2 = 2u + C$$

$$u' = \pm\sqrt{2u + C} \Rightarrow \pm\int \frac{u'}{\sqrt{2u + C}}\, dx = x + b \Rightarrow \pm\int \frac{du}{2\sqrt{u + D}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + b)$$

$$\sqrt{u + D} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + b)$$

$$u = \frac{(x + b)^2}{2} - D \Rightarrow u'' = 1 \quad (\text{Valóban!})$$

(3) $I(u) = \int_0^1 (2u + u'^2)\,dx$



Euler egyenlet: $\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial u'} = 0$

$$2 - \frac{d}{dx} 2\cdot u' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}u' = 1 \Rightarrow \int_0^z \frac{d}{dx}u'(x)\,dx = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(z) - u'(0) = z$$

$$\int_0^x u'(z)\,dz = \int_0^x (z + u'(0))\,dz \Rightarrow u(x) - \cancel{u(0)} = \frac{x^2}{2} + u'(0)\,x$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + u'(0)\,x$$

$u(0) = 0$ ✓

$u(1) = \dfrac{1}{2} + u'(0) \Rightarrow u'(0) = +\dfrac{1}{2}$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)}$$

(3)

Energiával:

$$E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u + u'^2 - u'\cdot 2u' = 2u - u'^2 = C$$

$$u' = \sqrt{2u + C} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u'\,dx}{\sqrt{u + C}} = \int 1\,dx$$

$$\sqrt{2}\int \frac{u'\,dx}{2\sqrt{u+C}} = x + D \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{u+C} = x + D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = -C + \cancel{\tfrac{2}{2}}\,\frac{(x+D)^2}{2} = -C + \frac{x^2 + 2xD + D^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + xD + E$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) = 0 &\Rightarrow E = 0 \\ u(1) = 1 &\Rightarrow D = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u(x) = \frac{x^2 + x}{2}$$

Anal 3
gyak 4

⑤ $F(x,u,u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u - 2\sin x - \frac{d}{dx}(4u') = 0$$

$$\Rightarrow 2u - 2\sin x - 4u'' = 0$$

$$2u'' - u = -\sin x \Longrightarrow 2u'' - u + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2u'' + 2\sin x - u - \sin x = 0$$

$$2(u'' + \sin x) - u - \sin x = 0$$

legyen $u = v + \sin x$

$u' = v' + \cos x$

$u'' = v'' + \sin x$

$$2v'' + 2\sin x - v + \sin x - \sin x = 0$$

$$2u'' + \frac{2}{3}\sin x - u - \frac{1}{3}\sin x = 0$$

$$2\left(u'' - \frac{1}{3}\sin x\right) - \left(u + \frac{1}{3}\sin x\right) = 0$$

legyen $v = u + \frac{1}{3}\sin x$

$v' = u' + \frac{1}{3}\cos x$

$v'' = u'' - \frac{1}{3}\sin x$

$$2v'' - v = 0$$

~~legyen~~ $\cancel{v^* = A\sin\omega x}$

$\cancel{v'' = -A\omega^2 \sin\omega x}$

$\cancel{-2A\omega^2 \sin\omega x - A\sin\omega x = 0}$

$\cancel{(-2A\omega^2 - A)\sin\omega x = 0 \quad \forall x}$

$\cancel{A(-2\omega^2 - 1) = 0}$

$\omega^2 = -\frac{1}{2}$

$$2\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Ell: $v''(x) = \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$2v''(x) - v(x) = (2\lambda_1^2 - 1)C_1 e^{\lambda_1 x} + (2\lambda_2^2 - 1) C_2 e^{\lambda_2 x}$$ ✓

$$u(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} - \frac{1}{3}\sin x$$

Legyen $\boxed{F = u^2 + 2u'^2 - 2u \sin x}$

$$F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 2u - 2\sin x - 4u'' = 0$$

$2u'' - u + \sin x = 0$

$2u'' + \frac{2}{3}\sin x - u + \frac{1}{3}\sin x = 0$

$\frac{2}{3}(3u'' + \sin x) - \frac{1}{3}(3u + \sin x) = 0$

vagy:

$2\left(u'' + \frac{1}{3}\sin x\right) - \left(u - \frac{1}{3}\sin x\right) = 0$

legyen $v := u - \frac{1}{3}\sin x$

Ügyes trükkel megoldva

$v' = u' - \frac{1}{3}\cos x$

$v'' = u'' + \frac{1}{3}\sin x$

tehát $2v'' - v = 0$

$v'' = \frac{1}{2}v$

ezért $v(x) = Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

$$u(x) = \left(Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right) + \frac{1}{3}\sin x$$

avagy $\underline{2u'' - u = -\sin x}$

~~homogén:~~

$2u'' = u \Rightarrow u_h = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$

állandók variálása:

~~[illegible]~~

próbafüggvény

$u_p = u_h + C\sin x$

$u_p' = u_h' + C\cos x$

$u'' = u_h'' - C\sin x$

$2u'' - u = -\sin x$

$\cancel{2u_h''} - 2C\sin x - \cancel{u_h} - C\sin x = -\sin x$

$3C\sin x = \sin x$

$\Downarrow$

$C = \frac{1}{3}$

Minimális forgástest felszín

$$I[f] = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

↳ minimum!

$$F(u,u') = u\sqrt{1+u'^2}$$

Általánosabban: $F(u,u') = g(u)\sqrt{1+u'^2} \Rightarrow 1 = \dfrac{u'}{\sqrt{\dfrac{g^2(u)}{c^2}-1}}$

$$x+b = \int \frac{du}{\pm\sqrt{\dfrac{g^2(u)}{c^2}-1}}$$

$$x-b = \boxed{\int \frac{du}{\sqrt{\dfrac{u^2}{c^2}-1}} = C\cdot \operatorname{acosh}\left(\frac{u}{c}\right)} = C\cdot \ln\left(\frac{u}{c} - \sqrt{\frac{u^2}{c^2}+1}\right)$$

$$\frac{x-b}{c} = \operatorname{acosh}\left(\frac{u}{c}\right) \Rightarrow \frac{u}{c} = \cosh\frac{x-b}{c}$$

$$\boxed{u = C\cdot\cosh\frac{x-b}{c}}$$ ← általános képlet

$$\begin{cases} u(0)=1 \\ u(1)=e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C\cdot\cosh\dfrac{-b}{c} = 1 \\ C\cdot\cosh\dfrac{1-b}{c} = e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{b}{c}}+e^{\frac{b}{c}}}{2} = \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{e^{\frac{1-b}{c}}+e^{-\frac{1-b}{c}}}{2} = \dfrac{e}{c} \end{cases}$$

ha $C=1$, $b=0$

$$\boxed{u = \cosh x}$$

Minimális forgástest felszíne

$$\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}} = 0 \quad \Big| \int_{x_0}^{z} dx$$

$$\int_{x_0}^{z}\left(\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)^2}}\right)'_x dx = C$$

$$\frac{u'(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} - \frac{u'(x_0)}{\sqrt{1+u'(x_0)^2}} = C \implies \frac{u'(z)}{\sqrt{1+u'(z)^2}} = D$$

$$u'^2(z) = D\left(1+u'(z)^2\right) \implies u'(z)^2 - D\,u'(z)^2 - D = 0$$

$$u'(z)^2(1-D) = D$$

$$u'(z) = \sqrt{\frac{D}{1-D}} = E$$

$$\int_{x_0}^{x_1} u'(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_1} E\,dx$$

$$u(x_1) - u(x_0) = E(x_1 - x_0)$$

$$u(x) = u(x_0) + E(x - x_0)$$

$$u(x_1) = u(x_0) + E(x_1 - x_0) = y_1 \implies E = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$u(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

(7) $F(x,u,u') = u'^2 + 2uu' - 16u^2$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u' - 32u - \frac{d}{dx}\left(2u' + 2u\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2u'} - 32u - 2u'' - \cancel{2u'} = 0$$

$$u'' + 16u = 0$$

$$u_1 := A \sin \omega x \underset{\substack{A=1 \\ \omega=4}}{=\!=} \sin 4x \qquad u_2 = \cos 4x$$

$$u_1'' = -16 \sin x$$

$$u(x) = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$$

Anal 3 gjale 4

Adott $\boxed{F = g(y)\sqrt{1+y'^2}}$ $\quad F(y,y')$ $\quad \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \text{min/max}$

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C$$

$$g(y)\sqrt{1+y'^2} - u'\frac{g(y)\,u'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

$$\frac{g(y)(1+y'^2)}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{g(y)\,u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = C \Rightarrow$$

$$\frac{g(y)}{\sqrt{1+u'^2}} = C$$

Feladat: Brachistocrone (Bernoulli)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-y_0}}\,dx$$

legyen $\bar{y} = y - y_0$

$\bar{y}' = y'$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+\bar{y}'^2}{\bar{y}}}\,dx$$

$$F(\bar{y},\bar{y}') = \sqrt{\frac{1}{\bar{y}}}\cdot\sqrt{1+\bar{y}'^2}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}} \Rightarrow \int 1\,dx = \int \frac{u'}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x + b = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}}} \xrightarrow{\text{ha } g(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}} x + b = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{k}{u}-1}}$$

$$\frac{1}{C^2} = k$$

$$x + b = \int\sqrt{\frac{u}{k-u}}\,du = k\int\sqrt{\frac{k\sin^2\frac{\theta}{2}}{k-k\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \left(k\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)$$

legyen $u := k\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$

$du = \cancel{2}k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,d\theta$

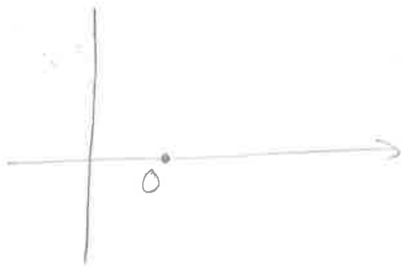
$$= k\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{k}{2}\int(1-\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= +b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \\ u &= \frac{k}{2}(1 - \sin\theta) \end{aligned}}$$

Anal 3 $\quad$ 2016. 10. 5

4. gyakorlat

-1- Brachistocrone



$$x = b + \frac{k}{2}\left(\theta - \sin\theta\right)$$

$$y = \frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta\right)$$

$t = 0$, $\quad x(\theta_0) = b + \frac{k}{2}\left(\theta_0 - \sin\theta_0\right) = 0$

$\quad y(0) =$

Brachistocrone : $t = \dfrac{\text{distance}}{v}$

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{v}\, dl$$ ⟶ Ebből nyúlunk ki

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$ (itt történt a csalás)

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}}\, dl$$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in [x_1, x_2] \right\}$$

$$t_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}} \, \|\dot{\gamma}(x)\|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Hivatalosan:

$$E_k + E_{pot} = E_0 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_0 - mgy$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2gy}$$

Brachistocrone
Bernoulli!

Hivatalosan úgy lenne, hogy:

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2gy}}\, dl = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}}\, dx$$

Megoldva!

legyen $z = \dfrac{E_0}{mg} - y$

$z' = -y'$ $\;|^2$

$z'^2 = y'^2$

$$x = b + \frac{k}{2}(\theta + \sin\theta)$$

$$z = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

nem szerencsés a konvenció(?)! csak akkor ha $y_0 = \frac{E_0}{mg}$

$$x = b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \underset{\overline{}}{\overset{b := 0}{=}} \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

$$y = \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = y_0 - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\cos\theta$$ (valóban $y(0) = y_0$)

Tfh $t = 0$-ban $v(0) = 0$
$E_0 = mgy_0$

legyen $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = ?$
legyen $k > \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

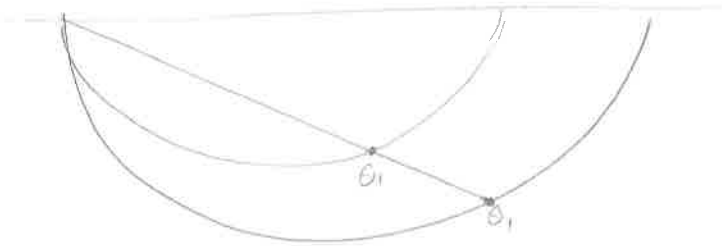
$$x(\theta_1) = \frac{k}{2}(\theta_1 - \sin\theta_1) = x_1$$

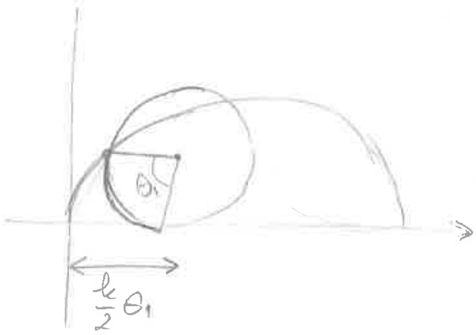
$$y(\theta_1) = y_0 - \frac{k}{2}(1 - \cos\theta_1) = y_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = 1 + \frac{2(y_1 - y_0)}{k} \Rightarrow \theta_1 = \arccos\left(1 + \frac{2(y_1 - y_0)}{k}\right)$$

Ahol a gyakorlat Brachistocrone

$$\begin{cases} \frac{k}{2}\left(\theta_1 - \sin\theta_1\right) = x_1 \\ \frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta_1\right) = y_0 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 - \sin\theta_1 = \frac{2x_1}{k} \\ 1 - \cos\theta_1 = \frac{2(y_0 - y_1)}{k} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta_1 - \sin\theta_1 = \bar{x}_1 \\ 1 - \cos\theta_1 = -\bar{y}_1 \end{cases}$$

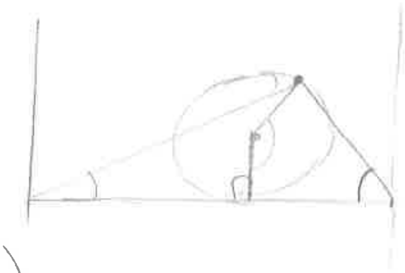
$$x(2\pi) = k\pi$$





$$\frac{\theta_1 - \sin\theta_1}{1 - \cos\theta_1} = \frac{x_1}{y_0 - y_1}$$

$$\theta_1 - \sin\theta_1 = m - m\cos\theta_1$$



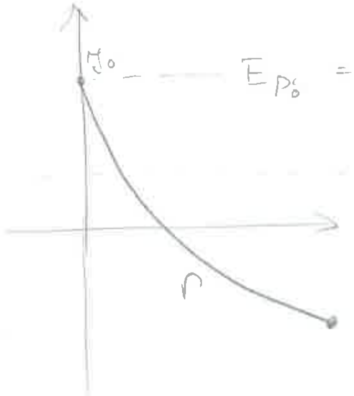
$$\theta_1 = fsolve\left(\theta_1 - \sin\theta_1 - \frac{x_1}{y_0 - y_1}\left(1 - \cos\theta_1\right), \pi\right)$$

$$k = \frac{2x_1}{\theta_1 - \sin\theta_1}$$

Brachistochrone TISZTA

Adott egy anyagi pont $(0, y_0)$ pontban, adott egy görbe lejtő : vége (x_1, y_0).

Az anyagi pont $(0, y_0)$-ban $\frac{m v_0^2}{2}$ kinetikus energiával rendelkezik



$$E_{p_0} = mgy_0 \; ; \; E_{k_0} = \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow E_0 = mgy_0 + \frac{m v_0^2}{2}$$

$$\rightarrow y \; : \; E_k + E_p = E_0 \Rightarrow \frac{m v^2}{2} + mgy = E_0$$

$$\frac{m v^2}{2} = E_0 - mgy$$

$$E_p = mgy_1$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2gy}$$

$$T = \text{,,}\frac{\text{dist}}{v}\text{''} = \int_r \frac{dl}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}}\, dx$$

$$v = \sqrt{2g}\sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}$$

legyen $\boxed{u = \frac{E_0}{mg} - y}$

$$u' = -y' \quad |^2$$

$$u'^2 = y'^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}}\, dx} \longrightarrow \text{min!}$$

Jelentsünk egy általánosabb feladatot : $\int_{x_0}^{x_1} g(u)\sqrt{1+u'^2}\, dx \longrightarrow \text{min}$

$$F(x, u, u') = F(u, u')$$

$\hookrightarrow$ ez nincs!

$$\Downarrow$$

$$C = g(u)\sqrt{1+u'^2} - u'\,\overbrace{g(u)\frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}}}^{\frac{\partial F}{\partial u'}} \Longleftarrow F(u, u') - u'\frac{\partial F}{\partial u'}(u, u') = C$$

$$C = \frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1 + u'^2 - u'^2\right)$$

Tehát:

$$\boxed{\frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}} = C} \Longrightarrow 1 + u'^2 = \frac{g^2(u)}{C^2} \nearrow u' = \pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{C^2} - 1} \Longrightarrow \frac{u'}{\pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{C^2} - 1}} = 1$$

Ennek jelentősége lesz.

Brachistochrone
Levezetés (1)
Anal 3

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}} = 1 \quad \Big| \int dx \implies \pm\int \frac{u'}{\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}}\,dx = x-b$$

$$\boxed{\begin{array}{l} du(x) = u'(x)\,dx \\ \text{röviden:} \\ du = u'dx \end{array}}$$

$$\boxed{x-b=\pm\int \frac{du}{\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}}}$$

→ Ezt kell majd megoldani

Brachistocrone: $g(u)=\frac{1}{\sqrt{u}} \overset{\text{ellenőr.}}{\implies} F = g(u)\sqrt{1+u'^2} = \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}$ ✓

$$x-b = \pm\int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{c^2u}-1}} \overset{k:=\frac{1}{c^2}}{=} \pm\int\frac{du}{\sqrt{\frac{k-u}{u}}} = \pm\int\sqrt{\frac{u}{k-u}}\,du$$

Ha $\theta\in[0,\pi)$ => legyen +
Ha $\theta\in(\pi,2\pi]$ => legyen −

$\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}\ge 0$

Legyen $u = k\sin^2\frac{\theta}{2}$ (*)
(változócsere)

láncszabály alapján

$$du = \frac{\partial u}{\partial\theta}\,d\theta = 2k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\,d\theta$$

$$du = k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$x-b = \pm\int\sqrt{\frac{k\sin^2\frac{\theta}{2}}{k-k\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \pm k\int \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= k\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\int\frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta = \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta)$$

Tehát:

$$x = b+\frac{k}{2}(\theta-\sin\theta)$$

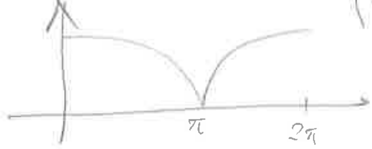
vált. csere

(*) $\implies u = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$

$$u = \frac{E_0}{mg} - y$$

$$\implies \boxed{\begin{array}{l} x = b + \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta) \\ y = \frac{E_0}{mg}-\frac{k}{2}(1-\cos\theta) \end{array}}$$

Megj: ha fordítva vesszük fel az előjeleket, akkor ez jött volna ki: (valami hasonló)



$$\boxed{\begin{aligned} x &= b + \frac{k}{2}\left(\theta - \sin\theta\right) \\ y &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta\right) \end{aligned}}$$

$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$x(\theta_1) = x(t=0) = 0$
$y(\theta_1) = y(t=0) = y_0$
$x(\theta_2) = x(t=T) = x_1$
$y(\theta_2) = y(t=T) = y_1$

Ezeket tudjuk!

Kérdés: $\theta_1, \theta_2, k, b = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} y(\theta_1) &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta_1\right) = y_0 \\ x(\theta_1) &= b + \frac{k}{2}\left(\theta_1 - \sin\theta_1\right) = 0 \\ y(\theta_2) &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta_2\right) = y_1 \\ x(\theta_1) &= b + \frac{k}{2}\left(\theta_2 - \sin\theta_2\right) = x_1 \end{aligned}}$$

$$\frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta_1\right) = 0 \Rightarrow \underline{\theta_1 = 0}$$

$\theta_1 = 0$: $\underline{b = 0}$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{k}{2}\left(1 - \cos\theta_2\right) &= y_1 - y_0 \\ \frac{k}{2}\left(\theta_2 - \sin\theta_2\right) &= x_1 \end{aligned}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

Tfh $v_0 = 0 \Rightarrow E_0 = mgy_0$

$$\underline{\frac{E_0}{mg} = y_0}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \frac{1 - \cos\theta_2}{\theta_2 - \sin\theta_2} = \frac{y_0 - y_1}{x_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{fsolve}\Big(x_1\left(1 - \cos\theta_2\right) - \left(y_0 - y_1\right)\left(\theta_2 - \sin\theta_2\right)\Big) \Rightarrow \underline{\theta_2}$$

$$\underline{k = \frac{2x_1}{\theta_2 - \sin\theta_2}}$$

Az fsolve ezt is meg tudja oldani!

Brachistocron
Levezetés (2
Anal 3

2047b levezetés

$$I(u) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}}\, dx \leftarrow \min.$$

$$E = F - u' F'_{u'} = \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \Big|^2$$ mivel $\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}$ mindig pozitív

$$\frac{1}{u(1+u'^2)} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{C}{u} - 1 = u'^2 \implies u' = \sqrt{\frac{C-u}{u}} \implies \frac{u'}{\sqrt{\frac{C-u}{u}}} = 1$$

vagyis $\int \sqrt{\frac{u}{C-u}}\, u'\, dx = \int dx$

$$x - D = \int \sqrt{\frac{u}{C-u}}\, du = C\int \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

legyen $u = C\sin^2\frac{\theta}{2}$

$du = C\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$$= C\int \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{C}{2}\int (1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta)$$

tehát
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) + D \\ u &= \frac{C}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

Brachistochrone (térben)

$$T(y,z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z_1 - z}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}\, dx$$

Euler egyenletek:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{z}\,\frac{y'}{\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}} = C_1$$

$$\boxed{\frac{y'}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1} \qquad (1)$$

$$F - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C_2$$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}} - z'\,\frac{\frac{1}{z}\cdot z'}{\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}} = C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1+y'^2+z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{z'^2}{\sqrt{z}\,\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_2$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_2} \qquad (2)$$

$$\frac{y'}{1+y'^2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow y' = C_3$$

$$\boxed{y = C_3 x + C_4}$$

(1)-be behelyettesítve $y = C_3 x + C_4$-et

$$\frac{C_3}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+C_3^2+z'^2}} = C_1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_4^2+z'^2}} = C_5}$$

$$z C_4^2 + z z'^2 = C_5^2$$

$$\sqrt{z}\, z' = \sqrt{C_5^2 - z C_4^2}$$

$$\boxed{z' = \sqrt{\frac{C_5^2 - z C_4^2}{z}}} \longrightarrow \text{Cikloid}$$

Brachistoch
TÉRBEN

Analízis III. 8. heti feladatok

2015. november 13.

Variációszámítás 2. rész.

1. (Minimalis felszínű forgástest) Keressük az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, $f(0) = 1$ és $f(1) = e$ feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális. (A forgástest felszíne $\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx$.) Múlt hét

(4) 2. Határozzuk meg a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (A függvény gráfja alatti terület ~~legkisebb~~ legnagyobb.) jövő hét

(5) 3. Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám.* jövő hét

4. (HF) Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ intervallumon, melyre a görbe alatti terület maximális, azaz jövő hét

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(t)\,dt \quad \to \quad \max$$

(2) 5. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

(NS)(1) a)

6. (HF) Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket osszekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, z sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az y tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, y).)

b) $(1,0,0)$ $(-1,1,0)$ konkrétan

7. Az 1. feladatban leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

(Térbeli Brachistochrone)

(3) Adott a térben két pont. $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=0,1$, melyeket egy huzallal összekötnek, ~~[illegible]~~ és egy golyót indítunk egy huzallal összekötnek, P_1-ből P_0-ba. Feltesszük, hogy a gravitáció az y tengely mentén hat. Milyen görbe mentén lesz az idő minimális

$$T = \int^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2(x)+z'^2(x)}{y(x)-y_0}}\,dx$$

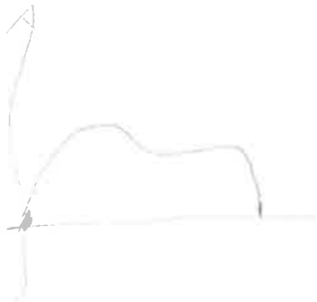
Varsoda 2
Gyak 5

$\boxed{\text{INS}}$

Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja a (x,y) síkbeli egységkör. Adott két pont $(1,0,0)$ és $(-1,0,1)$. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston

2) $y(0)=0$ $\quad y(1)=0$

$y(x) \geq 0$



A) Tfh fv gráf hossza fix $L > 1$

Mikor lesz a fv gráf alatti terület maximális

(3) B) Tfh a fv alatti terület fix.

Mikor lesz a fv gráf hossza minimális?

~~(Didó királynő feladata)~~

egyenes old: $I(y,z) = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}_{F(x,y,z,y',z')}\, dx$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1 \quad \Big|^2 \quad = \frac{y'^2}{1+y'^2+z'^2} = C_2$$

$$\Rightarrow y'^2 = \pm C_1^2 (1+y'^2+z'^2)$$

$$y'^2 = C_2(1+y'^2+z'^2)$$

$$y'^2(1-C_2) = C_2(1+z'^2)$$

$$y' = \sqrt{\frac{C_2}{1-C_2}} \cdot \sqrt{1+z'^2}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_3 \Rightarrow \frac{z'^2}{1+y'^2+z'^2} = C_4$$

$$\Downarrow$$

$$z'^2+y'^2 = C_5(1+y'^2+z'^2)$$

$$(z'^2+y'^2)(1-C_5) = C_5$$

$$\underbrace{z'^2+y'^2 = C_6}_{\text{ez még nem elég}}$$

Hamilton elv

→ időben változó meghanikai rend

legtöbbb hatás elve

least action principle

$$\min \int_{t_1}^{t_2} T - U \, dt$$

T → kinetikus

U → potenciális

$$U = U(q_1, \dots, q_n)$$

$$T = T(\dot q_1, \dots, \dot q_n) = \dot q^T P \dot q$$

$$P = P^T$$

természetes trajektória

$$T - U - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \dot q_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}_{\langle \nabla T, \dot q\rangle = 2T} = C_1$$

$$U + T = C_2$$

d'Alambert elv

Mechanikai rendszer stabil állapotban van (nyugalomban marad) $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ Helyzeti energia minimális

Alapfeladat: keressük u függvényt $u:[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer diffható

$$u(x_0) = u_0$$
$$u(x_1) = u_1$$
$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\, dx \to \text{extrémum}$$

$\downarrow$ ez egy funkcionál!

$$L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = \delta I(u) \quad \text{első variáció}$$

(M) elégséges felt. a minimumra: az ún. Lagrange kritérium

ha $F''_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \Rightarrow$ valóban minimum

„Hesse mátrix pozitív definit"

Általános esetek:

legyen egy $\gamma(t) = (x, y, z)$ $\to$ két pontot összekötő legrövidebb görbe

$$I(x,y,z) = \int_\Gamma dt = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0$$

ált: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0}$

ha $F(x, q, \dot{q}) = F(q, \dot{q}) \Rightarrow F - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j F'_{\dot{q}_j} = C$

$$\boxed{F - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = C}$$

Anal 3
5 ea.

Adott egy anyagi pont : $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Akkor ennek mozgási energiája : $T = E_k = W_k = \dfrac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2}$

Hat rá egy $\vec{F}_k(r)$ konzervatív erőtér

$$\Downarrow$$

$$\exists\, V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ u.h. } \vec{F}_k(r) = -\nabla V(r)$$

~~Potenciális energia!~~

$$\downarrow$$

potenciális energia!

Hat rá egy $\vec{F}_{ext}(t)$ külső erő!

Ekkor $L(t, r, \dot{r}) = T - \mathcal{U} + \langle r, F_{ext}(t) \rangle$

$$= T - \mathcal{U} + r^T F_{ext}(t)$$

$$H(t, r, \dot{r}) = L - \dot{r}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad (\text{Hamiltonian}) \neq \text{konst}$$

Röviditve : q általánosított koordinátavektor

ennek dimenziója függ adott paraméterek dimenziójától.

$$\boxed{L(t, q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q) + q^T \cdot F_{ext}(t)}$$

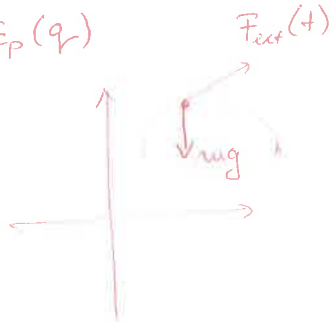
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

külső erő hatása

konzervatív erő hatása

$\vec{F}_{con}(q) = -\nabla E_p(q)$

Konkrét példa : $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ legyen $F_{ext}(t)$



$$E_k(q, \dot{q}) = E_k(\dot{q}) = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2}$$

Legyen gravitációs mező : $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \Rightarrow V_G = mgz$

$$q^T \cdot F_{ext}(t) = x F_1(t) + y F_2(t) + z F_3(t)$$

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2} - mgz + \underbrace{q^T F_{ext}(t)}_{\text{hagyományos skaláris.}}$$

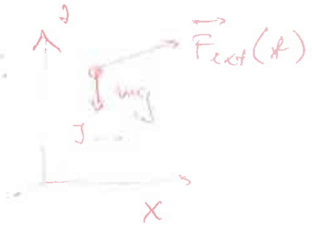
Ext force

Anal3 gyakorlás

Variációs sz.

Lagrange... [illegible]

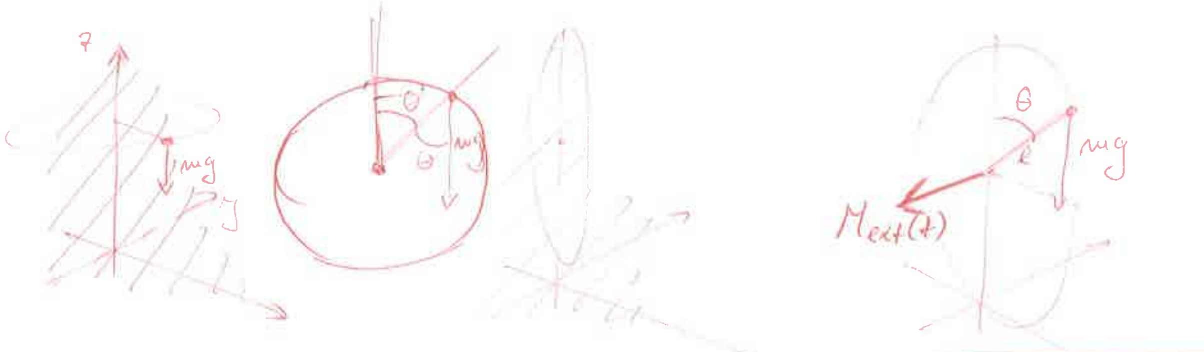
① Anyagi pont :



$$\boxed{L = \underbrace{\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2}}_{E_k} - \underbrace{mgz}_{E_p} + q^T F_{ext}(t)}$$

megj : $-\nabla E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

②



Kingaspiel :

$$\boxed{L = \underbrace{\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2}_{E_k} - \underbrace{mgl\cos\theta}_{E_p} + \theta\cdot M_{ext}(t)}$$

megj : $\cancel{-\nabla E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +mgl\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ l\cos\theta \\ l\cos\theta \end{pmatrix}}$

$$-\nabla E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = mgl\sin\theta = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ 0 \\ l\cos\theta \end{pmatrix} \right\| = \underbrace{\|\vec{G}\times\vec{l}\|}_{\text{Forgató nyomaték}}$$

③ Két DB anyagi pont :

$$L = \underbrace{\underbrace{\frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)}_{E_{k_1}} + \underbrace{\frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)}_{E_{k_2}}}_{E_k = T} + \underbrace{m_1 g z_1 + m_2 g z_2}_{E_p} + r_1^T F_{1ext}(t) + r_2^T F_{2ext}$$

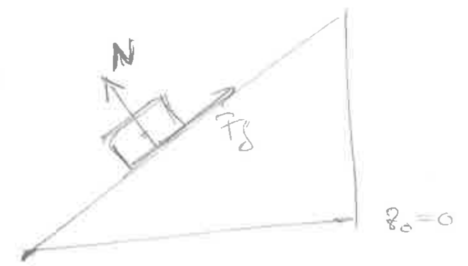
$$= E_{k_1} + E_{k_2} + E_{p_1} + E_{p_2} + q^T \cdot \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

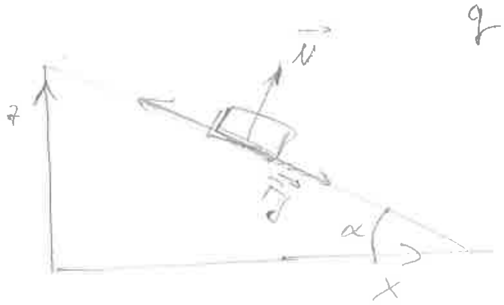
Ext. force

Mod3 ajánlott
Variációmódszer
Lagrange...

$V_G = mgz$

$q = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$





$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{N} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\sin\alpha \\ N\cos\alpha \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{F_j} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_j \\ 0 \end{pmatrix} = F_j \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ +\sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{N} + \vec{F_j} = N \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} + F_j \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ +\sin\alpha \end{pmatrix}$

$L = T - U + q^T \left(\vec{N} + \vec{F_j} \right) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + mgz \dots$

$= T - U + x(N\sin\alpha - F_j\cos\alpha) + z(N\cos\alpha + F_j\sin\alpha)$

$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \underbrace{-m\ddot{x}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}} + \underbrace{N\sin\alpha - F_j\cos\alpha}_{\frac{\partial L}{\partial x}} = 0$

$\cancel{\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} + N\sin\alpha + F_j\cos\alpha = 0}$

$\cancel{\partial L}$

! A! / RN! (Pisshasot)

-3-

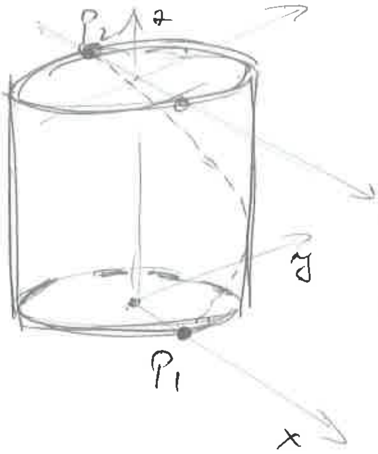
Ext force

...ß gyak...
Variációelv
Lagrangian
2016 de

1)

$P_1 = (1, 0, 0)$

$P_2 = (-1, 0, 1)$



$$S(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$ henger paraméteres megadása!

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int_\Gamma d\ell = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}\, dt \Rightarrow F(q, \dot{q}) = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\boxed{q := \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{általánosított koordináták}}$$

$$1: \quad \cancel{\frac{\partial F}{\partial \theta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}} = C_1 \Rightarrow \dot{\theta} = C_2 \Rightarrow \theta = C_2 t + C_3$$

Egyenlet rendszer!

$$2: \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = C_4 \Rightarrow \dot{z} = C_5 \Rightarrow z = C_5 t + C_6$$

Figyelem!

~~Ed~~ legyen $\underline{t \in [0, 1]}$

$z(0) = \underline{C_6 = 0}$

$z(1) = C_5 + C_6 = 1 \Rightarrow \underline{C_5 = 1}$

$x(0) = \cos(\cancel{C_2 t} + C_3) = 1 \Rightarrow \underline{C_3 = 0}$

$x(1) = \cos(C_2 + C_3) = -1 \Rightarrow \underline{C_2 = \pi}$

tehát $$\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \\ t \end{pmatrix}}$$

Végeredmény

1. fel

Inkább gyakoros Variációszámítás? 5. gyak!

Lagrange multiplikátorral:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\, dt \\ &+ \text{feltétel: } G(x,y,z) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = \|\dot{\gamma}(t)\| - \lambda(t)\, G(x,y,z)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow G'_x = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \perp \text{felület}}$$

$$t = f(u)$$
$$dt = f'(u)\, du$$

$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$$

$$t = x^2$$
$$dt = 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{2x\,dx}\sin(x^2) \overset{?}{=} \cos(x^2)$$

valóban:

$$\frac{d}{dt}\sin(x^2) = 2x\cos(x^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\left\langle \nabla\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}\right\rangle + \frac{\dot{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -x\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cdot\dot{x}+y\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{\dot{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}\frac{x^2\dot{x}+xy\dot{y}}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{\dot{x}x^2+\dot{x}y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} =$$

lenne: $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2x\dot{x}+2y\dot{y}$

$t = f(u)$

$dt = d f(u)$

$dt = f'(u)\,du$

$$\frac{d}{f'(u)\,du}\left(x(f(u))^2+y(f(u))^2\right) = 2x(f(u))\,x'(f(u)) + 2y(f(u))\,y'(f(u))$$

$$\frac{d}{du}\left(x(f(u))^2+y(f(u))^2\right) = f'(u)\ \text{-I-}$$

$$x(t)^2+y(t)^2 = 1$$

$$\sin(t)+\cos(t) = 0$$

Geodesics probl...

$$t := \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$dt = d\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + z^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt} x$$

$$F(u, v, \dot u, \dot v) = \sqrt{\dot v^2 + \dot u^2 \sin^2 v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot u} = \frac{(\sin^2 v) \cdot \dot u}{\sqrt{\dot v^2 + \dot u^2 \sin^2 v}}$$

Alt:

$$F = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a \cdot \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$b \cdot \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow F = a \cdot \frac{\partial F}{\partial a} + b \frac{\partial F}{\partial b}$$

$$F = \nabla F \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\frac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2 \varphi}} = C_1$$

$$\frac{\dot\theta \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi}} - \frac{d}{dt} \frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi}} = 0$$

$$E[\theta] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2\varphi}\right]^2 d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(1 + \theta'^2 \sin^2\varphi\right) d\varphi$$

$$\frac{\partial F^E}{\partial \theta'} = 2C \Rightarrow \theta = D + C \int \frac{1}{\sin^2\varphi} d\varphi = D - C \cdot \operatorname{ctg}(\varphi)$$

$$\theta = D - C \cdot \operatorname{ctg}\varphi$$

$$x(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta(\varphi)) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta(\varphi)) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$E[\varphi, \theta] = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi\right)}_{F(\varphi, \dot\theta, \dot\varphi)} dt$$

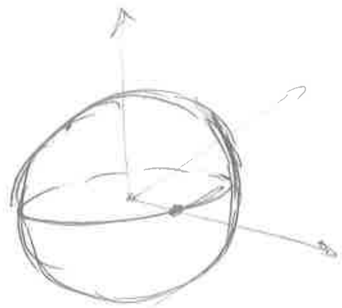
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot\theta} = 2C_1 \\ F - \dot\varphi \dfrac{\partial F}{\partial \dot\varphi} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot\theta = \dfrac{C_1}{\sin^2\varphi} \\ \dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi - 2\dot\varphi^2 = C_2 \Rightarrow \dfrac{C_1^2}{\sin^2\varphi} - \dot\varphi^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot\theta = \dfrac{C_1}{\sin^2\varphi} \\ \dot\varphi = \sqrt{\dfrac{C_1^2}{\sin^2\varphi} - C_2} \end{cases}$$

Ezt a gondolatmenetet sem értem
feladatra

(2)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi(t)\cos\theta(t) \\ \sin\varphi(t)\sin\theta(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$



$$\dot\gamma_1(t) = \cancel{\dot\varphi\cos\varphi\cos\theta} = \dot\varphi\cos\varphi\cos\theta - \dot\theta\sin\varphi\sin\theta$$

$$\dot\gamma_2(t) = \dot\varphi\cos\varphi\sin\theta + \dot\theta\sin\varphi\cos\theta$$

$$\dot\gamma_3(t) = -\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot\varphi^2(\cos\varphi)^2(\cos\theta)^2 - 2\dot\varphi\dot\theta(\sin\varphi)(\sin\theta)(\cos\varphi)(\cos\theta) + \dot\theta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$
$$+\dot\varphi^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\sin\theta + \dot\theta^2\sin^2\varphi\cos^2\theta$$
$$+\dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$= \dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\theta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$= \dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi$$ $\boxed{\text{Matlabbal ellenőrizve}}$

$$l = \int_{t_1}^{t_2}\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\theta^2\sin^2\varphi}}_{F(q,\dot q)}\,dt$$ $\boxed{q := \begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} \text{ ált. koordináták}}$

Euler egyenletek: $\frac{\partial F}{\partial \dot q_1} = \frac{\partial F}{\partial\dot\theta} = C_1 \Rightarrow \frac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\theta^2\sin^2\varphi}} = C_1$

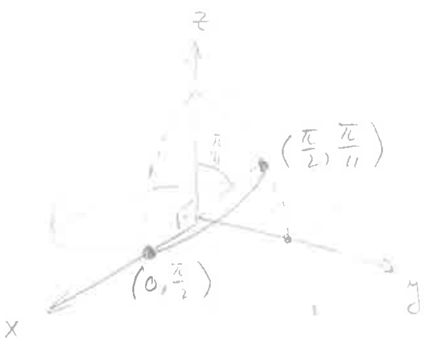
$$\frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q_2} = \frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\dot\varphi} = \frac{\dot\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\theta^2\sin^2\varphi}} - \frac{d}{dt}\frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2+\dot\theta^2\sin^2\varphi}}$$

= Nagyon undorító lesz! (Matlab)

Anal3 - Variációs...
GEODESICS-gömb...

(2) Geodesic curves (az egységgömbön)

Legrövidebb út $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ és $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ között



$$l = \int_\Gamma dl = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\| \, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)\cos\theta(t)\sin\varphi(t) \\ r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t) \\ r(t)\cos\varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Megszorítás: $r(t) = 1$

$$\dot\gamma_1(t) = -\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\theta\cos\varphi$$

$$\dot\gamma_2(t) = \dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot\gamma_3(t) = -\dot\varphi\sin\varphi$$

$$[\dot\gamma_1(t)]^2 = \dot\theta^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\cos^2\theta\cos^2\varphi - \underline{2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}$$

$$[\dot\gamma_2(t)]^2 = \dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$[\dot\gamma_3(t)]^2 = \dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\varphi = \dot\theta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2$$

tehát $l = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}}_{F(t,\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)} \, dt$, ahol $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

tehát keresünk egy 2D-s $\xi(t) = \begin{bmatrix}\theta(t) \\ \varphi(t)\end{bmatrix}$ paraméteres görbét.

Technikailag $F(t, \varphi, \theta, \dot\varphi, \dot\theta)$ Euler egyenleteit NEHÉZ megoldani. Azonban egy 2D paraméteres „szép" görbe explicit függvényekkel is megadható. Tfh $u = \varphi(t)$-nek $\exists$ inverze: $\begin{cases} t := \varphi^{-1}(u) \\ u = \varphi(t) \end{cases}$

Ekkor: $dt = \frac{d}{du}\varphi^{-1}(u) \cdot du$ tudniillik: $\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}$

$$\boxed{dt = \frac{1}{\dot\varphi(t)} du}$$

$$\theta(t) = \theta(\varphi^{-1}(u)) =: \vartheta(u)$$

$$\frac{d\vartheta(u)}{du} = \frac{d\theta(\varphi^{-1}(u))}{du} = \frac{d\theta}{dt}(\varphi^{-1}(u)) \cdot \frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \dot\theta(t) \cdot \frac{1}{\dot\varphi(t)}$$

$$\Rightarrow l = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + \vartheta'^2 \sin^2 u} \, du$$

Jud 3 – Variációszámítás III. GEODESICS – gömb
↳ Nincs megoldva

~~Tehát~~ ~~legyen~~

Más jelölésekkel: $\begin{cases} \varphi = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} f(t)$ $\quad \dot{\theta} = \frac{d}{dt} g(t)$

Tfh $\exists f^{-1}$ ~~és legyen~~

Ekkor $t = f^{-1}(\varphi)$

$$dt = \frac{d f^{-1}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi \Rightarrow dt = \frac{1}{\frac{d f(t)}{dt}} d\varphi \Rightarrow \boxed{dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}}$$

$$\theta = g(t) = g(f^{-1}(\varphi))$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{dg(t)}{d\varphi} = \frac{d\left(g(f^{-1}(\varphi))\right)}{d\varphi} = \frac{\left[\frac{dg(t)}{dt}\right]_{t = f^{-1}(\varphi)}}{\frac{d f(t)}{dt}} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2\varphi}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left[\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\right]^2 \sin^2\varphi}\ \frac{dt}{\dot{\varphi}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \theta'(t)^2 \sin^2\varphi(t)}\, dt \overset{\text{átírás}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2 \sin^2 f(x)}\, dx = (*)$$

Változócsere: legyen $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\, dx$

$$\frac{d}{dy} \overbrace{g(f^{-1}(y))}^{\bar{g}(\theta)} = \left[\frac{d g(x)}{dx}\right]_{x = f^{-1}(y)} \cdot \frac{d f^{-1}(y)}{dy} = \frac{\left[g'(x)\right]_{x = f^{-1}(y)}}{\left[f'(x)\right]_{x = f^{-1}(y)}}$$

$$(*) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\frac{g'(x)}{f'(x)}\right]^2 \sin^2 f(x)} \cdot f'(x)\, dx \quad \underline{\underline{\text{áttérés } y\text{-ra}}}$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (\bar{g}'(y))^2 \sin^2 y}\ dy$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot\varphi^2(t)+\dot\theta^2(t)\sin^2\varphi(t)}\;dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\underbrace{\left[\frac{\dot\theta(t)}{\dot\varphi(t)}\right]^2}_{\bar\theta(u)}\sin^2\varphi(t)}\;\underbrace{\dot\varphi(t)\,dt}_{du} = (*)$$

legyen $u=\varphi(t) \Rightarrow du=\dot\varphi(t)\,dt$

$\exists\; t=\varphi^{-1}(u) \Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \dfrac{1}{\left[\dot\varphi(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}}$

legyen $\bar\theta(u)=\theta(\varphi^{-1}(u))$

$$\frac{d\bar\theta(u)}{du} = \frac{d\theta(\varphi^{-1}(u))}{du} = \left[\dot\theta(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}\cdot\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \frac{\left[\dot\theta(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}{\left[\dot\varphi(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}$$

$u_1=\varphi(t_1)$

$u_2=\varphi(t_2)$

$$(*) = \int_{u_1}^{u_2}\sqrt{1+\bar\theta'(u)^2\sin^2u}\;du \overset{\text{átírás}}{=} \boxed{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}\;d\varphi} = I[\theta]$$

$$F(\varphi,\theta,\theta')=\sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}$$

Euler-Lagrange: $\cancel{\dfrac{\partial F}{\partial\theta}} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial\theta'}=0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial\theta'}=C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\theta'(\varphi)\sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}}=C_1 \Rightarrow \theta'(\varphi)^2\sin^4\varphi = C_1^2+C_1^2\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi$$

$$\theta'(\varphi)^2\left[\sin^4\varphi-C_1^2\sin^2\varphi\right]=C_1^2 \Rightarrow \theta'(\varphi)^2=\frac{C_1^2}{\sin^4\varphi-C_1^2\sin^2\varphi}$$

$$\theta'(\varphi)=\frac{C_1^2}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-C_1^2}} \Rightarrow \theta(\varphi)=C_1^2\int\frac{1}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-C_1^2}}\,d\varphi + C_2$$

ha $C_1\geq 1$ akkor $\sqrt{\sin^2\varphi-C_1^2}$ nem ért.

$\varphi\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\varphi\in\left[\frac{\sqrt2}{2},1\right] \Rightarrow \sin^2\varphi\in\left[\frac12,1\right] \Rightarrow C_1^2<\frac12$

általános esetben $C_1=0$!

Variáun?.
GEODESICS

Hamilton fv

$$-H = F - \theta' \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi} - \frac{\theta'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} \Rightarrow H = \frac{-1}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}}$$

$$H = -\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi} + \theta' p$$

$$\dot{p} = \cancel{-\frac{\dot\theta \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} + p} \quad 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta'} = C_1$$

$$\dot{q} = \dot\theta = \theta'$$ dosabb leltem!

---

ha $\varphi = \varphi(\theta) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi}\, dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}\, d\theta$

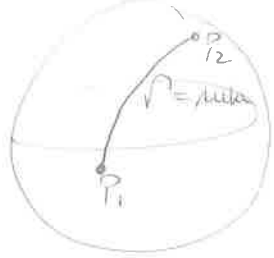
$$\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi} - \frac{\varphi'^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}} = C$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}} = C \Big|^2 \Rightarrow \sin^4\varphi = C^2\varphi'^2 + C^2 \sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow \sin^2\varphi\,(\underbrace{\sin^2\varphi - C^2}_{\geq 0\ \forall \varphi \text{ ha } C=0}) = C^2 \varphi'^2$$

Geodesics on a sphere :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



$$S(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta \\ a \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi(t) \cos\theta(t) \\ a \sin\varphi(t) \sin\theta(t) \\ a \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{a^2\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi\right)}$$

tfh $\varphi \mapsto \theta(\varphi)$

$$\|\gamma(\varphi)\| = a\sqrt{1 + \theta'(\varphi)^2 \sin^2\varphi} = F(\varphi, \cancel{\theta}, \theta') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta'} = C_1$$

$$\left.\frac{\theta' \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{c_1}{a} \right|^2 \Rightarrow \theta'^2 \sin^4\varphi = \frac{c_1^2}{a^2} + \frac{c_1^2}{a^2}\theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\cancel{\theta'^2 \sin^4\varphi = \frac{c_1^2}{a^2}\left(1+\theta'^2 \sin^2\varphi\right)}$$

$$\cancel{\theta'^2 \sin^4\varphi\left(1 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{c_1^2}{a^2}}$$

$$\cancel{\theta'^2 = \frac{c_1^2}{a^2} \frac{1}{\sin^4\varphi\left(1 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right)}}$$

$$\frac{a^2}{c_1^2}\theta'^2 \sin^4\varphi - \theta'^2 \sin^2\varphi = 1$$

$$\theta'^2 \sin^4\varphi\left[\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right] = 1$$

$$\boxed{\theta'^2 = \frac{1}{\sin^4\varphi\left[\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right]}}$$

$$\theta = D + \int \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}}}\, d\varphi = D + \int \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{a^2}{c_1^2} - 1\right)}_{b^2} + \operatorname{ctg}^2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= D + \int \frac{(\operatorname{ctg}\varphi)'\, d\varphi}{\sqrt{b^2 + (\operatorname{ctg}\varphi)^2}} = D + \int \frac{dv}{\sqrt{b^2+v^2}} = D + \arcsin\frac{v}{b} =$$

$$= D + \arcsin\frac{c_1 \operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{a^2 - c_1^2}}$$

Courant – John : vol II / 764 pg.

Robert Weinstock : Calculus of Var with Apps

↳ 27old (35) ↳ ebben találtam esztornung

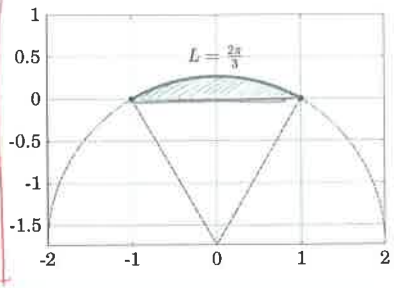
„As a particular case we consider."

Anal 3 – Variációsz.
GEODESICS
Gömb.

Analízis III. 9. heti feladatok
2017. november 16.

Variációszámítás 2. rész.

✓1. Határozzuk meg a $P_0(-1,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat az $y \geq 0$ félsíkban összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (Az $y = y(x)$ függvény gráfja alatti terület legnagyobb.) Adjuk meg $y(x)$ függvényt $L = \pi$, majd $L = \frac{2\pi}{3}$ esetén.
Extra kérdés: Milyen L esetén van megoldása a feladatnak?*



[HF$_1$] Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő von alak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám. Extra kérdés*: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

[HF$_2$] Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, y sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az z tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, z).) Mi lesz a görbe egyenlete abban a konkrét esetben, amikor a két pont: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,1)$.

2. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

3. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest fel színén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

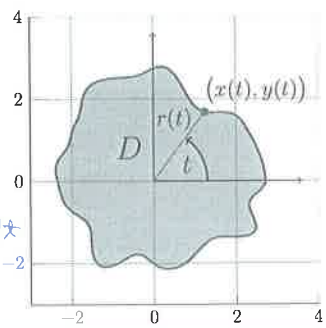
E-L
$F(x, u')$
típusú
$F'_{u'} = C$

4. Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy $L > 2x_1$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális? Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differneciálható függvényt, melyre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és

$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x = L \tag{1}$$

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy a belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < 2\pi$, ahol t jelölia pontot és az origót egyenes szakasz szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. A görbe hossza:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$



(a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} r\,dr\,d\theta \qquad T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

(b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot. $\int_0^{2\pi} \left(x^2 + y^2 + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right) dt$

(c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans. $E = x^2 + y^2$

6. (Síkinga mozgásegyenlete) Egy elhanyagolható tömegű l hosszú fonál egyik végét egy stabil ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű pontszerű testet helyezünk. Az így kapott ingát adott kezdeti szögből indítva szabadon engedjük az (x,z) síkban. Adjuk meg az inga mozgási és helyzeti energiáját, majd a legkisebb hatás elvét követve vezessük le az inga mozgásegyneletét.

↳ majd legyen az inga egy mozgó kocsira kötve

$\vec{v} = l\dot{\theta} + \dot{x}$

$\|\vec{v}\|^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta$

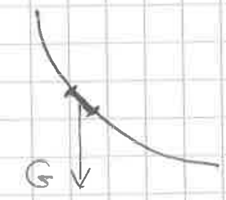
$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$
$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$

$$\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{L}'_\theta - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} = -mgl\sin\theta - ml^2\ddot\theta = 0$$

tehát az egyenlet: $\boxed{l\ddot\theta + g\sin\theta = 0}$

Adott egy lánc:



$E_{pot,i} = mgh_i = mg\,y(x_i)$

$m_i = l_i\sigma$ $\qquad E_{pot} \cong \sum_i E_{pot,i} = \sum_i mg\,y(x_i)$

$$E_{pot} = \int_\Gamma g\sigma y\,dl = g\sigma\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

min $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ u.h. $\int_a^L \sqrt{1+y'^2}\,dx = L$

$$\int_a^b (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$E = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} =$$

$$= \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow \frac{(y+\lambda)^2}{C^2} = 1+y'^2$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2-C^2}{C^2}}$$

$$\int \frac{|C|\,y'\,dy}{\pm\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2}} = x+D$$

$$\pm C\ln\left(y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2}\right) = x+D$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{e+e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{e}$$

I $\quad y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2} = e^{\frac{x+D}{C}} \Rightarrow (y+\lambda)^2 - C^2 = e^{2\frac{x+D}{C}} - 2e^{\frac{x+D}{C}}(y+\lambda) + (y+\lambda)^2$

$$(y+\lambda) = \frac{e^{2\frac{x+D}{C}} + C^2}{2e^{\frac{x+D}{C}}} = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2}$$

Geodézis, gömb:

Keresem $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ görbét : $\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a,b],\ \gamma(a) = P_1,\ \gamma(b) = P_2 \right\}$

amely az a-sugarú gömb része: $\Gamma \subset S$

$$S(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta \\ a \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Hogyan tudnánk úgy megadni egy $\gamma(t)$ görbét, hogy kapásból rajta legyen a gömbön, mi legyen a független változó?

legyen φ a független változó

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta(\varphi) \\ a \sin\varphi \sin\theta(\varphi) \\ a \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos\varphi \cos\theta - a\theta' \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \sin\theta + a\theta' \sin\varphi \cos\theta \\ -a \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\|^2 = a^2 \cos^2\varphi + a^2 \theta'^2 \sin^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi$$

$$= a^2 + a^2\theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = a\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2\varphi}$$

$$\text{Hossz}_\Gamma = \int_\Gamma dl = a \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \underbrace{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}}_{F(\varphi,\theta,\theta')}\, d\varphi$$

Energia fv:

$$E = F - \theta' F'_{\theta'} = \sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi} - \frac{\theta'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} \neq C$$

mert F függ φ-től is!

$$\cancel{F'_\theta} - \frac{d}{d\varphi} F'_{\theta'} = 0 \Rightarrow F'_{\theta'} = C \quad \text{azaz} \quad \frac{\theta' \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} = C \quad \Big|^2$$

$$\theta'^2 \sin^4\varphi = C^2 + C^2\theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\theta'^2 = \frac{C^2}{\sin^4\varphi - C^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{C^2}\sin^4\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{\sin^4\varphi}}{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}}$$

$$\theta' = \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}}}$$

2017 b

Varsádu 2.

Anal 3 gyak

Geodézisek gömb

2018b Gömb geodetikus (a lehető legegyszerűbben)

Adott $M \doteq \left\{ s(\varphi,\theta) = \text{Gömb param} \;\middle|\; \begin{matrix} \varphi\in[0,\pi] \\ \theta\in[0,2\pi) \end{matrix} \right\}$

Adott $A, B \in M$ pont és $\Gamma : A \to B$ görbe
u.h. $\Gamma \subset M$

Hogy tudnánk paraméteresen megadni egy sokaságon futó görbét?

Megoldás: Az M sokaság lokális paraméterei: φ és θ
Ezért ezeket tesszük időfüggővé!
Vagyis $\varphi(t)$, $\theta(t)$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cdot\sin\varphi(t)\cos\theta(t) \\ R\cdot\sin\varphi(t)\sin\theta(t) \\ R\cdot\cos\varphi(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[a,b] \right\}$$

Tfh létezik Γ-nak olyan paraméterezése, hogy $\varphi(t)=t$

Ekkor arra redukálódik, hogy:

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\sin t\cos\theta(t) \\ R\sin t\sin\theta(t) \\ R\cos t \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[a,b] \right\}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t\cos\theta - R\dot\theta\sin t\sin\theta \\ R\cos t\sin\theta + R\dot\theta\sin t\cos\theta \\ -R\sin t \end{pmatrix}$$

$$\|\dot\gamma(t)\| = R^2\cos^2 t + R^2\dot\theta^2\sin^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(1+\dot\theta^2\sin^2 t)$$

amit min. kell: $R\int_a^b \sqrt{1+\dot\theta^2\sin^2 t}\,dt$

$F(t,\cancel{\theta},\dot\theta)$

E-L: $F'_\theta - \frac{d}{dt}F'_{\dot\theta} = 0 \Rightarrow F'_{\dot\theta} = C$

$$F'_{\dot\theta} = \frac{\dot\theta \sin^2 t}{\sqrt{1+\dot\theta^2 \sin^2 t}} = C \quad \Big|^2$$

$$\dot\theta^2 \sin^4 t = C^2 \left(1 + \dot\theta^2 \sin^2 t\right)$$

$$\dot\theta^2 = \frac{C^2}{\sin^4 t - C^2 \sin^2 t} \implies \dot\theta = \sqrt{\frac{C^2}{\sin^4 t - C^2 \sin^2 t}}$$

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{C^2}\sin^4 t - \sin^2 t}} = \frac{1}{\sin^2 t \sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2 t}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}} = \frac{-(\mathrm{ctg}\, t)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) + \mathrm{ctg}^2 t}}$$

$$\theta(t) = -\int \frac{(\mathrm{ctg}\, t)'\, dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2}-1\right) + \mathrm{ctg}^2 t}} \overset{\text{vált. cs.}}{=} -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2}-1\right) + u^2}} = -\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{C^2}-1}}\right)$$

$$\theta(t) = -\arcsin\left(\frac{\mathrm{ctg}\, t}{\sqrt{\frac{1}{C^2}-1}}\right)$$

Forgástest felszínén!

$$S(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$$

keressük θ az x függvényében

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \int_{x_1}^{x_2} \|\gamma'(x)\|\,dx$$

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\cos\theta(x) - f(x)\theta'(x)\sin\theta(x) \\ f'(x)\sin\theta(x) + f(x)\theta'(x)\cos\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2\cos^2\theta + f^2\theta'^2\sin^2\theta - \quad + f'^2\sin^2\theta + f^2\theta'^2\cos^2\theta + \quad =$$

$$= 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

$$J[\theta] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+f'^2(x)+f^2(x)\theta'^2(x)}}_{F(x,\theta')}\,dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = C \Rightarrow \frac{f^2(x)\theta'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)+f^2(x)\theta'^2(x)}} = C \quad \Big|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^4\theta'^2 = C^2 + C^2f'^2 + C^2f^2\theta'^2$$

$$f^2\theta'^2(f^2-C^2) = C^2(1+f'^2)$$

$$\theta'^2 = C^2\frac{1+f'^2}{f^2(f^2-C^2)} \Rightarrow \theta + D = C\int \frac{\sqrt{1+f'^2}}{f\sqrt{f^2-C^2}}\,dx$$

pld: keressük $f(x) = x$, $x \in [1,2]$

$$\Rightarrow \theta + D = C\sqrt{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-C^2}}$$

Anal 3 – Variációszámítás II
GEODESICS – forgástest

Minimalizálom $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot\gamma(t)\|^2\, dt - t$ $\longrightarrow$ Nem tudom, hogy jó megoldást adna!

$$= \int_{t_1}^{t_2} (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)\, dt = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{(1 + f'^2 + f^2\theta'^2)}_{F(t,\theta,\theta')} dx =$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 2C \Rightarrow 2\theta' f^2 = 2C$$

$$\theta' = \frac{C}{f^2} \Rightarrow \theta = D + C \int \frac{1}{f^2(x)} dx$$

(élyet is várunk el)

$1: f(x) \equiv 1 \Rightarrow \theta = D + Cx$ ✓

$2: f(x) = x \Rightarrow \theta = D + C \ln x$

tehát $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ x\cos(D + C\ln x) \\ x\sin(D + C\ln x) \end{pmatrix}$

próba: $\|\gamma'(x)\| = 1 + \left[\cos(D + C\ln x) - x\cdot\frac{C}{x}\sin(D + C\ln x)\right]^2$

$$+ \left[\sin(D + C\ln x) + x\frac{C}{x}\cos(D + C\ln x)\right]^2 =$$

$$= 1 + \cos^2 + C^2\sin^2 \cancel{-2C\cos\sin}$$

$$+ \sin^2 + C^2\cos^2 \cancel{+2C\sin\cos} = 2 + C^2$$

Valóban: $\|\gamma'(x)\| = \text{konst.}$

$$\theta + D = C\sqrt{2}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - c^2}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2 - c^2}\right)$$

$$\theta = -D + \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2 - c^2}\right)$$

legyen $x_1 = 1$-re $\theta_1 = 0 \Rightarrow D = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2}\right)$ $\quad |c| \leq 1$

$x_2 = 2$-re $\theta_1 = \pi \Rightarrow D + \pi = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{4 - c^2}\right)$

Geodesic (minimális út) forgástesten

$f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Adott $S(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$

Legyen $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{figyelembe véve}]{S \text{ szerinti korlátozást}} \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t))\cos(\theta(t)) \\ f(x(t))\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \xrightarrow[x \mapsto \theta(x)]{\text{legyen}} \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$

$$L^\gamma[\theta] = \int_\gamma \|\gamma'(x)\|\, dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2 + f(x)^2\theta'(x)^2}\, dx$$

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'\cos\theta - f\theta'\sin\theta \\ f'\sin\theta + f\theta'\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2\cos^2\theta + f^2\theta'^2\sin^2\theta - 2\ldots + f'^2\sin^2\theta + f^2\theta'^2\cos^2\theta + 2\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

Euler–Lagrange egyenlet: $\frac{\partial F}{\partial \theta'} = C \Rightarrow \frac{\theta'(x) f(x)^2}{\sqrt{1 + f'(x)^2 + f(x)^2\theta'(x)^2}} = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(x) = D + C \int \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{f(x)\sqrt{f(x)^2 - C^2}}\, dx}$$ (elég csúnya egy integrál)!

$$\theta'^2 f^4 = C^2(1 + f'^2) + C^2 f^2\theta'^2 \Rightarrow \theta'^2 f^2(f^2 - C^2) = C^2(1 + f'^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta' = C\frac{\sqrt{1 + f'^2}}{f\sqrt{f^2 - C^2}}$$

Számoljuk ki: $E^\gamma[\theta] = \int_\gamma \|\gamma'(x)\|^2\, dl = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + f'(x)^2 + f(x)^2\theta'(x)^2\right) dx$

Euler–Lagrange egy:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 2C \Rightarrow f(x)^2\theta'(x) = C \Rightarrow \boxed{\theta = D + C\int \frac{dx}{f(x)^2}}$$

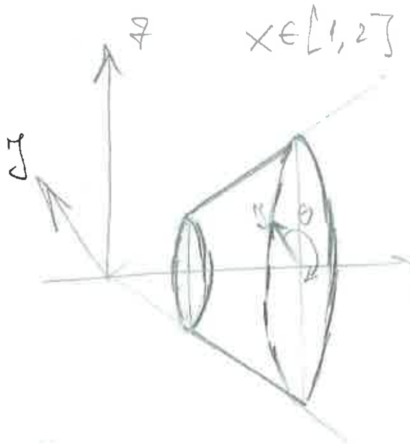
NEM HISZEM, HOGY ÍGY JÓ!!

Anal 3 – Variációs…
GEODESICS – forgás…

Gyönyörű …

Legyen $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$x \longmapsto \theta(x)$



$$\theta = D + C \int \frac{\sqrt{1+f'(x)}}{f(x)\sqrt{f^2(x)-c^2}}\, dx =$$

$$= D + C \int \frac{\sqrt{1+1}}{x\sqrt{x^2-c^2}}\, dx = D + \sqrt{2}\cdot C \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}}$$

próbálkozzunk:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{x^2-c^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{c} \frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{1}{\frac{x^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{c}\frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} =$$

$$= C \frac{1}{x\sqrt{x^2-c^2}}$$

tehát
$$\boxed{C \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right) + K}$$

$$\boxed{\theta = D + \sqrt{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right)} \dashrightarrow \left.\begin{array}{l}\theta(1) = 0 \\ \theta(2) = \frac{\pi}{2}\end{array}\right] \text{ Jsolve-al megoldani!}$$

Változócserével magyarázva:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}\cdot u} \frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}\, du = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+c^2}^{\,2}} =$$

legyen $u = \sqrt{x^2-c^2}$

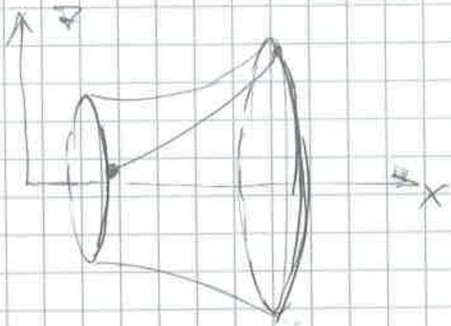
$x = \sqrt{u^2+c^2}$

$dx = \frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}\, du$

$$= \int \frac{du}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c}\int \frac{du}{\left(\frac{u}{c}\right)^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{u}{c} = \frac{1}{c} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right)$$

Forgástest felszínén



Paraméterezés:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(x)\|^2 = 1 + \left(f'\cos\theta - f\theta'\sin\theta\right)^2 + \left(f'\sin\theta + f\theta'\cos\theta\right)^2$$

$$= 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}$$

$$L = \int_\gamma d\ell = \int_a^b \sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}\,dx \to F(x,\theta')$$ nem függ θ-tól

$$F'_{\theta'} = \frac{f^2\theta'}{\sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}} = C \quad \Big|^2$$

$$\frac{f^4\theta'^2}{C^2} = 1+f'^2+f^2\theta'^2 \implies \cancel{\frac{f^4\theta'^2 - C^2(1+f'^2)}{C^2f^2}} = \theta'^2 C^2 f^2$$

$$\theta'^2\left(f^4 - C^2f^2\right) = C^2\left(1+f'^2\right)$$

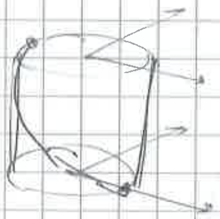
$$\theta' = \sqrt{\frac{C^2(1+f'^2)}{f^2(f^2-C^2)}}$$ ezért $\theta + D = C\int_a \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^2(f^2-C^2)}}\,dx$

legyen $f(x) = x$ ekkor: $\theta + D = C\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{x\sqrt{x^2-C^2}}$

$$\theta = -D + C\sqrt{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-C^2}}$$

2017b

Geodetikus



$$S = \left\{ s(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi),\ z \in [0,1] \right\}$$

$\boxed{\mathrm{I}}$ Paraméterezés: $(x(t), y(t), z(t))$

$$x(t) = \cos\theta(t)$$
$$y(t) = \sin\theta(t) \qquad \text{tehát} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$$z(t) = z(t)$$

ekkor $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\dot\theta \sin\theta \\ \dot\theta \cos\theta \\ \dot z \end{pmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot\theta^2 + \dot z^2}$

$$\int_\gamma d\ell = \int_a^b \sqrt{\dot\theta^2 + \dot z^2}\, dt$$

$\underline{\mathrm{II}}$ Paraméterezés legyen θ független változó

ergo $\theta(t) = \theta$ avagy $t = \theta$

ekkor $z(\theta)$ lesz

ezért $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z(\theta) \end{pmatrix} \qquad \gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ z'(\theta) \end{pmatrix} \qquad \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{1 + z'^2}$

$$L = \int_0^\pi \underbrace{\sqrt{1 + z'^2}}_{F(\theta, z, z')}\, d\theta \qquad \text{úh.} \quad z(0) = 0 \quad z(\pi) = 1$$

Szépen le van vezetve

$$F_z - \frac{d}{d\theta} F_{z'} = -\frac{d}{d\theta} \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = 0 \implies z' = C$$

$$z = C\theta + D$$
$$z(0) = D = 0$$
$$z(\pi) = C\pi = 1$$
$$C = \frac{1}{\pi}$$

tehát $\boxed{z(\theta) = \frac{\theta}{\pi}}$ ~~πt~~

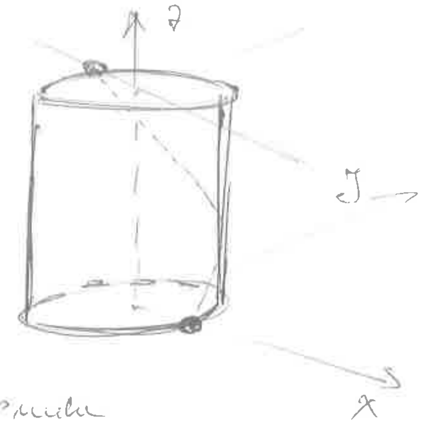
ezért $\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]}$

2017 b)

Var.számítás 2 | Feladat 3 HENGER Geodetikus

① $G \subset \mathbb{R}^3$ henger

Legrövidebb görbe a hengeren.



$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1+x'(z)^2+y'(z)^2}\,dz$$

$$\boxed{L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F(r,\dot r)\,dt} \to \min$$

ú.h. $r(t)=\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ \sin\theta(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$

$$\cancel{s(\theta,z)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow L=\int_{t_0}^{t_1}} \Rightarrow$$

$s(\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ ezen a felületen

$$L=\int_{t_0}^{t_1} F(r,\dot r)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\cos\theta(t))^{\cdot 2}+(\sin\theta(t))^{\cdot 2}+(z(t))^{\cdot 2}}\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\sqrt{1+\dot z(t)^2}}_{F(q,\dot q)}\,dt \qquad \Big\{\, q:=\begin{pmatrix}\theta\\ z\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial z}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot z}=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot z}=C \Rightarrow \frac{\dot z(t)}{\sqrt{1+\dot z(t)^2}}=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot z^2 = C^2(1+\dot z^2) \Rightarrow \dot z^2=\frac{C^2}{1-C^2} \Rightarrow \dot z = D \Rightarrow z = Dx+E$$

$z(0)=0 \Rightarrow E=0$

$z(1)=1 \Rightarrow D=1$

Ued 3

Legrövidebb görbe a hengeren

legyen $f(x)$ ← minimalizálandó

u.h. $g(x) = 0$

Lagrange multiplikátor magyarázata

legyen $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \}$

S: veletlhalmaz ... optim.

$\mathbb{R}$: alaphalmaz

legyen $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\ell(\lambda) := \inf_{x \in \mathbb{R}} \left(f(x) + \lambda g(x) \right) \leq \inf_{x \in S} f(x)$$

Scherer 1.3.4 Duality in optimization 10 pg

tehát $\ell(\lambda) \leq \inf_{x \in S} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

ezért keressük $\ell(\lambda)$ supremumát.

tehát $f_{opt} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}} L(x, \lambda) \right)$

ezért szükséges felt: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

A megkötések ilyen alakúak is lehetnek:

$G(x, u) = 0$

ennek következményeképpen: $\int_a^b \underline{\lambda(x)}\, G(x, u)\, dx = 0$

pld: $\tilde{J}(u, \lambda) = \int_a^b \left(F(x, u, u') + \lambda G(x, u) \right) dx$

$$\tilde{F}_u - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{u'} = 0$$

$$\tilde{F}_\lambda - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{\lambda'} = 0 \implies G(x u) = 0$$

ezt akkor, ha nulladrendűre van rendezve!

Lagrange multiplikátor

(1)

$$I[u] = \int_a^b F(x, u, u')\,dx \longrightarrow \min.$$

feltétel: $$\int_a^b G(x, u, u')\,dx = 0$$

Tfh. $u = u_{opt} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ konstans

ú.h. $\overline{F} = F - \lambda G$ kielégíti az Euler egyenletet.

(2)

$$S[x] = \int_0^1 L(t, x, \dot{x})\,dt$$

felt: $G(t, x, \dot{x}) = 0$ $\qquad G: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^k$

legyen $\lambda: [0,1] \to \mathbb{R}^k$

$$\tilde{S}[x, \lambda] = \int_0^1 \underbrace{L(t, x, \dot{x}) - \lambda^T(t) \cdot G(t, x, \dot{x})}_{\tilde{L}}\, dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \implies G(t, x, \dot{x}) = 0 \end{cases}$$

↳ ha $G = G(x)$:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \implies L'_{x_i} - \lambda^T(t)\, G'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda^T \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Variációszám.
Lagrange-mu

CCS-ben LQR:

$$\mathcal{J}[x,u] = \int_0^T F(x,u,t)\,dt \quad \to \text{min}$$

felt: $\dot{x} = f(x,u,t)$

$$\mathcal{J}[x,\dot{x},u] = \int_0^T \Big(F(x,u,t) - \lambda^T(t)\left[f(x,u,t) - \dot{x} \right] \Big)\,dt$$

$$= \int_0^T \Big(\underbrace{F - \lambda^T f}_{H} - \lambda^T \dot{x} \Big)\,dt$$

Valamilyen körülzárt probléma^{-1}: legnagyobb kerítés, adott területű kert.
(Dido hercegnő)

(5)

min $P[u] = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2}\, dx$

feltéve, hogy $\int_0^1 u(x)\,dx = A \Rightarrow G[u] = \int_0^1 u(x)\,dx - A$

legyen $L[u,\lambda] = P[u] + \lambda G[u] =$ | $\lambda \in \mathbb{R}$: const.

$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+u'^2} + \lambda u\right) dx - \cancel{\lambda} A$ → $\mathcal{E}$ szerinti deriválásban ez lenne

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow +\lambda - \frac{d}{dx}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = +\lambda x + C}$$

$$u'^2 = (C+\lambda x)^2(1+u'^2)$$

$$\left[1-(C+\lambda x)^2\right]u'^2 = (C+\lambda x)^2$$

$$u' = \sqrt{\frac{(C+\lambda x)^2}{1-(C+\lambda x)^2}} = \frac{C+\lambda x}{\sqrt{1-(C+\lambda x)^2}} \Rightarrow u = D + \int \frac{C+\lambda x}{\sqrt{1-(C+\lambda x)^2}}\,dx \Rightarrow$$

legyen $t = C+\lambda x$, $dt = +\lambda dx$ | $\Rightarrow u = D + \frac{1}{\lambda}\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = D - \frac{1}{\lambda}\int\frac{-t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$$= D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-t^2} = D + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(C-\lambda x)^2}$$

$D := 0$; $x = 0 \Rightarrow u(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-C^2} = 0 \Rightarrow C = 1$

$x = 1 \Rightarrow u(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda}\underbrace{\sqrt{1-(1-\lambda)^2}}_{=0} = 0$

$1 = (1-\lambda)^2$

$\lambda = 2$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}}$$

Anal 3 – Variáció II
Lagr. mult.
$\int = C$ tip korl.

(4) Valamilyen korátlyos problémás: Adott L hosszúsággal vonal Integrálja maximalás

$$\max: \int_0^1 u(x)\,dx$$

$$\text{u.t.} \quad \int_0^1 \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx = \ell$$

$$L[u,\lambda] = \int_0^1 u(x) + \lambda\sqrt{1+u'(x)^2}\,d\cancel{x} + \lambda\ell$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda\frac{d}{dt}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{1}{\lambda}x + C}$$ ugyanaz a diffegyenlet!

$$\Rightarrow \quad u = D + \oint \frac{C+\frac{x}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(C+\frac{x}{\lambda}\right)^2}}\,dx$$ → ennek megoldása szemtelen a félkör

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + \int t\left(\sqrt{1-t^2}\right)' dt =$$

$$= \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\int \sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]$$

STEP Integral

$$\int_0^1 D + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda t+c)^2}\,dt = Dt\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arcsin(\lambda t+c) + (\lambda t+c)\sqrt{1-(\lambda t+c)^2}\Big]_0^1 =$$

$$= D + \arcsin C + C\sqrt{1-C^2} - \arcsin(\lambda+C) - C\sqrt{1-(\lambda+C)^2} =$$

$$= D + \arcsin C + \cancel{C\sqrt{1-C^2}} - \arcsin(-C) - \cancel{C\sqrt{1-(-C)^2}} =$$

$$= \underline{D + 2\arcsin C = T}$$

$$\underline{D - \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2} = 0}$$

$$\Big\} \; 2\arcsin C + \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2} = T$$

$\Downarrow$ fsolve

$C =$ függvénye T-nek.

$\Downarrow$

$$D = \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2}$$

⑤ Valamelyen hírdlegmi problémá — legrövidebb keresés, adott területtel kert.

$$\min \mathcal{J}(u) = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2}\, dx$$

feltéve, hogy: $I(u) = \int_0^1 u(x)\, dx = T$ konstans!

Lagrange multiplikátor : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ u.h. $\min \mathcal{J}(u) + \lambda I(u)$

$$\min \mathcal{J}^*(u) = \int_0^1 \left[\sqrt{1+u'^2} + \lambda u\right] dx$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}^*(u)}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{F}^*}{\partial u'} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right]_x}$$ → megoldandó diffegyenlet

vagyis $\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \lambda x + C$

$$\Downarrow$$

$$u' = \frac{(\lambda x + C)}{\sqrt{1-(\lambda x+C)^2}} \Rightarrow u = D + \int \frac{\lambda x + C}{\sqrt{1-(\lambda x + C)^2}}\, dx$$

$$\boxed{u = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x+C)^2}}$$

$$T = \int_0^1 u\, dx = \int_0^1 D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x + C)^2}\, dx \ \underset{dt = \lambda dx}{\overset{t = \lambda x + C}{=}} \ D - \frac{1}{\lambda^2}\int_C^{\lambda + C} \sqrt{1-t^2}\, dt =$$

$$= D - \frac{1}{2\lambda^2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]_C^{\lambda+C} =$$

$$= D - \frac{1}{2\lambda^2}\left[\arcsin(\lambda+C) + (\lambda+C)\sqrt{1-(\lambda+C)^2} - \arcsin C + C\sqrt{1-C^2}\right] = T$$

$$u(0) = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-C^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2C}$$

$$u(1) = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda+C)^2} = 0$$

(analitikusan nem megoldható)

Anal 3 – Variációszám.
Lagrange-mult.
I = C típusú kort.

Energiafüggvény : $F(x,g,g') = \sqrt{1+f(x)^2+f(x)^2 G'(x)^2}$ → nem erre gondoltam

DiDO Probléma :

$$\max \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx$$

$$\text{s.t.} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \pi \text{ (adott)}$$

$$[x_1, x_2] = [0, 2]$$

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y(x) + \lambda\sqrt{1+y'(x)^2}}_{F(x,y,y')}\,dx$$

Energia : $\boxed{y(x) + \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = C_1}$ ⟹ $y(x) = C_1 + \sqrt{\lambda^2 - (x+C_2)^2}$

$C_2 \in \mathbb{R}$ (lehet negatív is)

Megoldás, $C_1, C_2, \lambda = ?$

$$\frac{\lambda^2}{1+y'^2} = (C_1-y)^2$$

$$y'^2 = \frac{\lambda^2}{(C_1-y)^2} - 1$$

$$y'^2 = \frac{\lambda^2-(C_1-y)^2}{(C_1-y)^2} \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$y' = \frac{\pm\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2}}{C_1-y}$$

$$\int \frac{-(C_1-y)}{\mp\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2}}\,dy = x + C_2$$

$$\mp\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2} = x + C_2 \quad \Big|^2$$

$$\lambda^2-(C_1-y)^2 = (x+C_2)^2$$

$$\lambda^2-(x+C_2)^2 = (C_1-y)^2 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{\lambda^2-(x+C_2)^2} = C_1 - y$$

$$\boxed{y = C_1 + \sqrt{\lambda^2-(x+C_2)^2}}$$

$y(0) = 0$; $\int_0^2 \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \pi$ (egységkör félkerülete)

$y(2) = 0$

Vagyis :

$$0 = C_1 + \sqrt{\lambda^2 - C_2^2}$$

$$0 = C_1 + \sqrt{\lambda^2-(2+C_2)^2}$$

$\Rightarrow C_2 = \pm(2+C_2)$

$C_2 = 0$

$\boxed{C_2 = -1}$

⇓

$$-C_1 = \sqrt{\lambda^2 - C_2^2} \Rightarrow \boxed{C_1 \le 0}$$

$$C_1^2 = \lambda^2 - C_2^2$$

$$\lambda = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

Próba szerencse : $\boxed{C_1 := 0} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$$y(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{1-x^2+2x-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2x-x^2}}$$

y : az egység sugarú kör $(1,0)$-ba tolva : $\sqrt{1-(x-1)^2}$; a kör kerülete $= 2\pi$

Lagrange mult...

DiDO Probléma...

Láncgörbe

Potenciális energia $= \sum_i m_i g y_i = \sum_i \sigma l_i g y_i = \sigma g \int_\Gamma y \, dl = \sigma g \int_{-x_1}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$\boxed{E_{pot} = \sigma g \int_{-x_1}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \to \min}$$

$$\boxed{\text{s.t.} \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = L \quad \text{adott}}$$

Lagrange multi.: $J(y) = \int_{-x_1}^{x_1} \underbrace{(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}}_{F(x,y,y')}\, dx$

Energia fv: $\underbrace{\dfrac{(y+\lambda)(1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}}}_{F(x,y,y')} - \underbrace{(y+\lambda)\dfrac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}_{y' F'_{y'}(x,y,y')} = C_1$

$$\boxed{\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1} \Longrightarrow \boxed{y' = \pm \frac{1}{C_1}\sqrt{\lambda^2 - C_1^2 + 2\lambda y + y^2}}$$

$$y^2 + 2y\lambda + \lambda^2 = C_1^2 + C_1^2 y'^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{C_1^2}\left(\lambda^2 - C_1^2 + 2\lambda y + y^2\right)$$

$$C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - C_1^2}} = x + C_2$$

$$C_1 \int \frac{\frac{1}{C_1}dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C_1}\right)^2 - 1}} = x + C_2 \Longrightarrow C_1 \operatorname{arcosh}\frac{y+\lambda}{C_1} = x + C_2$$

$$\frac{y+\lambda}{C_1} = \cosh\frac{x+C_2}{C_1}$$

$$\left[\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{y = -\lambda + C_1 \cosh\frac{x+C_2}{C_1}}$$

2012

Variációszámítás 3
Láncgörbe!

Tehat kijött:

$$\boxed{y = -\lambda + C_1 \cosh \frac{x + C_2}{C_1}}$$

$$\left.\begin{aligned} & y(-x_1) = y(x_1) = y_1 \\ & \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = L \end{aligned}\right\} \Longrightarrow C_1, C_2, \lambda$$

$$c \operatorname{arch}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = x + D$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = \cosh\left(\frac{x+D}{c}\right)$$

egyik megoldás

$$\int \frac{y' \, dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \int \frac{1}{c} \frac{y' \, dx}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}} = \int \frac{u' \, dx}{\sqrt{u^2-1}} =$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = u \qquad \frac{y'}{c} = u'$$

$$= \operatorname{arch} u = \operatorname{arch}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = x$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = \operatorname{ch} x \Rightarrow y = C \cdot \operatorname{ch} x - \lambda$$

avagy:

$$\int \frac{u' \, dx}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) = \ln\left(\frac{y+\lambda}{c} + \sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}\right) =$$

$$= \ln \frac{1}{c} + \ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}\right)$$

$$\ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) = x$$

$$u + \sqrt{u^2-1} = e^x$$

$$\sqrt{u^2-1} = e^x - u \quad \Big| ^2$$

$$u^2 - 1 = e^{2x} - 2e^x u + u^2$$

$$2e^x u = e^{2x} + 1$$

$$u = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{y+\lambda}{c} \Rightarrow y = C \operatorname{ch} x - \lambda$$

avagy

$$\ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}\right) = x + D$$

$$y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2} = e^{x+D}$$

$$\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2} = e^{x+D} - (y+\lambda) \quad \Big| ^2$$

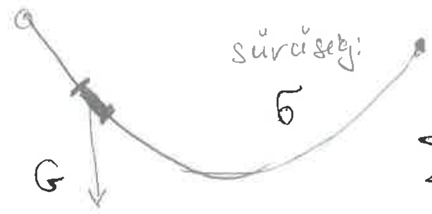
$$(y+\lambda)^2 - c^2 = e^{2(x+D)} - 2e^{x+D}(y+\lambda) + (y+\lambda)^2$$

$$2e^{x+D}(y+\lambda) = e^{2(x+D)} + c^2 \Rightarrow y + \lambda = \frac{e^{x+D} + c^2 e^{-(x+D)}}{2}$$

20476

Láncgörbe

Láncgörbe levezetés



$E_i = \Delta m_i g h_i = \Delta l_i \cdot \sigma g\, y_i$

$$\sum_i E_i = \sum_i \sigma \cdot g \cdot y_i\, \Delta l_i \longrightarrow \int_\Gamma \sigma g\, y\, dl$$

tehát $E_{pot} = \sigma g \int_\Gamma y\, dl = \sigma g \underbrace{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx}$

feltétel $\underbrace{L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx}$

Fizikai levezetés

$$F = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

$$E = F - y' F'_{y'} = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{(y+\lambda)\, y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \underline{\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C}$$

$$\frac{(y+\lambda)^2}{C^2} = 1 + y'^2 \Rightarrow \boxed{y' = \pm \sqrt{\frac{(y+\lambda)^2 - C^2}{C^2}}}$$

$$\pm |C| \int \frac{y'\, dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2}} = \int dx$$

Euler–Lagrange levezetés

$$\pm C \ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2}\right) = x + D$$

$$y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2} = e^{\frac{x+D}{C}} \quad \Big|^2 \Rightarrow \cancel{(y+\lambda)^2} - C^2 = e^{2\frac{x+D}{C}} - 2e^{\frac{x+D}{2}}(y+\lambda) + \cancel{(y+\lambda)^2}$$

$$2e^{\frac{x+D}{C}}(y+\lambda) = e^{2\frac{x+D}{C}} + C^2$$

$$y + \lambda = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2}$$

így is jó!

$$\boxed{y = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2} - \lambda}$$

Feltétel $\cancel{y(-a) = \frac{e^{2}+\lambda}{e}} = y(a)$ $\quad y(a) = y(-a) = y_a$

$$e^{\frac{a+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{a+D}{C}} - e^{\frac{-a+D}{C}} - C^2 e^{-\frac{-a+D}{C}} = 0$$

$y(a) - y(-a) = 0 \Rightarrow$ $e^{\frac{a+D}{C}} + C^2 e^{\frac{-a-D}{2}} - e^{\frac{-a+D}{C}} - C^2 e^{\frac{+a-D}{C}} = 0$

Láncgörbe

Legyen $\Delta = -\ln\frac{1}{c} = \ln c$

ekkor $$\frac{e^{x+\ln c} + c^2 e^{-x-\ln c}}{2} = \frac{c e^{x} + c e^{-x}}{2}$$

Vázlatosan:

$$F = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} \implies y' = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2 - c^2}{c^2}}$$

vagyis $$\pm c \int \frac{y'\,dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \int 1\,dx$$

csak a $+$ os verziót tekintjük

egyszerűbb megoldás:

$$c \int \frac{\frac{1}{c} y'\,dx}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}} = c \int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u^2-1}} = c\,\mathrm{arch}(u) = x+\Delta$$

legyen $\frac{y+\lambda}{c} = u$

$\frac{y'}{c} = u'$

$\mathrm{arch}(u) = \frac{x+\Delta}{c}$

$$\boxed{u = \mathrm{ch}\left(\frac{x+\Delta}{c}\right)} \implies y = c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{x+\Delta}{c}\right) - \lambda$$

~~$u(x_1) = u(-x_1) = y_1$ ekkor $\mathrm{ch}\left(\frac{x_1+\Delta}{c}\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{-x_1+\Delta}{c}\right)$~~

~~ezért legyen $\Delta = 0$~~

$y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ ekkor $c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{+x_1+\Delta}{c}\right) = c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{-x_1+\Delta}{c}\right)$

ezért legyen $\Delta = 0$

tehát $y = c\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{x}{c}\right) - \lambda$

$$\left.\begin{aligned} & y(x_1) = y_1 \\ & \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} & \lambda = \dots \\ & c = \dots \end{aligned}$$

2017b

Láncgörbe

-3-

Varsányi

Analízis III. 6. heti feladatok
2016. október 21.

Variációszámítás 3. rész

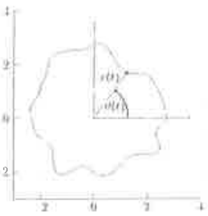
1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, konkáv függvény által leírt forgástest felszínén adott két $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$ pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet. (Speciális esetben: $f : [1,2] \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x$, $P_1(1,1,0)$, $P_2(2,0,2)$)

2. (Ismétlés) Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0,2]$ intervallumon, $x(0) = x(2) = 0$ feltétel mellett, melyre a görbe alatti terület maximális. Számoljuk ki C_1, C_2, λ értékeit.

3. (*Előadáson szereplő példa újra.*) Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy L ($> 2x_1$) hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális?

   Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényeket, melyre $y(x_1) =$ $= y(-x_1) = y_1$ adott érték, és

$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L$$



[HF$_1$] (Előkészület az *izoperimetrikus feladat* megoldásához.) Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon, mely belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ahol t jelöli az adott pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt$$

[HF$_2$] $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\varphi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\varphi) = \iint_D |\operatorname{grad} \varphi(x, y)|^2 \, d(x, y)$$

4. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x, t)$ függvény írja le, ahol $0 \leq x \leq \ell$. (Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} u_t'^2(x, t)\, dx, \qquad V(t) = \tau \int_0^{\ell} \left(\sqrt{1 + u_x'^2(x, t)} - 1\right) dx,$$

ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\, dt$$

Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

Forgástest felsz. geodet / pl $f(x)=x$

$y=f(x)$ fng.

Analízis III. 6. heti feladatok

2016. október 21.

$\pi/6$

$2r\pi =$

Variációszámítás 3. rész.

1. Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ intervallumon, $x(0) = x(\frac{\pi}{3}) = 0$ feltétel mellett, melyre a görbe alatti terület maximális. Formálisan:

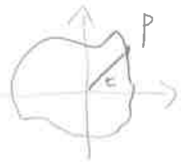
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(t)\,dt \quad \to \quad \max \quad (= T)$$

(*)

2. (*Előadáson szereplő példa újra.*) Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy L ($> 2x_1$) hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális?

   Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényeket, melyekre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és

$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L$$



3. (Előkészület az *izoperimetrikus feladat* megoldásához.) HF Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon, mely belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, ahol t jelöli az adott pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. Igazoljuk, hogy a görbe általak közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

5. ~~4.~~ (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x,t)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$. (Tehát $u : [0,\ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} u_t'^2(x,t)\ \mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau \int_0^{\ell} \left(\sqrt{1 + u_x'^2(x,t)} - 1\right)\ \mathrm{d}x,$$

   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\ \mathrm{d}t.$$

   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

(*) HF Az a görbét, a fv alatti terület fix T, és fv gráfja legrövidebb

Variációszám 3
6. gyak -1-

Kanonikus paraméterezés:

$\S$ $\Gamma_k = \{\gamma(\tau) : \tau \in [0, L]\}$

$$F(\ell) := \int_0^\ell \|\dot\gamma(\tau)\|\, d\tau = \ell \quad \Rightarrow \quad F'(\ell) = \boxed{\|\dot\gamma(\tau)\| = 1}$$

Kell ennél több?

Tehát $\forall$ görbe esetén $\exists$ kanonikus paraméterezés, amikor $\|\dot\gamma(\tau)\| = 1$.

dehát $\frac{d}{dt}\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}} = \frac{d}{dt}\frac{\dot x}{\|\dot\gamma(t)\|} \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2}{d\tau^2}x = G'_x}$

4

~~5.~~ $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D |\operatorname{grad} \phi(x, y)|^2 \, \mathrm{d}(x, y).$$

$$\min \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt}_{\text{Energia}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = G'_x \qquad \frac{d^2}{ds^2} x = G'_x$$

$S =$ Kanonikus paraméterezés

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

$$s(\Gamma) = s = \{ \eta(\tau) : \tau \in [0, s]\}$$

Variációszámítás 3
6. gyak. – 2 –

Analízis III. 10. heti feladatok

2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

F] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.

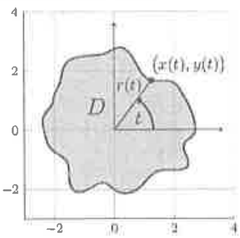
Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen

$$(x(t), y(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.

A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$



(a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

(b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.

(c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D \|\nabla\phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (***Előadáson szereplő példa újra***) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \leq x \leq \ell$, és $t_1 \leq t \leq t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} {u'_t}^2(t, x)\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^{\ell}\left(\sqrt{1 + {u'_x}^2(t, x)} - 1\right)\mathrm{d}x,$$

ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(K(t) - V(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u'_x|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$ hullámegyeletet kapjuk.

Analízis III. 10. heti feladatok
2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

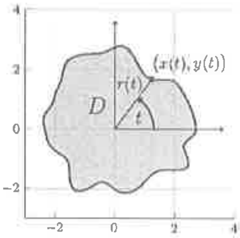
1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

[HF] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.



Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen

$$(x(t), y(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.

A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

(a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

(b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.

(c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D \|\nabla\phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (***Előadáson szereplő példa újra***) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$, és $t_1 \le t \le t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} u_t'^2(t, x)\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^{\ell}\left(\sqrt{1 + u_x'^2(t, x)} - 1\right)\mathrm{d}x,$$

ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big(K(t) - V(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyenletet kapjuk.

6 hét HF1

Terület $\oint_\Gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \dot r(t)\, r(t) \sin t \cos t + r^2(t)\cos^2 t \, dt =$

$x = r(t)\cos(t)$

$y = r(t)\sin(t)$

$dy = \left(\dot r(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\right) dt$

$= \int_0^{2\pi} r^2(t) \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\, dt$

Green T következménye

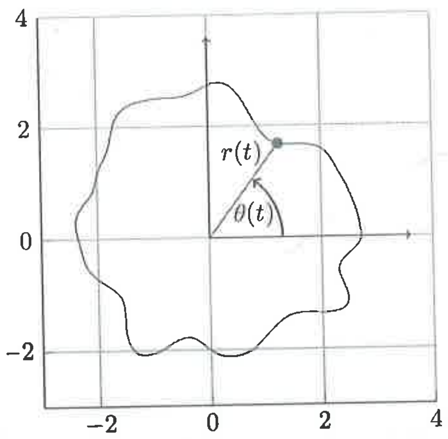
$\oint \langle F, n\rangle\, dl = \iint \nabla F\, dS$

$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Delta (Q'_x - P'_y)\, dx\,dy$

$\left.\begin{array}{l} P = -y \\ Q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\oint_C y\,dx = \iint_\Delta dx\,dy = 1$

$\left.\begin{array}{l} Q = x \\ P = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C x\,dy = \iint_\Delta dx\,dy = 1$

Green T területre vonatk.



Áttérés polárkoordináta alapján!

$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ legyen $r = r(\theta)$

$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$

Árg. elhagyom:

$T \overset{?}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 + y^2\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, dt$

Másik irányból:

$T = \iint_\Delta dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 + y^2\, d\theta$

áttérés polár koord.

Jacobi determináns!

Diffgeós levezetés

$x := r\cos\theta$

$y := r\sin\theta$

$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$

$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

$dx \wedge dy = r\cos^2\theta\, dr\wedge d\theta - r\sin^2\theta\, d\theta \wedge dr =$

$= r\, dr \wedge d\theta$

Levezetés

2016 b

Gyak 6 [HF1]

6 HF_2

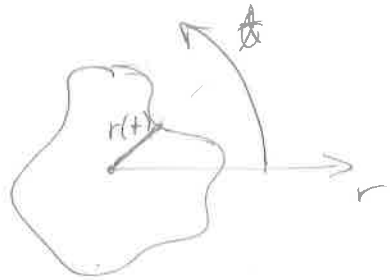
$$J(\Phi) = \iint_D \sqrt{\phi_x'^2 + \phi_y'^2}\, d(x,y)$$

$$E-L: \; 2\phi_x'' + 2\phi_y'' = 0 \Rightarrow \Delta\phi = 0$$

legyen $t \in [0, 2\pi]$

legyen $r(t) > 0$ függvény

$r(0) = r(2\pi)$



továbbá a görbe ívhossza adott!

$$L = \int_\Gamma dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(t) + \dot r^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot r^2 + r^2}\, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(t) \\ r(t)\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{r^2(t) + \dot r(t)^2}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot r\cos t - r\sin t \\ \dot r\sin t + r\cos t \end{pmatrix}$$

$$T = \iint_D 1\, dS = \iint_D \big(\overbrace{Q'_x - P'_y}^{1}\big)\, dx\, dy = \int_\Gamma \overset{0}{P}\, dx + \overset{x}{Q}\, dy$$

$$= \int_\Gamma x\, dy = \int_0^{2\pi} r\cos t\,(\dot r\sin t + r\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r\dot r\cos t\sin t + r^2\cos^2 t) + r^2\sin^2 t - r^2\sin^2 t\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 + r\dot r\cos t\sin t - r^2\sin^2 t\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 + r\sin t(\dot r\cos t - r\sin t)\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r^2 + y\dot x)\, dt = \int_0^{2\pi} r^2\, dt - \left(-\int_0^{2\pi} y\dot x\, dt\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2\, dt - \underbrace{\left(-\int_\Gamma y\, dx\right)}_{T}$$ ekkor $2T = \int_0^{2\pi} r^2\, dt$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, dt$$

$\boxed{\text{GreenT}}$

2017b

Eleve érdemes lett volna $\frac{1}{2}\int_\Gamma x\, dy - y\, dx$ -et venni!

[illegible] 3

Max kerület

amőba

Analízis III. 8. heti feladatok
2017. november 10.

Variációszámítás 1. rész.

Tavalyi ZH példák!

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

2. Adott a síkon két pont $A(a, \alpha)$ és $B(b, \beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat összekötő görbék közül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz.
(Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4. ~~(HF)~~ Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$ alapfüggvény esetén.

6. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

D4* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

ahol $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

54 oldal

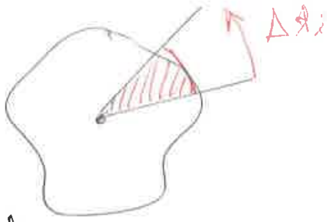
Áll: Ha $F(x, u, u') = F(u, u')$ esetben

u stac mo $\iff$ $E = F - u'F'_{u'} \equiv$ konstans VAGY → min forgástest → brachist

$$T = \iint_D (\underbrace{Q'_x - P'_y}_{=1})\,dx\,dy = \int_\Gamma \overset{-\frac{1}{2}y}{P}\,dx + \overset{\frac{1}{2}x}{Q}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \begin{matrix} -r\sin t\,(\dot r\cos t - r\sin t) \\ + r\cos t\,(\dot r\sin t + r\cos t) \end{matrix}\; dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt$$



---

más kopp: határátmenet

$$T \cong \sum_i \pi r(t_i)^2 \cdot \frac{\Delta t_i}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt$$

Feladat tehát:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt \quad \text{max} \quad \text{u. h.} \quad \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,dt$$

$$\tilde I = \int_0^{2\pi} r^2 + \lambda\sqrt{r^2+\dot r^2}\,dt$$

$$F = r^2 + \lambda\sqrt{r^2+\dot r^2} - \lambda\frac{\dot r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C$$

$$r^2 + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C \Rightarrow \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C - r^2 \quad \Big|^2$$

$$\frac{r^4}{r^2+\dot r^2} = (C-r^2)^2$$

$$\dot r^2 = \frac{r^4}{(C-r^2)^2} - \frac{(C-r^2)^2 r^2}{(C-r^2)^2}$$

szerencsétlen ez épp nem vezet könnyen megoldásra!

2017b

GreenT

Feladat 3
Max területű
amőba

Feladat x, y-ban:

$$\max \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2+y^2)\, dt \qquad \text{mig} \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\, dt = L$$

$$\tilde F = x^2+y^2 + \lambda \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$$

Sokkal szebb (x, y)-ban

$$\tilde F_x' - \frac{d}{dx}\tilde F_{\dot x}' \leftarrow \text{bonyolult helyette}$$

$$\dot x \tilde F_{\dot x}' = \frac{\lambda \dot x^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

$$E = x^2+y^2 + \lambda\sqrt{\dot x^2+\dot y^2} - \frac{\lambda \dot x^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} - \frac{\lambda \dot y^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

$$= x^2+y^2 + \frac{\lambda \dot x^2+\lambda \dot y^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} - \text{—"—} - \text{—"—} = x^2+y^2 = C$$

(2018-ban is)
2017b

Varsám 2 Megoldás

Anal 3
Max T-ű
AMŐBA

Variációszámítás

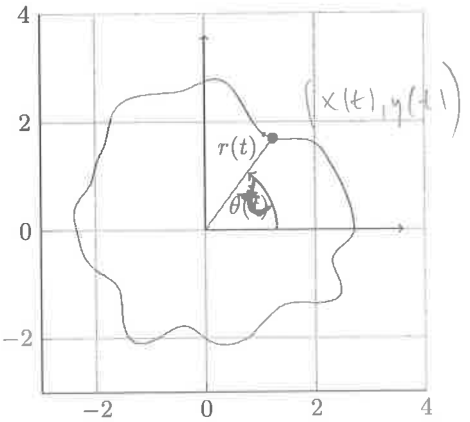
- Egy konkrét feladat -

2017. november 13.

Izoperimetrikus feladat

Feladat: Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Igazoljuk, hogy ez a görbe a körvonal.

Megoldás: *1. lépes.* Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.



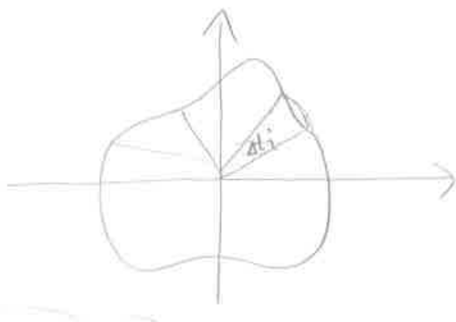
A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

2. lépes. Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t)) dt.$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(t) dt$$



(VISSZA)

3. lépes. Írjuk fel a megfelelő variációszámítási feladatot. A megengedhető függvények halmaza így adható meg:

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \ : \ x, y : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \text{ kétszer folyt. diff-ható, , } x(0) = x(2\pi), \ y(0) = y(2\pi) = 0\},$$

tehát két függvényt keresünk.

A funkcionál, amit maximalizálni szeretnénk:

$$I(x,y) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right) dt, \tag{1}$$

ahol az integrál mögött λ tényezővel szorozva megjelent a korlátozó feltétel is.

A (1) integrálban szereplő függvény:

$$F(\cancel{t}, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

nem függ közvetlenül t-től, ezért optimális megoldás mentén az E energiafüggvény konstans.

4. lépes. Határozzuk meg az "energiafüggvény"-t:

$$E = F - \dot{x}F'_{dotx} - \dot{y}F'_{doty}$$

A parciális deriváltak:

$$F'_{\dot{x}} = \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad F'_{\dot{y}} = \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Így ezeket visszahelyettesítve:

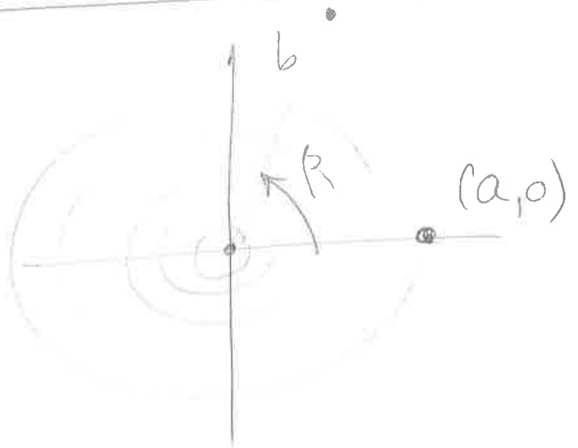
$$\begin{aligned} E &= F - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \dot{y}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \\ &= \cdots = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Így azt kaptuk, hogy az optimális görbe mentén

$$E(t) = c \qquad \Longrightarrow \qquad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

tehát az optimális görbe egy kör.

2018b Varsedm 3 szenzeros pld



$$I = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot v \, dt = \int_0^T \sqrt{\frac{\dot x^2+\dot y^2}{x^2+y^2}} \, dt$$

$$v = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$$

$$E = F - \dot x F'_{\dot x} - \dot y F'_{\dot y} = \sqrt{\frac{\dot x^2+\dot y^2}{x^2+y^2}} - \frac{\dot x^2+\dot y^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Polárkoordinátákkal: ~~v(t) = r(t) · θ(t)~~

$$v(t) = \sqrt{\dot x^2+\dot y^2} = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2} = \sqrt{r'^2+r^2}\cdot\dot\theta$$

$$\dot x = \dot r\cos\theta - r\dot\theta\sin\theta \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot y = \dot r\sin\theta + r\dot\theta\cos\theta$$

$$\dot x^2+\dot y^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 \qquad \dot r = r'_\theta\cdot\dot\theta$$

$$I = \int_0^T \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r}\,\dot\theta\, dt = \int_0^\beta \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r}\, dr$$

$$E = F - r'F'_{r'} = \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r} - \frac{1}{r}\,\frac{r'^2}{\sqrt{r'^2+r^2}} = \frac{r'^2+r^2}{r\sqrt{\ }} - \frac{r'^2}{r\sqrt{\ }} = c$$

$$\frac{r}{\sqrt{r'^2+r^2}} = c \Big|^2 \Rightarrow r^2 - c^2r^2 = c^2r'^2 \Rightarrow r' = \frac{r}{c}\sqrt{1-c^2}$$

$$r(\theta) = A\, e^{\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}\theta}$$

azaz: $r(\theta) = c_2\, e^{c_1\theta}$ (*)

Anal3 Varsedm
2018b
Szenzeros (U7)

(4) feladat – felület keresése

$\phi : D \to \mathbb{R}$

$$I(\phi) = \iint_D \underbrace{\|\operatorname{grad}\phi(x,y)\|^2}_{F(x,y,\phi,\phi'_x,\phi'_y)} d(x,y)$$

$$F = \phi_x'^2 + \phi_y'^2 \Rightarrow \text{E-L: } \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \phi'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \phi'_y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{\partial}{\partial x}\phi'_x + 2\frac{\partial}{\partial y}\phi'_y = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\phi(x,y) = 0}$$

(5) l hosszú (nyújtható) m tömegű húr rezgőmozgását.

$u(x,t)$, $x \in [0,l]$

$$T(t) = \frac{m}{2l}\int_0^l u'_t(x,t)^2\,dt \qquad V(t) = \tau\int_0^l \left(\sqrt{1+u'_x(x,t)^2} - 1\right)dx$$

Hamilton elv:

$$\min\int_{t_1}^{t_2} T(t) - V(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \underbrace{\left(\frac{m}{2l}u_t'^2 - \tau\sqrt{1+u_x'^2} + \tau\right)}_{F(x,t,u,u'_x,u'_t)} dx\,dt$$

$$\text{E-L: } \boxed{\frac{\tau\,u''_{xx}}{\left(u_x'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{l}u''_{tt} = 0}$$

Mathematica! (következő lapon!)

ez nyilván elhanyagolható

$$\tau u''_{xx} = \frac{m}{l}u''_{tt} \Rightarrow \boxed{u''_{xx} = \frac{1}{\tau\frac{l}{m}}u''_{tt}}$$

Variációszám 3

Hullámegyenlet

$$F = \frac{m}{2l} u_t'^{2} - \tau \sqrt{1 + u_x'^{2}} + \tau$$

$$-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x'} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u_t'} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \tau \frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^{2}}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{m}{2l} 2u_t' = 0$$

$u_x'^{2} \ll 1$, és akkor máris megvagyunk.

$$-\tau \frac{u_{xx}'' \sqrt{1+u_x'^{2}} - u_x' \frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^{2}}}}{1+u_x'^{2}} + \frac{m}{l} u_{tt}'' = 0$$

$$-\tau \frac{u_{xx}'' \frac{1+u_x'^{2}}{\sqrt{1+u_x'^{2}}} - u_x'^{2} \frac{1}{\sqrt{1+u_x'^{2}}}}{1+u_x'^{2}} + \frac{m}{l} u_{tt}'' = 0$$

$$-\tau \frac{u_{xx}'' + u_{xx}'' u_x'^{2} - u_x'^{2}}{(1+u_x')^{\frac{3}{2}}} + \frac{m}{l} u_{tt}'' = 0$$

Felesleges!

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} = \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{H} =$$

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \sqrt{1+\|\nabla u\|^2}\, dx_1 \dots dx_n = \int_\Omega \sqrt{1+u_{x_1}'^2 + \dots + u_{x_n}'^2}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$\text{E-L}: \cancel{-F'_u} + \frac{\partial}{\partial x_1} F'_{u'_{x_1}} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} F'_{u'_{x_n}} = 0$$

Min. fel. felület

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u'_{x_1}}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{u'_{x_n}}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} u'_{x_1} \\ \vdots \\ u'_{x_n} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} = 0$$

$$\nabla \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} \right)$$

Pénzhozat

Fogyok + Pallas

Metódo demolá

csütörtökre:
↳ ~~Böldel~~: Trafmaiba
↳ Traf3D pld újra

$$\text{grad}\left(c_1 F_1 + c_2 F_2 + c_3 F_3\right) = \begin{bmatrix} c_1 F'_{1x} + c_2 F'_{2x} + c_3 F'_{3x} \\ c_1 F'_{1y} + c_2 F'_{2y} + c_3 F'_{3y} \\ c_1 F'_{1z} + c_2 F'_{2z} + c_3 F'_{3z} \end{bmatrix}^T$$

1. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező, és $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabály"-t:

$$\text{grad}(\underline{c}^{\text{T}}\text{F}) = \underline{c}^{\text{T}}\text{DF}.$$

$$(c_1 \ c_2 \ c_3)\begin{bmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \\ F'_{3x} & F'_{3y} & F'_{3z} \end{bmatrix} = \left[c_1 F'_{1x} + c_2 F'_{1y} + c_3 F'_{1z} \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \ldots \right]$$

2. Adott $F(x, y, z) = (x^2, x, z^2)$ vektormező. Legyen S egy $g : R \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény felülete, ahol $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány. Az S felület határa $C = \partial S \subset \mathbb{R}^3$. Igazoljuk, hogy

$$\oint_C F(\underline{r})d\underline{r} = \text{A}(R)$$

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 4pt$$

$$d\underline{S} = \begin{bmatrix} -g'_x \\ -g'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy \quad 4pt$$

$$\underbrace{\oint_C \langle F, d\ell \rangle = \iint_S \langle \nabla \times F, dS \rangle}_{4pt} = \underbrace{\iint_R 1 \, dS = A(R)}_{2pt}$$

Anal 3 ZH1

Div: $\iiint_V \nabla F \, dV = \oiint F \cdot n \, dS$

$\iint_D (F_{1x}' + F_{2y}')\,dx dy = \iint_D \nabla F \, d(x,y) = \oint F \cdot n \, dl = \oint F_1 \, dy - F_2 \, dx$

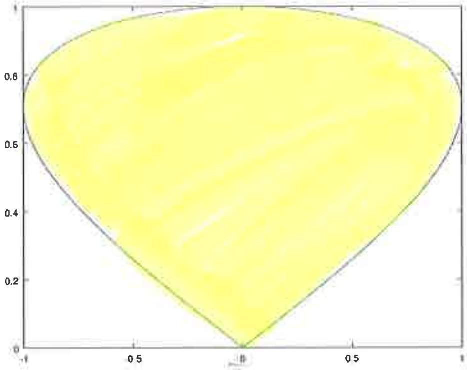
$\iint_D$

3. Határozza meg az sinusoid görbe által közrezárt terület nagyságát. A sinusoid paraméterezése:

$$x(t) = \sin(2t), \qquad y(t) = \sin(t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Green T:

$\iint_D (P_x' - Q_y')\,dx \wedge dy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$



$\oint_\gamma x\,dy = \int_0^\pi \sin(2t)\, d(\sin t) = \int_0^\pi \sin 2t \cos t \, dt =$

$= -\int_0^\pi (-\sin t) \cdot 2\cos^2 t \, dt = -\frac{2}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^\pi = -\frac{2}{3}\left[-1-1\right] = +\frac{4}{3}$

(4p)

Anal 3 ZH 1

4. Írjuk fel az Euler egyenletet és határozzuk meg az alábbi funkcionálok lehetséges extremális függvényeit:

(a)

$$I(u) = \int_0^1 (x + u(x) + 3u'(x))dx$$

(b)

$$I(u) = \int_1^2 (u + xu'(x))dx$$

Euler egyenlet: $F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$

(a) $1 - \frac{d}{dx} 3 = 1 \neq 0 \quad \forall u \in C$ => nincs extr.

(b) $1 - \frac{d}{dx} x = 0 \quad \forall u \in C$ => minden f. extr.

Anal3 ZH1

Szorgalmi feladatok azoknak, akik túl hamar végeztek a többivel.

+1 Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja a (x, y) síkbeli egységkör. Adott két pont $(0, 1, 0)$ és $(0, -1, 1)$. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston.

+2 Legyen M az a téglalap a térben, melynek csúcspontjai $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$. Legyen továbbá

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xz).$$

Igazolja a Stokes tételt ebben az esetben.

Anal 3 ZH1

Lagrange függvény:

általánosított erő / külső erő (nem potenc.)

$$L(t, q, \dot{q}) = \underbrace{T(q, \dot{q})}_{\text{általánosított sebesség}} - V(q) + \underbrace{q}_{\text{ált. koordináta}} \cdot F_{ext}$$

Gravitációs erő (potenciális)

$$W_{pot}^{G} = mgz = -(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -r^{T} \cdot F_G$$

Elektromos tér ereje ponttöltés körül

$$V_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = -(x\ y\ z)\underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]}_{E}$$

$$W_{pot}^{E} = q \cdot V_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} = -(x\ y\ z)\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$$

Ebbe nem vagyok biztos

Tehát van egy Lagrangian:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) \implies \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q}}_{\text{gradiens}} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right) = 0}$$

Általánosított impulzusmomentum $\implies p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\underline{L = T - V}$$ Lagrange fv. (Lagrangien)

Energiafv: $$\boxed{H = -L + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} = \text{Összenergia}$$

↳ Hamiltonian

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i}$$ általánosított impulzusmomentum!

Pld. Anyagi pont mozgása gravitációs térben $\Rightarrow F_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \to W_p^G = mgz$

$$\boxed{F_G = -\nabla W_p^G}$$

$$W_k = \frac{m}{2}\|\dot{r}\|^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

$$p_x = L'_{\dot{x}} = m\dot{x} = mv_x$$

$$p_y = L'_{\dot{y}} = m\dot{y} = mv_y$$

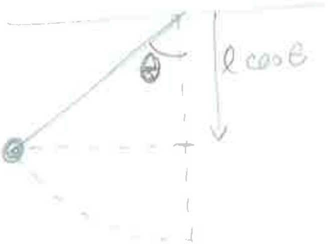
$$p_z = L'_{\dot{z}} = m\dot{z} = mv_z$$

$$\boxed{H(t, q, \dot{q}, p) = -L(t, q, \dot{q}) + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i}$$

Hamilton egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}}$$

Inga:



$$E_{pot} = mg(1-\cos\theta)\ell$$

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}m\,(\dot x^2+\dot y^2) = m\frac{\ell^2}{2}\dot\theta^2$$

$$\boxed{L = E_k - E_p = \frac{m\ell^2\dot\theta^2}{2} - mg\ell(1-\cos\theta)}$$

$$H = -L + \dot\theta\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}}_{p} = \frac{m\ell^2\dot\theta^2}{2} - mg\ell(1-\cos\theta) + \dot\theta p$$

$$\begin{cases} x = \ell\sin\theta \\ y = \ell\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x = (\ell\cos\theta)\dot\theta \\ \dot y = -(\ell\sin\theta)\dot\theta \end{cases}$$

$$1:\quad \dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot\theta \; -$$

$$2:\quad \boxed{\dot p = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = +mg\ell\sin\theta}$$

$$3:\quad \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} = -\cancel{\frac{\partial H}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = p \;\Rightarrow\; \cancel{2}m\ell^2\dot\theta = p \;\Rightarrow\; \dot\theta = \frac{p}{m\ell^2}$$

Lagrangeval számolva:

Euler egy: $L'_\theta - \frac{d}{dt}L'_{\dot\theta} = 0 \;\Rightarrow\; -mg\ell\sin\theta - \frac{d}{dt}m\ell\dot\theta = 0$

$$\boxed{\ddot\theta + g\sin\theta = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \ell\sin\theta \\ z &= -\ell\cos\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot x &= (\ell\cos\theta)\dot\theta \\ \dot z &= (\ell\sin\theta)\dot\theta \end{aligned}}$$

Legyen $\vec F = -D\cdot\vec v = -D\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = -D\cdot\ell\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\dot\theta$

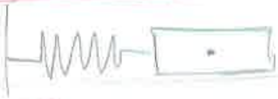
$$\vec r\cdot\vec F = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^T\cdot(-D)\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = -D\ell^2\,(\sin\theta\;\;\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\dot\theta$$

$$= -D\ell^2\dot\theta\,(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0 \qquad \text{Jogos: } \vec r\perp\vec F$$

másképp: $\vec M = \vec\ell\times\vec F = \vec\ell\times\vec v\cdot(-D) = \begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot x\\0\\ \dot z\end{pmatrix}\cdot(-D) =$

$$= \begin{pmatrix}0\\ z\dot x - x\dot z\\ 0\end{pmatrix}\cdot(-D) = -D\ell^2\begin{pmatrix}0\\ -\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\dot\theta = -D\ell^2\dot\theta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

A SÚRLÓDÁSI ~~ENERGI~~ ERŐ FORGATÓ NYOMATÉKA



$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

I Lagrangian

$$\text{E-L}: \; -kx - \frac{d}{dt} m\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

legyen $F_s = -D\dot{x}$

$$\text{E-L}: \; -kx - \frac{d}{dt} m\dot{x} = -F_s$$

$$m\ddot{x} + kx = -D\dot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q) \\ &\text{E-L}: \; \mathcal{L}'_{q_i} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot{q}_i} = -F_{i(ext)}(t) \end{aligned}}$$

Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$$

II

Ez elmond-ható a gyakor-laton

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H} = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \frac{p}{m} \cdot p - \frac{m p^2}{2m^2} + \frac{kx^2}{2} =$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned}} \longrightarrow \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -kx \end{aligned} \xrightarrow{p = \dot{x}m} \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Inga (újra) : $\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$

$= \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2) - mg(z+l)$

$E_p = mg(z+l) = mg(l - l\cos\theta)$
$= mgl(1-\cos\theta)$

1) Lagrangian

E-L: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} - \mathcal{L}'_{\theta} = 0 \Longrightarrow \boxed{m l^2 \ddot\theta + mgl\sin\theta = 0}$

E-L: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x} - \mathcal{L}'_{x} = 0 \Longrightarrow m\ddot x = 0$

$\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot z} - \mathcal{L}'_{z} = 0 \Longrightarrow m\ddot z + mgz = 0$

$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \dot x = (l\cos\theta)\dot\theta \\ \dot z = (l\sin\theta)\dot\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \ddot x = \ddot\theta l\cos\theta - l(\sin\theta)\dot\theta^2 \\ \ddot z = \ddot\theta l\sin\theta + l(\cos\theta)\dot\theta^2 \end{cases}$

$\ddot\theta l\cos\theta - l\dot\theta^2\sin\theta = 0$

$\ddot\theta l\sin\theta + l(\cos\theta)\dot\theta^2 + gl\cos\theta = 0$

Ezt inkább hagyjuk!

EZ NEM ÍGY VAN

$\mathcal{L} = E_k - E_p \cancel{+ \theta M_s}$

$M_s = l F_s = -l\Delta v = -l\Delta l\omega = -l^2\Delta\dot\theta$

$\mathcal{L} = E_k - E_p + l^2\Delta\theta\dot\theta = \boxed{\frac{m l^2\dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta - l^2\Delta\theta\dot\theta}$

$\mathcal{L}'_{\dot\theta}$ $\qquad \mathcal{L}'_{\theta}$

E-L: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} - \mathcal{L}'_{\theta} = 0$

$m l^2\ddot\theta - l^2\Delta\dot\theta + mg\sin\theta + l^2\Delta\dot\theta = 0$

!ELLENPÉLDA!

Ez helyett volna helyes:

$m l^2\ddot\theta + mg\sin\theta = -l^2\Delta\dot\theta$

M_s — „súrlódási nyomaték"

Hét -3-
Fizika /MatLab.
2016. okt. 24.
INGA
Lagrange, Hamilton

Tehát $\boxed{\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta}$

$\mathcal{L} = E_k(q,\dot q) - E_p(q)$

② Hamiltonian

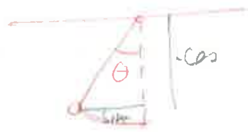
$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = m l^2 \dot\theta \Rightarrow \boxed{\dot\theta = \frac{p}{m l^2}}$

$\mathcal{H} = \dot\theta p - \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mg\cos\theta$

$\boxed{\mathcal{H} = \frac{p^2}{2 m l^2} - mg\cos\theta}$

$\mathcal{H}(q,p) \leftarrow$ nincs benne derivált!

$$\begin{cases} \dot x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m l^2} \\ \dot p = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot x &= \frac{p}{m l^2} \\ \dot p &= -mg\sin\theta \end{aligned}}$$



A súrlódási erő forgató nyomatéka:

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot x = l\dot\theta\cos\theta \\ \dot z = l\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{M}_f = \vec{l} \times \vec{F}_f = \vec{l} \times (-\Delta\cdot\vec{v}) = (-\Delta)\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot x \\ 0 \\ \dot z \end{pmatrix} = -\Delta\begin{pmatrix} 0 \\ z\dot x - x\dot z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_f)_y = -\Delta\left(-l\cos\theta\cdot l\dot\theta\cos\theta - l\sin\theta\cdot l\dot\theta\sin\theta\right) = -\Delta l^2\dot\theta$$

Tehát $\boxed{\vec{M}_f = -\Delta l^2\dot\theta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Egyszerűbben: $M_f = l\cdot F_f = -l\cdot\Delta\cdot v = -\Delta l\cdot(l\omega) = \underline{-\Delta l^2\dot\theta}$

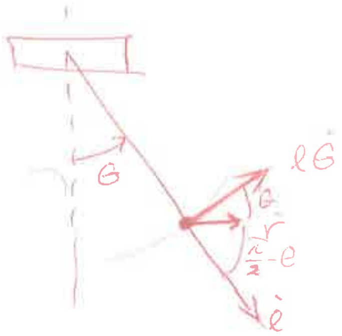
Amit még érdemes megmutatni:

$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m_1\dot x_1^2}{2} + \frac{m_2\dot x_2^2}{2} - \frac{k(x_2-x_1)^2}{2}}$

See more: Csurgay fizika jegyzete HF1

$\hookrightarrow$ E-L: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x_1} - \mathcal{L}'_{x_1} = m_1\ddot x_1 - k(x_2-x_1) = 0$

$\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x_2} - \mathcal{L}'_{x_2} = m_2\ddot x_2 + k(x_2-x_1) = 0$



$$v = l\dot\theta + \dot r + \dot l$$

$$v^2 = l^2\dot\theta^2 + \dot r^2 + \dot l^2 + 2l\dot\theta\dot r\cos\theta + 2\dot r\dot l\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= l^2\dot\theta^2 + \dot r^2 + \dot l^2 + 2l\dot\theta\dot r\cos\theta + 2\dot r\dot l\sin\theta$$

Either:

$$L = \frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{m\dot l^2}{2} + ml\dot\theta\dot r\cos\theta + m\dot r\dot l\sin\theta + \frac{M\dot r^2}{2} + \frac{J\dot l^2}{2S^2} - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = -\frac{d}{dt}\left((m+M)\dot r + ml\dot\theta\cos\theta + m\dot l\sin\theta\right)$$

$$= -\left((m+M)\ddot r + m\dot l\dot\theta\cos\theta + ml\ddot\theta\cos\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta + m\ddot l\sin\theta + m\dot l\dot\theta\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow (m+M)\ddot r + 2m\dot l\dot\theta\cos\theta + ml\ddot\theta\cos\theta + m\ddot l\sin\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot l} = ml\dot\theta^2 + m\dot\theta\dot r\cos\theta - mg(1-\cos\theta)$$
$$-\frac{d}{dt}\left(m\dot l + m\dot r\sin\theta + \frac{J\dot l}{S^2}\right) = 0$$

$$0 = mg(1-\cos\theta) - ml\dot\theta^2 - m\dot\theta\dot r\cos\theta$$
$$+ m\ddot l + \frac{J\ddot l}{S^2} + m\ddot r\sin\theta + m\dot r\dot\theta\cos\theta$$

$$0 = mg(1-\cos\theta) - ml\dot\theta^2 + \ddot l\left(m + \frac{J}{S^2}\right) + m\ddot r\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = -ml\dot\theta\dot r\sin\theta + m\dot r\dot l\cos\theta + mgl(-\sin\theta)$$
$$-\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot\theta + ml\dot r\cos\theta\right)$$

$$= -\cancel{ml\dot\theta\dot r\sin\theta} + \cancel{m\dot r\dot l\cos\theta} - mgl\sin\theta$$
$$-ml^2\ddot\theta - 2ml\dot l\dot\theta - \cancel{m\dot l\dot r\cos\theta} - ml\ddot r\cos\theta + \cancel{ml\dot r\dot\theta\sin\theta}$$

$$= -mgl\sin\theta - ml^2\ddot\theta - 2ml\dot l\dot\theta - ml\ddot r\cos\theta \cancel{} = 0$$

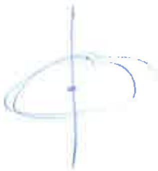
$$= -mgl\sin\theta \cancel{} = 0$$

ναρτγίς $mg\sin\theta + ml\ddot\theta + 2m\dot l\dot\theta + m\ddot r\cos\theta$

$$mg\sin\theta + ml\ddot\theta + 2m\dot l\dot\theta + m\ddot r\cos\theta = 0$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\tfrac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\tfrac{\pi}{2}\sin(-\theta) = \sin\theta$$

$$J = \int_0^R r\sigma\, dl = \int_0^R r\frac{m}{R}\,dl = \frac{m}{R}\int_0^R r\,dl = \frac{m}{R}\,\frac{R^2}{2} = \frac{mR}{2}$$



$$J = \iint_C r\sigma\, dS = \iint_C r\frac{m}{\pi R^2}\,dS = \frac{m}{\pi R^2}\iint_C r\,dS = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta\, dr =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2mR}{3}$$

lehet, hogy tényleg:

$$J = \iiint_V r^2\rho\, dV \quad \text{van?}$$

---

(1) $\ddot r(M+m) + \ddot l m\sin\theta + \ddot\theta m l\cos\theta + \underbrace{2m\dot l\dot\theta\cos\theta}_{ml\dot\theta^2} + m\dot\theta^2 l\sin\theta = f$

(2) $\ddot r m\sin\theta + \ddot l\left(m + \frac{J}{\rho^2}\right) + mg(1-\cos\theta) - Ml\dot\theta^2 = -\frac{\tau}{\rho}$

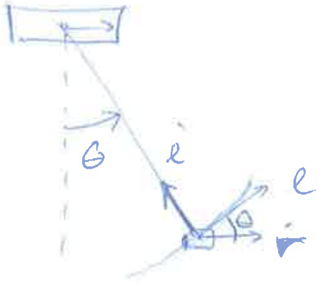
(3) $\ddot r m\cos\theta + \ddot\theta m l + 2m\dot l\dot\theta + mg\sin\theta = 0$

$$L = \frac{m\dot l^2}{2} + \frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + \frac{m\dot r^2}{2} - m\dot l\dot r\sin\theta + ml\dot\theta\dot r\cos\theta + \frac{M\dot r^2}{2} + \frac{J\dot l^2}{2\rho^2} + mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = -\frac{d}{dt}\left(m\dot r - m\dot l\sin\theta + ml\dot\theta\cos\theta + M\dot r\right) = 0$$

$$= (m+M)\ddot r - m\ddot l\sin\theta - m\dot l\dot\theta\cos\theta + m\dot l\dot\theta\cos\theta + ml\ddot\theta\cos\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta = 0$$

(szerintem) $= (m+M)\ddot r - m\ddot l\sin\theta + ml\ddot\theta\cos\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta = 0$



$$\frac{m v^2}{2}$$

$$v = \dot{l} + l\dot{\theta} + \dot{r}$$

$$\langle v, v\rangle = \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 + 2\langle \dot{l}, l\dot{\theta}\rangle + 2\langle \dot{l}, \dot{r}\rangle + 2\langle l\dot{\theta}, \dot{r}\rangle$$

$$= \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 + 2\dot{l}\dot{r}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta$$

$$= \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta$$

$$T_m = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta\right)$$

$$T_M = \frac{M\dot{r}^2}{2} = \left[\frac{kg\ m^2}{s^2}\right]$$

$$T_J = \frac{J\dot{l}^2}{2S^2} = \left[\frac{kg\cdot m\cdot m^2}{m^2\cdot s^2}\right][J]_{SI} =$$

$$J = \iiint_V r^2\rho\, dV = [m\ kg]$$

$$V_m = mgl(1-\cos\theta)$$

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta\right) + \frac{M\dot{r}^2}{2} + \frac{J\dot{l}^2}{2S^2} - mgl(1-\cos\theta)$$

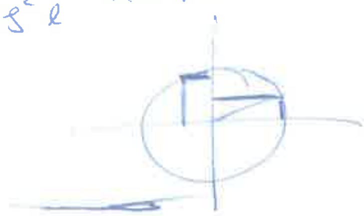
$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{r} - m\dot{l}\sin\theta + ml\dot{\theta}\cos\theta + M\dot{r}\right) = 0$$

$$(M+m)\ddot{r} = m\ddot{l}\sin\theta - m\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = 0 \Rightarrow ml\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta + mg(1-\cos\theta)$$

$$- \frac{d}{dt}\left(m\dot{l} - m\dot{r}\sin\theta + \frac{J}{S^2}\dot{l}\right) = 0$$

$$\Rightarrow ml\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta + mg(1-\cos\theta) - m\ddot{l} + m\ddot{r}\sin\theta + m\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - JS^2\ddot{l}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta = -\sin\theta$$

① $\ddot{r}(M+m) + \ddot{\ell}\, m \sin\theta + \ddot{\theta}\, m (L_0+\ell)\cos\theta +$

$+ 2m\,\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta + m\dot{\theta}^2 (L_0+\ell)\sin\theta = f$

② $\ddot{r}\, m \sin\theta + \ddot{\ell}\left(m + \frac{J}{\rho^2}\right) + \frac{\tau + \rho m g \rho}{\rho} - M(L_0+\ell)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

③ $\ddot{r}\, m\cos\theta + \ddot{\theta}\, m (L_0+\ell) + 2m\,\dot{\ell}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

---

① $f - 2m\,\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta - m\dot{\theta}^2(L_0+\ell)\sin\theta =$

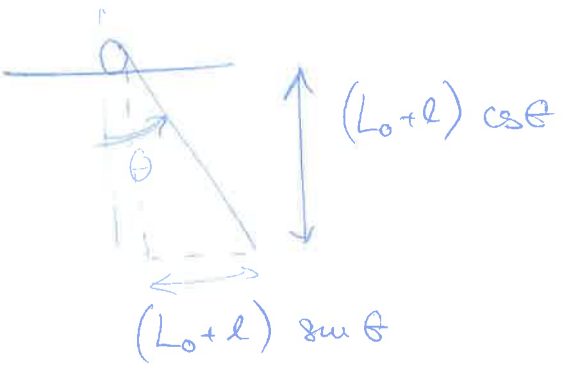
$\ddot{r}(M+m) + \ddot{\theta}\, m(L_0+\ell)\cos\theta + \ddot{\ell}\, m\sin\theta$

② $M(L_0+\ell)\dot{\theta}^2 - mg(1-\cos\theta) - \frac{\tau}{\rho} = \ddot{r}\, m\sin\theta + \ddot{\ell}\left(m + \frac{J}{\rho^2}\right)$

③ $-2m\,\dot{\ell}\dot{\theta} + mg\sin\theta = \ddot{r}\, m\cos\theta + \ddot{\theta}\, m(L_0+\ell)$

Linearize:

$\dot{x} = F(x,u) \simeq F(x_0, u_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial u}(u-u_0)$



$\ddot{\ell} = \frac{1}{m + \frac{J}{\rho^2}} \cdot \left(-\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{\rho^2}{m\rho^2 + J}\left(-\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{-\rho\tau}{m\rho^2 + J}$

Parciális differenciál egyenletek (PDE)

1 Matlab ilyeneket tud megoldani:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\cdot \nabla u) + a u = f \qquad u: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

m, d, c, a, f folyt (x,y,z)-től függő dolgok

---

pdepe (parabolic-elliptic) 1D

$u: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad u(x,t)$

$m\in\{0,1,2\}$

Ilyet tud megoldani

$$\boxed{c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{m} f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

$$\boxed{u(x,t_0) = u_0(x)}$$

Konkrét pld:

$$\left.\begin{array}{l} m = 0 \\ c = \pi^2 \\ f = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ s = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c^2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}} \quad \text{(heat transfer equation)}$$

initial condition: $u(x,t_0) = u_0(x)$

boundary condition: $p(x,t,u) + q(x,t)\underbrace{f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ jelen esetben}} = 0$

① Transzport egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{b\,\partial u}{\partial x}$$

vagyis:

$c(..) \equiv 1$

$f(..) \equiv 0$

$s(..) = -b\,\frac{\partial u}{\partial x}$

vagy:

$c(...) \equiv 1$

$f(...) = bu$

$s(...) \equiv 0$

$m = 0$

pdepe: $c(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\right) + s(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})$

Általános alak

3D pde-k; $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ esetén:

$$m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\,\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(c\nabla u) + au = f$$

$m,\ d,\ c,\ a,\ f = \sim(x,y,z)$

② Laplace egyenlet:

$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

vagyis:

$m \equiv 0$

$d \equiv 0$

$c \equiv 1$

$a \equiv 0$

$f \equiv 0$

③ Helmholz-egyenlet:

$\Delta u = -\lambda u$

de ~~g~~ = ~~-λ~~

④ Hővezetés egyenlete:

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ → $m \equiv 0$

~~$\Delta u = 0$~~

$d \equiv 1$

$c \equiv 1$

$a \equiv 0$

$f \equiv 0$

④ Schrödinger egyenlet

$i \cdot u'_t = -\Delta u$ (mint ④)

⑤ Hullám egyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

⑥ Minimális felület (nemlin)

$$\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{grad}\,u}{\sqrt{1+|\mathrm{grad}\,u|^2}}\right) = 0$$

pde modellek:

$$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad \text{vagy} \quad \underbrace{-\nabla\cdot(c\otimes\nabla u)+au=f}_{\text{vektoros}}$$

$$c=c(x,y,z,u)$$
$$a=a(x,y,z,u)$$
$$f=f(x,y,z,u)$$

⑥ Minimális felület

$$-\nabla\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}}_{c(x,u)}\nabla u\Big)=0$$

$$|\nabla u|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Rightarrow c(r,u)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}$$

$$a(r,u)\equiv 0$$
$$f(r,u)\equiv 0$$

assempde: elliptic PDE

$$-\nabla\cdot(c\Delta u)+au=f$$

parabolic: $u(t,r)$

$$d\cdot\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f$$

Dirichlet feltétel: $u(x,t)=f(x) \quad \forall x\in\partial\Omega, \ \forall t\in[0,\infty)$ ⎫

Neumann feltétel: $\langle \operatorname{grad} u, \underline{u}\rangle=f(x) \quad \partial\Omega$ ⎬ peremfelt.

Kevert: $\alpha u(x,t)+\beta u'_{\underline{u}}(x,t)=f(x) \quad \partial\Omega$

V a peremfeltétel és van kezdeti érték

$\hookrightarrow u(x,t_0)=g(x)$

PDE összefogl. Matlab

Transzport egyenlet, 1D-ben

$$\boxed{\begin{array}{l} u = u(x,t) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(x) \\ u(x,0) = g(x) \text{ adott} \end{array}} \longrightarrow \text{ez a feladat}$$

Euler numerikus megközelítés:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{T_s} \qquad \text{Afh. } \forall k\text{-ra } t_{k+1} - t_k = T_s$$

Visszahelyettesítve:

$$\frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{T_s} + b\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_k) = f(x)$$

$$\underbrace{u(x,t_{k+1}) = u(x,t_k) + T_s\left(f(x) - b\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_k)\right)} \rightarrow \text{numerikus megd. egyenlete!}$$

Homogén egyenlet analitikus megoldása:

Vegyük észre, hogy:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \text{vagyis a } v = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \text{ irány mentén } u(x,t) \text{ konst.}$$

legyen (x_0, t_0) rögzített

$u(x_0 + bt, t_0 + t)$ megoldása az egyenletnek!

Inhomogén egyenlet analitikus megoldása:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = f(x) \qquad \text{legyen } v(x,t) = b\,u(x,t) - \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds; \quad \underline{\text{ha } b = \text{konst.}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b\frac{\partial u}{\partial x} - f(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

$\hookrightarrow$ visszavezettük homogén egyenletté!

$\boxed{\text{pdepe}}$

több dimenzióban is

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f\right) + s$$

c, f, s argumentumai (x, t, u, u'_x)

$u(x, t_0) = u_0(x)$ → initial cond

$p(x,t,u) + q(x,t) f = 0$ → boundary cond → 2 db van a két oldalon

↳ $x = x_0$ vagy x_1

sol = pdepe(m, pde, ic, bc, xmesh, tspan)

1 pld: Hővezetés véges hosszú rúdban

$$\pi^2 u'_t = \frac{\partial}{\partial x} u'_x \implies \begin{cases} m = 0 \\ c = \pi^2 \\ f = u'_x \\ s = 0 \end{cases}$$

$u(x,0) = g(x)$

$$u(0,t) = 0 \implies \begin{cases} p = u(x_0, t) \\ q = 0 \end{cases}$$

$$\pi e^{-t} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{f}(1,t) = 0 \implies \begin{cases} p = \pi e^{-t} \\ q = 1 \end{cases}$$

2 pld Hővezetés egy fémlemezen: $u'_t = \Delta u + 1$

PDE összefog.
Matlab

Matlab R2016b : $\boxed{\text{solvepde}}$ → assempde
parabolic
hyperbolic
pdenonlin

helyett.

PDE – Mathematica-val

Transzport egyenlet:

1: $u^* = u(t,x)$; $u'_x + u'_t = 0$

$t(0,x) = e^x$

$\boxed{DSolve[D[u[t,x],x] + D[u[t,x],t] == 0, u, \{t,x\}]}$

Megoldás: $\boxed{u[t,x) = C(t-x)}$ ← ált. mo.

$u(0,x) = e^x \Rightarrow C(-x) = e^x \Rightarrow C(t-x) = e^{x-t}$

$\boxed{u(t,x) = e^{x-t}}$ ← spec. megold.

2: $u'_x + u'_t = x - t$

Mathematika: $\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + C(t-x)}$ ← ált. megold.

ellen: $u'_t + u'_x = -x + C'(t-x) + (-t + 2x - C'(t-x)) = x - t$

ha $u(0,x) = e^x \Rightarrow x^2 + C(-x) = e^x \Rightarrow C(-x) = e^x - x^2$

$\underline{C(x) = e^{-x} - x^2}$

$\Downarrow$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + e^{x-t} - (t-x)^2}$

ha $u(0,x) = \sin x \Rightarrow x^2 + C(-x) = \sin x$

$C(x) = -\sin x - x^2$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + \sin(t-x) - (t-x)^2}$

ha $u(t,0) = f(t) \Rightarrow \underline{C(t) = f(t)}$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + f(t-x)}$

PDE összefog.
Mathematica

$3: u'_t + 2u'_x = x^2 + 4tx$ ~~$u t x$,~~

Method. $\longrightarrow$ $\boxed{u(t,x) = tx^2 + C\left(\frac{2t-x}{2}\right)}$ $\longleftarrow$ ált. megoldás

ha $u(0,x) = 0$

$$C\left(-\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \forall x \Rightarrow C \equiv 0$$

$$\boxed{u(t,x) = tx^2}$$

Analitikusan mit lehetne vele csinálni?

$$\left\langle \nabla u, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + 4tx$$

$$\left\langle \nabla u(x,y), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = y^2 + 4xy$$

Ez nem vezet megoldásra...

$$\frac{d}{dt} u(x,y) = y^2 + 4xy \quad \text{ahol} \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 2$$

Laplace egyenlet:

pld: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9 \xrightarrow{\text{Mdh}} u(x,y) = C_1(y-x) + C_2(x+y) + \frac{9x^2}{2}$

PDE (bevezető)

Komplex függvénytanban:
adott $f(z = x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ diffható, ha:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u''_{xx} = v''_{yx} \\ -u''_{yy} = +v''_{xy} \end{cases} \Longrightarrow u''_{xx} = -u''_{yy} \Rightarrow \boxed{\Delta u = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u''_{xy} = v''_{yy} \\ u''_{xy} = -v''_{xx} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\Delta v = 0} \longrightarrow \text{harmonikus függvények}$$

Lesznek olyan függvények amik függenek x-től, t-től

$u(x,t)$ $\longrightarrow$ initial condition: $u(x,0) = f(x)$

$\longrightarrow$ boundary condition:
$\boxed{u(x,t) = f(x) \ \forall t, \ \forall x \in \partial\Omega}$

Csak (x,y,z) -től függenek $\Longrightarrow$ boundary condition peremfeltétel

Mol 3 gyak
10 lott -3-

pld Transport egyenlet:

$$\boxed{u'_t + c\,u'_x = 0}$$

~~$f(x)u'_x + g(x)u'_y = 0 \Rightarrow \langle \nabla u, P \rangle = 0$~~

~~vektor~~ ~~legyen $P = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b] \}$~~

~~$\dot\gamma(t) =$~~

$$f(x,y)\,u'_x + g(x,y)\,u'_y = 0$$

$$\left\langle \nabla u, \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

legyen $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$u(x,y)$

tfh. $\dot x = f(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

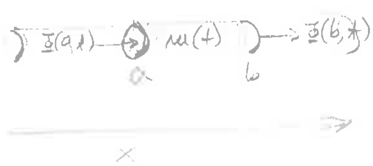
legyen $V(x)$ függvény

$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x)$$

$\xrightarrow{c}$ sebességgel áramlik a folyadék

A csőben GÁZ áramlik



$\mu(x,t)$: sűrűség

$$\dot{m}(t) = \Phi(a,t) - \Phi(b,t) = -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

Azonban a tömeget máshogy is ki lehet számolni:

$$m(t) = \int_a^b \mu(x,t) \cdot A\,dx$$

Az áramlás hozama:

$$\dot{m}(t) = \int_a^b \mu'_t(x,t)\,A\,dx \overset{"}{=} -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A\mu'_t(x,t) + \Phi'_x(x,t) = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu'_t(x,t) + \left[c(x,t) \cdot \mu(x,t)\right]'_x = 0$$

(!)

$$\Phi = \iint_S \underline{v}\,d\underline{S}$$

azonban itt most sűrűség is van!

$$\Phi = \iint_S \mu(x,t)\,\underline{v}\,d\underline{S}$$

$$= \iint_S \mu(x,t) \cdot (c(x,t)\ 0\ 0)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$= \iint \mu(x,t)\,c(x,t)\,dy\,dz$$

$$= \mu(x,t) \cdot c \iint_S dy\,dz = c(x,t)\,\mu(x,t) \cdot A \longrightarrow \left[\frac{m}{s} \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot m^2 = \frac{kg}{s}\right]$$

$$\Phi(x,t) = c(x,t)\,\mu(x,t) \cdot A$$

$$\Phi_{ab}(t) = A\left(\Phi(a,t) - \Phi(b,t)\right) = -A \int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} m(t) = \Phi_{ab}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \frac{d}{dt} \int_a^b \mu(x,t)\,dx = -A \cdot \int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\int_a^b \mu'_t(x,t)\,dx = -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx \Longrightarrow \boxed{\mu'_t(x,t) + \Phi'_x(x,t) = 0}$$

$\forall\ [a,b]$ intervallumra igaz hogy $\int_a^b (\mu'_t - \Phi'_x)\,dx = 0$

$$\Downarrow$$

víz esetén: $\Phi = \iint_S \underline{v} \cdot d\underline{S} \longrightarrow \frac{m}{s} \cdot m^2 = \frac{m^3}{s}$ = „térfogat" / sec a teljes felületen

sűrűség esetén: $\Phi = \frac{1}{|S|} \iint_S \mu(x,t)\,\underline{v}\,d\underline{S}$ = „tömeg" / sec egységnyi térf.

Transzport egyenlet

Ind 3 egyh...

-4-

lev. Fiz

Analízis III. 9. heti feladatok
2015. november 20.

Variációszámítás 3. rész.

1. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x,t)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$. (Tehát $u : [0,\ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:
$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^\ell u_t'^2(x,t)\,\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^\ell \left(\sqrt{1+u_x'^2(x,t)} - 1\right)\,\mathrm{d}x,$$
ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1,\, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:
$$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\,\mathrm{d}t.$$
Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

2. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:
$$I(\phi) = \iint\limits_D |\operatorname{grad}\phi(x,y)|^2\,\mathrm{d}(x,y).$$

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

3.
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= 0 \\ u(0,x) &= e^x \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= x - t \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}$$

5. ~~(HF)~~
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + 2\cdot u_x'(x,t) &= x^2 + 4tx \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

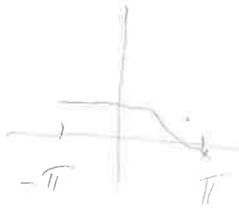
6. (HF)
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) - 2\cdot u_x'(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{aligned}$$

Lmétlen: $f:(0,1) \to \mathbb{R}$
(Fourier trafó)

11 hét

Ism: Fourier-sorfejtés:

$f: [-\pi,\pi]$ + Dirichlet feltételek,



akkor $$f = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) + \frac{a_0}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

Ha $f: [0,\pi]$ + Dirichlet felt

akkor $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + A_0 \qquad A_k = 2a_k$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx) \qquad B_k = 2b_k$$

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx =$$

$$x = \pi y$$
$$dx = \pi\,dy$$

$$= 2\int_0^{\pi} f(\pi y)\sin(k\pi y)\,dy$$

$f: (0,1) \to \mathbb{R}$ + Dirichlet

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x)$$

Analízis III. 10. heti feladatok
2015. november 27.

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

1. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltételekkel:

(a)
$$u(0,y)=0 \quad u(1,y)=0 \quad u(x,1)=1 \quad u(x,0)=0$$

(b)
$$u(0,y)=0 \quad u(1,y)=1 \quad u(x,1)=0 \quad u(x,0)=0$$

(c)
$$u(0,y)=1 \quad u(1,y)=1 \quad u(x,1)=1 \quad u(x,0)=1$$

2. (HF) Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

(a)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 2\sin(2\pi x) \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(5\pi x) \\ u(x,1) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0 \qquad \text{(derivált van adva!)} \\ u(x,1) &= x^2-x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet felső félsíkban, tehát $\Omega=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y>0\}$. Az (egyik) peremfeltétel:
$$u(x,0)=\cos(2x).$$
Azt a megoldást keressük, melyre az is teljesül, hogy
$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

5. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:
$$u(x,y)=2y, \qquad \text{ha } x^2+y^2=1.$$
Segítség: A Laplace egyenletet polárkoordinátákban, ahol $w(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$:
$$w''_{rr}+\frac{1}{r^2}w''_{\theta\theta}+\frac{1}{r}w'_r=0$$

+ túloldal tartalék

11. hét

$\Delta u = 1 \cdot u''_{xx} + 1 \cdot u''_{yy}$

?

6. (*Tartalék feladat*) Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + y \\ \overline{y} &= x - y \\ v \quad \cancel{U}(\overline{x}, \overline{y}) &:= u(x,y), \end{aligned}$$

$v(\overline{x}, \overline{y}) = u(x,y)$

ahol a U függvény ÉT-a

$$\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \ : \ (x,y) \in \Omega\}.$$

$\Delta v = 0$

$\Updownarrow$

$\Delta u = 0$

Igazoljuk, hogy $\triangle U = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

7. (*HF, szorgalmi*) Oldjuk meg:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0, & x^2 + y^2 > 4 \\ u(x,y) &= y, & x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Olyan megoldást keresünk, melyre $\lim_{|x|,|y| \to \infty} u(x,y) = 0.$

8. (*HF, szorgalmi*) Oldjuk meg a Laplace egyenletet az első síknegyedbe eső negyed-egységkör belsejében. A határon a feltételek:

$$u(0,y) = 0, \qquad y \in [0,1].$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1].$$

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta), \qquad \theta \in [0, \pi/2],$$

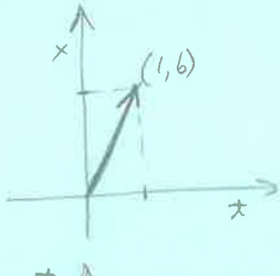
ahol $g(\theta)$ adott függvény.
Konkrétan, mi lesz a megoldás, ha $g(\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$?

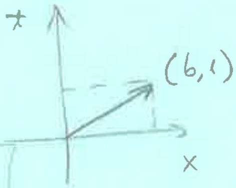
Transzport egyenlet megoldása

I homogén

$$\begin{cases} u'_t + b u'_x = 0 & (1a) \\ u(x,0) = g(x) & (1b) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u'_t & u'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$





$$z(s) := u(x+sb,\ t+s)$$

$$z'(s) = u'_x b + u'_t = 0 \implies z(s) = \text{konst}$$

$$\boxed{u(x,t) = z(0) = z(-t) = u(x-bt,0) \underset{(1b)}{=} g(x-bt)}$$

Tehát $\boxed{u(x,t) = g(x-bt)}$

II inhomogén rendszer

$$\begin{cases} v_t + b v_x = f(x,t) & (2a) \\ v(x,0) = 0 & (2b) \end{cases}$$

legyen $z(s) = v(x+bs,\ t+s)$

$$z'(s) = v'_x b + v'_t = f(x+bs,\ t+s)$$

$$z(-t) = v(x-bt,\ 0) = 0 \quad \text{(2b miatt)}$$

kaptuk, hogy $z'(s) = f(x+bs,\ t+s) \quad \Big| \int_{-t}^{0} ds$

$$\int_{-t}^{0} z'(s)\,ds = \int_{-t}^{0} f(x+bs,\ t+s)\,ds$$

$$z(0) - \cancel{z(-t)} = \int_{-t}^{0} f(x+bs,\ t+s)\,ds$$

legyen $\tau = s+t$; t egy konst

$d\tau = ds$

$\tau_1 = s_1 + t = -t + t = 0$

$\tau_2 = s_2 + t = 0 + t = t$

$$z(0) = \int_0^t f\big(x + b(\tau - t),\ \tau\big)\,d\tau$$

$$z(0) = \boxed{v(x,t) = \int_0^t f(x - bt + b\tau,\ \tau)\,d\tau}$$

Csak ha b konst

Transzport egyenlet!

Általános esetben $\boxed{\mathrm{grad}(u(x,y)) \cdot g(x,y) = 0}$

$$\boxed{u'_x g_1 + u'_y g_2 = 0} \quad (3a)$$

Legyen $\gamma(t)$ megoldása az $\begin{cases} \dot{x} = g_1(x,y) \\ \dot{y} = g_2(x,y) \end{cases}$ -nak, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

akkor $z(t) = u\big(x(t), y(t)\big)$

$$\dot{z}(t) = u'_x\big(x(t), y(t)\big)\, \dot{x}(t) + u'_y\big(x(t), y(t)\big)$$

$$= \Big[\mathrm{grad}(u)\Big]_{r=\gamma(t)} \cdot \Big[g(x,y)\Big]_{r=\gamma(t)} = 0 \quad (3a) \text{ miatt}$$

Tehát $u(x,y)$ konstans $\gamma(t)$ mentén

TODO: továbbgondolni!

2017b: homogén egyenlet: $\boxed{\begin{cases} u'_x + b\,u'_t = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}}$

kijön, hogy $(u'_x \; u'_t)\begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\b\end{pmatrix}$ irány szerint konstans az $u(x,t)$ fv.

ezen irány szerint az $x - bt$ kifejezés ami konstans, ezért az $u(x,t)$ az $(x-bt)$ kyf. tetszőleges fv-e lehet!

pld $u(x,t) = h(x-bt)$

DE $u(x,0) = h(x) \overset{!}{=} g(x)$

$$\Downarrow$$

$$h(x) = g(x) \quad \forall x$$

EZÉRT: $\boxed{u(x,t) = g(x-bt)}$

11. hét (I PDE)

1.
$$\boxed{\begin{aligned} u'_t + u'_x &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}}$$

$$u(x,t) = e^{(x-ct)}\Big|_{c=1} = e^{(x-t)}$$

2a
$$\boxed{\begin{aligned} u'_t + u'_x &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}}$$

$$f(x,t) = x-t$$

$$v(x,t) = e^{x-t}$$

$$w(x,t) = \int_0^t f(x-bt+b\tau, \tau)\,d\tau$$

$$= \int_0^t (x-t+\tau-\tau)\,d\tau = (x-t)t = xt-t^2$$

$$u(x,y) = e^{x-t} + xt - t^2$$

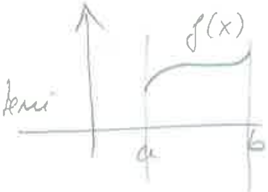
Ell:
$$u'_x = e^{x-t} + t$$
$$u'_t = -e^{x-t} + x - 2t$$
$$u'_x - u'_t = \quad x-t \quad ✓$$

$$u(x,0) = e^x \quad ✓$$

mod 3
11. hét

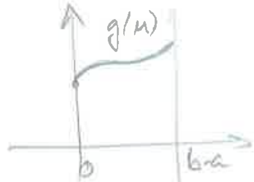
Van egy függvényem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Ezt szeretném Fourier sin/cos sorral közelíteni



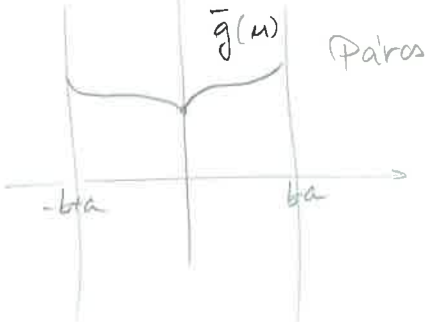
legyen $g:[0,b-a]\to\mathbb{R}$

$$g(u)=f(u+a)$$



legyen $\bar{g}:[-b+a,b-a]\to\mathbb{R}$

$$\bar{g}(u)=g(|u|)$$



Páros fv

$$\bar{g}(u)\simeq\frac{a_0}{2}+\sum_{u=1}^{N}a_u \sin$$

Adott egy fv. aminek a periódusa **T**

intervallumot nézünk!

most $D=[0,T]$

$$f:[0,T]\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T}$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2k\pi x}{T}\,dx$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx$$

Anal 1:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)\,dx$$

$[-\pi,\pi]$ intervallumon

Tfh adott $f:[-T,T]$ -int-on egy PÁROS fv

$$f(-x)=f(x)$$

$$a_k=\frac{2}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{2k\pi x}{2T}\,dx=\frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx=$$

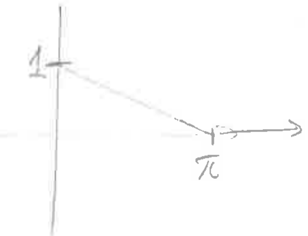
$$=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx$$

$$b_k=\frac{2}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{2k\pi x}{2T}\,dx=0$$

Anal 3
PDE – Laplace
Fourier sorfejt

Egyszerű pld (hogy ellenőrizzem a képletek helyességét)

legyen $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$; $f:[0,\pi] \to R$



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{T} \quad (\text{mert per}=2T)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^T \cos\frac{k\pi x}{T}\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^T x\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{T}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T - \frac{T}{k\pi^2}\int_0^T x\cdot\frac{k\pi}{T}\cos\frac{k\pi x}{T}\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{T}{k\pi}(\sin k\pi - \sin 0) - \frac{T}{k\pi^2}\int_0^T x\left(\sin\frac{k\pi x}{T}\right)' dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{k\pi^2}\left(\cancel{x\sin\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T} - \int_0^T \sin\frac{k\pi x}{T}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T \cdot \frac{T}{k\pi} = -\frac{2T}{k^2\pi^3}\left(\cos k\pi - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right)$$

$k=0 \Rightarrow a_0 = 0$

$k=1 \Rightarrow a_1 = +\frac{4T}{k^2\pi^3} = \frac{4T}{\pi^3} \overset{}{\underset{T=\pi}{=\!=}} \frac{4}{\pi^2}$

$k=2 \Rightarrow a_2 = 0$

$k=3 \Rightarrow a_3 = \frac{4T}{9\pi^3} \underset{T=\pi}{=\!=} \frac{4}{9\pi^2}$

Ez a megoldás helyes

Mathematica-proved!

$k=2l+1 \Rightarrow a_k = \frac{4T}{k^2\pi^3}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{T}\left(x-\frac{x^2}{2\pi}\right)\Big|_0^T = \frac{2}{T}\left(T-\frac{T^2}{2\pi}\right) \underset{}{\overset{T=\pi}{=\!=}}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\boxed{a_0 \underset{T=\pi}{=\!=} 1}$$

Mathematicával ell.

Tehát

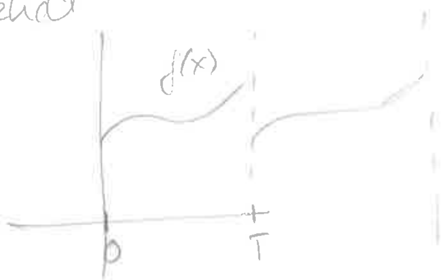
$$1-\frac{x}{\pi} \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{k\pi x}{T} \underset{T=\pi}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos x + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3x) + \ldots$$

Math.-val ell.!

Tehát

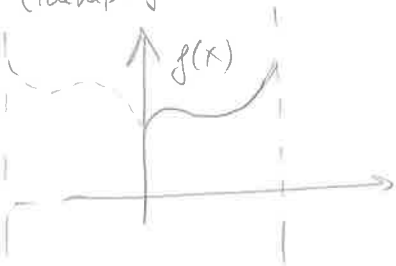


$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx$$

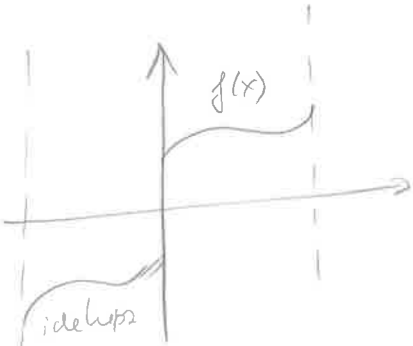
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx$$

(ideképzeljük)



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T} dx$$



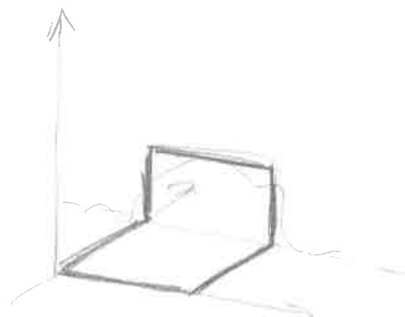
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{T}$$

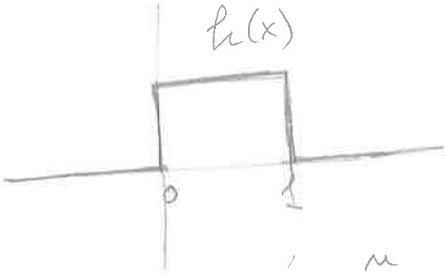
(itt az a_0 teljesen eltűnik)

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{k\pi x}{T} dx$$

$$a_0 = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, dx = 0 \quad \text{mert } f \text{ páratlan}$$

Anal 3 gyak
PDE – Laplace
Fourier sor





$$h(x) \cong \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x$$

(a_0 nincs!)

$$b_k = 2\int_0^1 \sin k\pi x \, dx = \frac{-2}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 = +\frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos k\pi\right)$$

$$h(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l+1}}^{n} \frac{4}{k\pi}$$

$$\boxed{h(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin (2k+1)\pi x}$$

$$\Delta u = 0$$

legyen $u(x,y) = f(x)\, g(y)$

$$\Delta u = f''g + fg'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = \lambda}$$

$f(0)\, g(y) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$f(1)\, g(y) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$f(x)\, g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$f(x)\, g(1) = h(x)$

$$\Downarrow$$

$$g(1) = \frac{h(x)}{f(x)}$$

Mathematica:

In = "FourierSinSeries[1, x, 5]"

$$\text{Out} = \frac{4\,\text{Sin}[x]}{\pi} + \frac{4\,\text{Sin}[3x]}{3\pi} + \frac{4\,\text{Sin}[5x]}{5\pi}$$

---

előbb legyen $f'' = -c^2 f$

$f(0) = f(1) = 0$

$f(x) = A \sin cx + B \cos cx$

$f(0) = B = 0$

$f(1) = A \sin c = 0 \Rightarrow c = k\pi$

$$\boxed{f(x) = A \sin k\pi x}$$

$$g'' = (k\pi)^2 g \quad \Rightarrow \quad g = C e^{k\pi y} + D e^{-k\pi y} \Big\} \Rightarrow C = -D$$

$$g(0) = C + D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g = 2C\, sh(k\pi y)$$

$g(0) = 0$

$g(1) = \frac{h(x)}{f(x)}$ } ezzel most nem foglalkozunk

$$u_k(x,y) = \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

Ált. megoldás: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$

„b_k" lehet szebb lenne!

$$u(x,1) = h(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, sh(k\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

a_k ↓ Fourier sin coeff-ek

$$\Downarrow$$

$$\forall k: \; A_k = \frac{a_k}{sh(k\pi)}$$

tehát $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{sh(k\pi)} \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$

ahol $a_k = 2\int_0^1 h(x) \sin(k\pi x)\, dx$

$$\boxed{Csch(x) = \frac{1}{Sinh(x)}}$$

Mathematica megoldása:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^{k+1} + 1\right] \frac{1}{sh(k\pi)} \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

(u.a.)

Anal 3 gyak
PDE Laplace

3

2016-os feladatsor

(3) Laplace egyenlet + $u'_y(x,0)=0$

$u(x,1)=x^2-x$

$u(0,y)=0$

$u(1,y)=0$

$f''=-\lambda f$ $\quad u'_y=\left(f(x)\,g(y)\right)'_y=f(x)\,g'(y)$

$g''=\lambda g$ $\quad u'_y(x,0)=\underline{f(x)\,g'(0)=0} \Rightarrow g'(0)=0$

$f(x)\,g(1)=x^2-x$

$f(0)=0$

$f(1)=0$

$\lambda=c^2$

$$\begin{cases} f''=-c^2 f \\ f(0)=f(1)=0\end{cases} \Rightarrow \underline{f=A\sin k\pi x}$$

$g''=(k\pi)^2 g$

$g=Ce^{+k\pi y}+De^{-k\pi y}$

$g'=Ck\pi e^{k\pi y}-Dk\pi e^{k\pi y}=0$ ha $y=0$

$Ck\pi-Dk\pi=0 \Rightarrow \underline{\underline{C=D}}$

$$\boxed{g=2D\,\mathrm{ch}(k\pi y)}$$

$u_k(x,y)=\sin k\pi x\,\mathrm{ch}(k\pi y)$

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\pi x)\,\mathrm{ch}(k\pi y)$$

$$u(x,1)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(k\pi x)\,\mathrm{ch}(k\pi)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\pi x)$$

$$b_k=2\int_0^1(x^2-x)\sin k\pi x$$

$$x^2-x\simeq 2\pi(-5+\pi^2)\sin\pi x$$
$$+(\pi-\pi^3)\sin 2\pi x$$
$$+\frac{2\pi}{27}(9\pi^2-15)\sin(3\pi x)$$

$$A_k = \frac{b_k}{ch(k\pi)}$$ bármilyen

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x) \frac{b_k}{ch(k\pi)} \sin(k\pi x)\, ch(k\pi y)$$

$$u'_y = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x) \frac{b_k}{ch(k\pi)} (k\pi) \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

$u''_y(\cancel{x}, 0)$ nem való.

DG* $\quad u(x,y) = v(x+y, x-y)$ ← láncszabály

$$u'_x = v'_x(x+y, x-y) + v'_y(x+y, x-y)$$

$$u''_{xx} = v''_{xx} + v''_{xy} + v''_{yx} + v''_{yy}$$

$$u'_y = v'_x - v'_y$$

$$u''_{yy} = v''_{xx} - v''_{xy} - v''_{yx} + v''_{yy}$$

$$\underbrace{\Delta u = 2\Delta v = 0}$$

2017-es kidolgozás

$u(0,y)=0 \quad u'_y(x,0)=0$ $u(1,y)=0 \quad u(x,1)=x^2-x$ Laplace $\triangle$ 4	Anal 3 PDE – Laplace

Laplace egyenlet

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$u(0,y)=0 \quad u'_y(x,0)=0$

$u(1,y)=0 \quad u(x,1) = x^2-x$

2017-es kidolgozás.

legyen $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\left.\begin{aligned} u(0,y) &= X(0)\,Y(y)=0 \\ u(1,y) &= X(1)\,Y(y)=0 \end{aligned}\right\} \forall y\in[0,1] \Rightarrow X(0)=X(1)=0$$

$$u'_y(x,0) = X(x)\,Y'_y(0)=0 \Rightarrow Y'_y(0)$$
$$\forall x\in[0,1]$$

$$\Delta u = X''Y + XY''=0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

I. $X''=\lambda X$, $X(0)=0$, $X(1)=0$

II. $Y''=-\lambda Y$, $Y'_y(0)=0$

I. megoldása:

λ csak negatív lehet: $\lambda=-\alpha^2$

ekkor $X''=-\alpha^2 X$

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

$$X(0) = A = 0$$

$$X(1) = B\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$$

tehát $\lambda = -(k\pi)^2$

$$X(x) = B\sin(k\pi x)$$

II. $Y''=(k\pi)^2 Y$

ekkor $Y(y) = Ce^{-k\pi y} + De^{k\pi y}$

$$Y'_y(y) = -Ck\pi e^{-k\pi y} + Dk\pi e^{k\pi y}$$

$$Y'(0) = -Ck\pi + Dk\pi = 0$$

$$C=D$$

$$Y(y) = 2C\,\mathrm{ch}(k\pi y)$$

tehát egy alapmegoldás: $u_k(x,y) = A_k\,\mathrm{ch}(k\pi y)\sin(k\pi x)$

ezért $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\mathrm{ch}(k\pi y)\sin(k\pi x)$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\mathrm{ch}(k\pi)\sin(k\pi x) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\pi x)$$

ahol $b_k = 2\int_0^1 (x^2-x)\sin(k\pi x)\,dx$

tehát $A_k = \frac{2}{\mathrm{ch}(k\pi)}\int_0^1 (x^2-x)\sin k\pi x\,dx$

(4)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \boxed{u(x,0) = \cos 2x} \\ u(x,\infty) = 0 \end{cases}$$

$u := X(x)Y(y) \Rightarrow X''Y + XY'' = 0$

$X(x)\,Y(0) = \cos 2x$

$X(x)\,Y(\infty) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ezért $Y(\infty) = 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Laplace egyenlet a félsíkon

I $\quad X'' = \lambda X$

$$X(x) = \frac{\cos 2x}{Y(0)}$$

↳ ebből lehet segíteni, hogy az exponenciális megoldás nem lesz jó mert az nem tud előállítani tetszőleges fv-t (esetünkben $\cos 2x$-t)

$$\boxed{\text{tehát } \lambda = -\alpha^2}$$

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x)$$

$$X(x) = C\cos\alpha x + D\sin\alpha x$$

II $\quad Y'' = -\lambda Y$

$Y(\infty) = 0$ → ebből lehet sejteni, hogy a sin/cos megoldás nem lesz jó

$$Y'' = \alpha^2 Y \Rightarrow Y(y) = Ae^{-\alpha y} + Be^{\alpha y}$$

$Y(\infty) = 0$ ezért $B = 0$

$$Y(y) = Ae^{-\alpha y}$$

Tehát egy lehetséges alapmegoldás:

$$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\left(C_\alpha \cos\alpha x + D_\alpha \sin\alpha x\right)$$

Peremfeltétel:

$$u_\alpha(x,0) = C_\alpha\cos\alpha x + D_\alpha\sin\alpha x \overset{!}{=} \cos 2x$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ D_2 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$ és minden más tag nulla!

tehát

$$\boxed{u(x,y) = e^{-2y}\cos 2x}$$

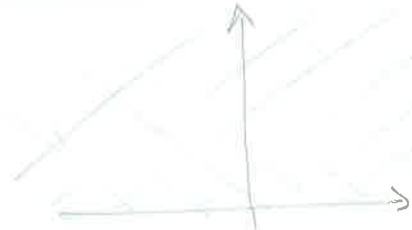
félsík

2017 6 hal3

(5.) Δ-hoz

Laplace egyenlet : $\Delta u = 0$

$y > 0$ félsíkon



2016-os kidolgozás

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (1a) \\ u(x,0) = \cos(2x) & (1b) \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0 & (1c) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Ezt kell megoldani

$\Longrightarrow$ $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$\partial\Omega = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Megoldás. legyen $u(x,y) = \xi(x)\eta(y) \Rightarrow \Delta u = \underbrace{\xi''\eta + \xi\eta'' = 0}$

$$\Downarrow$$

$$\lambda = \frac{\xi''}{\xi} = -\frac{\eta''}{\eta} \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

$\xi(x)\eta(0) = \cos(2x)$

$\xi(x) \underbrace{\lim\limits_{y\to\infty} \eta(y)}_{=0} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ha $\lambda > 0$ vagyis $\lambda = \alpha^2$

$$\begin{cases} \eta'' + \alpha^2\eta = 0 & (2a) \\ \eta(\infty) = 0 & (2b) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ most ezt kell megoldani

$(2a) \Rightarrow \eta = A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y)$

azonban ekkor $\eta(\infty) \neq 0$

tehát $\lambda > 0$ NEM jó $\lightning$

ha $\lambda < 0$ vagyis $\lambda = -\alpha^2$

$$\begin{cases} \eta'' = \alpha^2\eta & (3a) \\ \eta(\infty) = 0 & (3b) \end{cases} \Rightarrow \eta = Ae^{-\alpha y} + Be^{+\alpha y}$$

$\eta(\infty) = Ae^{-\infty} + Be^{+\infty} \Rightarrow \underline{B = 0}$

$s^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \underline{s = \pm\alpha}$

tehát $\boxed{\eta(y) = Ae^{-\alpha y}}$

megj. esetben nagyon egyszerű:

$\xi(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\eta(0)} = \dfrac{\cos(2x)}{A}$

$u(x,y) = \xi(x)\eta(y) =$

$= \dfrac{\cos(2x)}{A} Ae^{-\alpha y}$

$= \cos(2x)\, e^{-\alpha y}$

$\boxed{u(x,y) = e^{-\alpha y}\cos(2x)}$

Azonban V.Z. nem így!

Ez a megoldás ROSSZ!

$\xi'' = -\alpha^2\xi$

$\xi = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\big(A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)\big)$

$u_\alpha(x,0) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) = \cos(2x)$

$\boxed{u(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)}$

12. hét (szerda)
Laplace félsík

5

Rossz megoldás (szándékosan):

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0\end{array}} \longrightarrow u(x,y) = \xi(x)\eta(y) \Longrightarrow \frac{\xi''}{\xi} = -\frac{\eta''}{\eta} = -\alpha^2$$

$$\xi(x)\eta(0) = g(x)$$

$$\xi(x)\underbrace{\lim_{y\to\infty}\eta(y)}_{=0} = 0$$

I $$\boxed{\begin{array}{l}\eta'' = \alpha^2\eta \\ \lim_{y\to\infty}\eta(y) = 0\end{array}} \Longrightarrow \eta(y) = Ae^{-\alpha y}$$

II $$\boxed{\begin{array}{l}\xi'' = -\alpha^2\xi \\ \xi(x) = \dfrac{g(x)}{\eta(0)}\end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{ha:} \\ \xi(x) = \dfrac{1}{A}g(x)\end{array}} \Longrightarrow \xi''(x) = \frac{1}{A}g''(x)$$

nem elégíti ki $\xi'' = -\alpha^2\xi$ -t

NA, ezért nem jó így!

még egy próba

$$\left.\begin{array}{l}u(x,y) := e^{-\alpha y}g(x) \\ u''_{xx} = e^{-\alpha y}g''(x) \\ u''_{yy} = \alpha^2 e^{-\alpha y}g(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta u = e^{-\alpha y}\underbrace{(g'' + \alpha^2 g)}_{???} \stackrel{?}{=} 0$$

Jó megoldás:

$$\xi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x) \longrightarrow \text{ez kielégíti } \boxed{\xi'' = -\alpha^2\xi} \text{ -t}$$

$$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\left(A_\alpha \sin(\alpha x) + B_\alpha\cos\alpha x\right) \longleftarrow \text{ezek összege is kielégíti a differenciál egyenletet}$$

$$u(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha y}\left(A_\alpha\sin(\alpha x) + B_\alpha\cos(\alpha x)\right)d\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}u''_{xx} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\displaystyle\int_0^\infty u_\alpha\,d\alpha = \int_0^\infty u''_{\alpha_{xx}}\,d\alpha \\ u''_{yy} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\displaystyle\int_0^\infty u_\alpha\,d\alpha = \int_0^\infty u''_{\alpha_{yy}}\,d\alpha\end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta u = \int_0^\infty \underbrace{\Delta u_\alpha}_{\substack{=0 \\ \forall\alpha>0}}\,d\alpha = 0$$

ha nem tűnnek el, akkor:

$$g(x) = \int_0^\infty \left(\hat{g}_c(\alpha)\cos\alpha x + \hat{g}_s(\alpha)\sin\alpha x\right) d\alpha$$

cos. tr. sin. tr.

$$u(x,0) = \int_0^\infty A_\alpha \sin\alpha x + B_\alpha \cos\alpha x \; dx$$

Egységkörön:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u(x,y)=0\\ u(x,y)=g(x,y)\\ \text{ha } x^2+y^2=R^2\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} w''_{rr}+\frac{1}{r^2}w''_{\theta\theta}+\frac{1}{r}w'_r=0\\ w(R,\theta)=g(R\cos\theta, R\sin\theta)=\bar{g}(R,\theta) \quad (2b)\\ w(r,0)=w(r,2\pi) \quad (2c)\end{array}}$$

ezt kell megoldani

$$w(r,\theta)=\rho(r)T(\theta)$$

$$\rho''T+\frac{1}{r^2}\rho T''+\frac{1}{r}\rho' T=0 \Rightarrow \left(\rho''+\frac{1}{r}\rho'\right)T+\frac{1}{r^2}\rho T''=0$$

$$\frac{\rho''+\frac{1}{r}\rho'}{\rho}=-\frac{1}{r^2}\frac{T''}{T}$$

$$\boxed{\frac{r^2\rho''+r\rho'}{\rho}=-\frac{T''}{T}=\lambda}$$

I $\lambda=\alpha^2$

$$(2c)\Rightarrow T(0)=T(2\pi)$$

$$T''=-\alpha^2 T$$

$$T=A\cos(\alpha\theta)+B\sin(\alpha\theta) \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}T(0)=A\\ T(2\pi)=A\cos(2\pi\alpha)+B\sin(2\pi\alpha)\end{array}\right\}=$$

tehát $\alpha\in\mathbb{N} \Rightarrow \alpha=n$

II $r^2\rho''+r\rho'=n^2\rho$

$$r^2\rho''+r\rho'-n^2\rho=0$$

II.1 ha $n=0$

$$r^2\rho''+r\rho'=0$$

$$\boxed{\rho=A+B\ln r}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho'=\frac{B}{r}\\ \rho''=-\frac{B}{r^2}\end{array}\right\} r\rho'+r^2\frac{\rho''}{r^2}=0$$

II.2. ha $n\neq 0$

$$r^2\rho''+r\rho'-n^2\rho=0$$

$$\boxed{\rho=Cr^n+Dr^{-n}}$$

$$\rho'=nCr^{n-1}-nDr^{-n-1}$$

$$\rho''=n(n-1)Cr^{n-2}+n(n+1)Dr^{-n-2}$$

$$r^2\rho''=(n^2-n)Cr^n+(n^2+n)Dr^{-n}$$

$$r\rho'=nCr^n-nDr^{-n}$$

$$Cn^2r^n+n^2Dr^{-n}=n^2\rho$$

Tehát az alapmegoldás:

$$w_n=r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

Az alapmegoldásokból kikeverjük azt a függvényt ami a radiális értékeknek is eleget tesz.

$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$w(R,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \equiv \bar{g}(\theta)$$

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{R^n} a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{R^n} b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta$$

---

pld:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & R = 1 \\ u(x,y) = y^2 \text{ ha } (x,y) \in \partial\Omega & \end{array}}$$

$$\left[w(r,\theta) \right]_{r=1} = w(1,\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$w(1,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \equiv \underbrace{\frac{1}{2}}_{A_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{A_2} \cos 2\theta$$

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} + r^2 \frac{1}{2} \cos 2\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + x^2 - y^2\right)$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1 + x^2 - y^2}{2}}$$

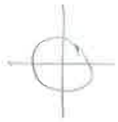
$$\Delta u = 0$$
$$u(x,y) = 2y$$

$$w(1,\theta) = 2\cos\theta \implies A_1 = 2$$

$$w(r,\theta) = 2r\cos\theta \implies u(x,y) = 2y$$

ez elég egyszerű volt.

PDE | 12. hét (szerda)
Laplace

$\Delta u = 0 \qquad \Omega =$ 

$u(x,y) = y^2$ ha $(x,y) \in \partial\Omega$ vagyis, ha $x^2+y^2=1$

Áttérés polárkoordinátákra : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$w(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\boxed{w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} = 0 \quad (1)}$ $\qquad w(r,\theta) = r^2 \sin^2\theta$ ha $r^2 = 1$

Tehát a peremfeltétel így: $\underline{w(1,\theta) = \sin^2\theta}$

További feltételek: $\underline{w(r,0) = w(r,2\pi)}$

Legyen $w(r,\theta) = R(r)\,T(\theta) \Rightarrow R(r)\underline{T(0)} = R(r)\underline{T(2\pi)} \ \forall r$

Ekkor az (1)-es egyenlet: $R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{R^2} R T'' = 0$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

I. $\boxed{T'' = -\lambda T}$ $\qquad$ II. $\boxed{\begin{matrix} r^2R'' + rR' = \lambda R \\ \text{ú.h. } T(0) = T(2\pi) \end{matrix}}$

1. eset $\lambda < 0$

legyen $\lambda = -\alpha^2$

I. ekkor $T(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}$

$T(0) = A + B \overset{!}{=} Ae^{2\alpha\pi} + Be^{-2\alpha\pi} = T(2\pi)$

$$\Downarrow$$

$$A = -B\frac{e^{-2\alpha\pi} - 1}{e^{2\alpha\pi} - 1}$$

$$T(0) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left(\operatorname{sh} 0 - \operatorname{sh}(-2\alpha\pi)\right) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\operatorname{sh}(2\alpha\pi)$$

$$T(2\pi) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left(\operatorname{sh}(2\alpha\pi) - \operatorname{sh} 0\right) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\operatorname{sh}(2\alpha\pi)$$

$$T(\theta) = B\left(e^{-\alpha\theta} - e^{\alpha\theta}\frac{e^{-2\alpha\pi}-1}{e^{2\alpha\pi}-1}\right) = B\frac{1}{e^{\alpha}-1}\left(e^{-\alpha(\theta-2\pi)} - e^{-\alpha\theta} - e^{\alpha(\theta-2\pi)} + e^{\alpha\theta}\right.$$

$$= \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[\operatorname{sh}(\alpha\theta) - \operatorname{sh}(\alpha(\theta-2\pi))\right]$$

Nem kaptam semmi féle összeférhetetlenséget (eddig)

majd: NEM definiált megoldás

Ellenőrzés:

$$T'(\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[ch(\alpha\theta)\cdot\alpha - ch(\alpha(\theta-2\pi))\cdot\alpha\right]$$

$$T''(\theta) = \alpha^2 \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right] = \alpha^2 T(\theta) \checkmark$$

II $r^2R'' + rR' + \alpha^2 R = 0 \longleftarrow$ dsolve-al: (Matlab)

$$R(r) = C\cos(\alpha \ln r) + D\sin(\alpha \ln r)$$

legyen $r := e^{\xi}$

$$\bar{R}(\xi) = C\cos(\alpha\xi) + D\sin(\alpha\xi)$$

lehet, hogy erre más száls

$$w(r,\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right]\left(C\cos(\alpha \ln r) + D\sin(\alpha \ln r)\right)$$

$$w_\alpha(1,\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right] C$$

emiatt nem lesz diffható origó körül!

előállítható-e a $\sin^2\theta$ ilyen függvényekből
(nem hiszem hogy igen)

---

2. eset $\lambda > 0$ legyen $\lambda = \alpha^2$

I $T''(\theta) = -\alpha^2 T(\theta)$

$T(\theta) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

$T(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$

$T(2\pi) = A\cos 2\alpha\pi + B\sin 2\alpha\pi$

$A = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi)$

$$A = B\frac{\sin(2\alpha\pi)}{1-\cos(2\alpha\pi)}$$

túl bonyolult

ha $T(\theta)$ periodikus 2π szerint $\Big\} \Rightarrow \alpha = n \in \mathbb{N}$
akkor $T(0) = T(2\pi)$ ✓

II $\quad r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$

ha $n = 0$, akkor

$$r^2 R'' + rR' = 0 \quad \Big| \int$$

ha $R(r) = D_0 \ln(r) + C_0$

akkor $R'(r) = \dfrac{D_0}{r}$

$$R''(r) = -\frac{D_0}{r^2}$$

$$\cancel{\int r^2 R'' dr + \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - 2\int r R' dr + \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - rR + \int R dr = 0}$$

ha $n > 0$

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0$$

$$(r^n)' = n r^{n-1}$$

$$(r^n)'' = n(n-1) r^{n-2}$$

$r^n(n^2 - n) + n r^n - n^2 r^n = 0$ valóban

---

tehát $w(r, \theta) = r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \right)$

+ BÓNUSZ feladat

A pozitív síknegyedben keressük a Laplace egyenlet megoldását az egységkör ide eső részén.

$$\Omega = \{ (x,y) : \ 0 < x^2+y^2 < 1, \ x,y > 0 \}$$

Az egyenlet:

(1) $$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega$$

A peremfeltételeket a polárkoordinátákban adjuk meg:

$$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(2) $$w(r,0) = 0 \qquad 0 \le r \le 1$$

(3) $$w(r, \pi/2) = 0 \qquad 0 \le r \le 1$$

(4) $$w(1,\theta) = \sin(2\theta) \qquad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Írjuk fel (1), (2), (3), (4) feladat megoldását.

Anal 3 Nagy ZH 2. BONUSZ feladata

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1 \; ; \; x,y>0\}$$

(1) $\Delta u = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$

$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

(2) $w(r,0) = 0$
(3) $w(r,\frac{\pi}{2}) = 0$ $\Big\}\; r \in [0,1]$
(4) $w(1,\theta) = \sin(2\theta)$

$$\boxed{u''_{xx} + u''_{yy} = u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta} \quad (\Delta_p)}$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 u''_{rr} + r u'_r + u''_{\theta\theta} = 0$$

Megoldás:

$R(r)\,T(0) = 0$
$R(r)\,T(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\quad \forall r \Rightarrow \underline{T(0) = T(\frac{\pi}{2}) = 0}$

$$\Downarrow$$
$$r^2R''T + rR'T + RT'' = 0$$
$$\Downarrow$$
$$T(r^2R'' + rR') = -RT''$$
$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$
$$\Downarrow$$

II $\quad r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$

I $\quad T'' + \lambda T = 0$

I $\quad T'' + \lambda T = 0 \iff T'' = -\lambda T$

$T(0) = T(\frac{\pi}{2}) = 0$

csak ha $\lambda = s^2 \Rightarrow T(\theta) = A\cos(s\theta) + B\sin(s\theta)$

$T(0) = \boxed{A = 0}$

$T(\frac{\pi}{2}) = B\sin(s\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \underline{s = 2k}$ (páros szám)

Tehát $\lambda = (2k)^2$

$T(\theta) = B\sin(2k\theta)$

II $\quad r^2R'' + rR' - (2k)^2R = 0$

$k=0: \; R_0(r) = C_0 + \cancel{D_0 \ln r}$

ell: $R_0' = \frac{D_0}{r}$; $R_0'' = -\frac{D_0}{r^2}$

$k\neq 0: \; R_k(r) = C_k r^{+2k} + D_k r^{-2k}$

ell: $R_k' = 2k C_k r^{2k-1}$

$R_k'' = (2k)(2k-1)C_k r^{2k-2} = [(2k)^2 - 2k]\,C_k r^{2k-2}$

mivel $r=0$ eset is lehet $\Rightarrow D_k = 0$

Alapmegoldás:

$w_k(r,\theta) = T(\theta)R(r) = r^{2k}\sin(2k\theta)$

$w_0(r,\theta) = 1 \cdot \sin 0 = \underline{0}$

A megoldás ezekből összekeverésével:

$$w(r,\theta) = \cancel{C_0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{2k}\sin(2k\theta)$$

13. hét

Anal 3 nagyZH
2. BONUSZ fel.

12

tehát $\boxed{w_k(r,\theta) = r^{2k} \sin(2k\theta)}$ $k \neq 0$

ell: $w'_{k\,r} = 2k\, r^{2k-1} \sin(2k\theta)$ $\quad | \cdot r$

$w''_{k\,rr} = (2k)(2k-1)\, r^{2k-2} \sin(2k\theta)$ $\quad | \cdot r^2$

$w''_{k\,\theta\theta} = -(2k)^2 r^{2k} \sin(2k\theta)$

$$r^2 w''_{k\,rr} + r w'_{k\,r} + w''_{k\,\theta\theta} = r^{2k} \sin(2k\theta)\left[2k + (2k)^2 - 2k - (2k)^2\right] = 0 \quad ✓$$

$w_k(r,0) = 0$ ✓

$w_k(r,\frac{\pi}{2}) = r^{2k} \sin(2k\frac{\pi}{2}) = 0$ ✓

Megoldás összetákolása:

$$\boxed{w(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{2k} \sin(2k\theta)}$$

kielégíti (1_p)-t
(2)-t
(3)-t
DE a (4)-t MÉG NEM

$$w(1,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(2k\theta) = \sin(2\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$C_{k\neq 1} = 0, \quad C_1 = 1$$

Tehát $\boxed{w(r,\theta) = r^2 \sin(2\theta)}$

→ ez a megoldása az $(1_p, 2, 3, 4)$-nek.

Áttérés Cartesian k.r.-be:

$$w(r,\theta) = r^2\, 2 \cdot \sin\theta \cos\theta = 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2xy$$

$\boxed{u(x,y) = 2xy}$ → kielégíti (1)-t
(2)-t $(x=0)$
(3)-t $(y=0)$
(4)-t (polár k.r.-ben ellen., elég)

Fourier transform

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x s}\, dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\, e^{2\pi i x s}\, ds\end{aligned}}$$

$$= \int_{0}^{\infty} -f(x)\, e^{-2\pi i x s}\, dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-2\pi i xs} = \cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs \implies \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x) (\dots) \, dx + \int_{0}^{\infty} f(x) (\dots) \, dx =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} f(-x) \left(\cos 2\pi xs + i \sin 2\pi xs \right) dx + \int_{0}^{\infty} f(x) \left(\cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs \right) dx =$$

Fourier series:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = (*)$$

$$\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} \quad \text{mert} \quad \frac{\cos a + \cancel{j \sin a} + \cos a - \cancel{j \sin a}}{2} = \cos a.$$

$$\sin(a) = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$$

$$(*) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} + b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jnx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jnx} =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2} (a_n - b_n j)}_{c_n} e^{jnx} + \underbrace{\frac{1}{2} (a_n + b_n j)}_{\bar{c}_n = c_{-n}} e^{-jnx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}, \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cos nx - j f(x) \sin nx \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jnx}\, dx$$

Fourier Tr. trigonometriai formai

$$f(x) = \int_0^\infty \left(a_u \cos 2\pi u x + b_u \sin 2\pi u x \right) du$$

$$a_u = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx$$

$$b_u = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi u x \, dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty a_u \frac{e^{2u\pi j x} + e^{-2u\pi j x}}{2} + b_u \frac{e^{2u\pi j x} - e^{-2u\pi j x}}{2j} \, du =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_u - \frac{j}{2} b_u\right)}_{c_u} e^{2u\pi j x} + \left(\frac{1}{2} a_u + \frac{j}{2} b_u\right) e^{-2u\pi x j} \, du$$

$$c_u = \frac{1}{2} \cdot 2\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) \cos 2\pi u x - j f(x) \sin 2\pi u x \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi u x} dx$$

Tehát

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} df$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} df$$

$$X_c(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, df$$

$$X_s(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \, df$$

$$x(t) = \int_0^\infty \left(X_c(\omega) \cos \omega t + X_s(\omega) \sin \omega t \right) df$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{jxs} ds$$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxs} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(s) \cos(xs) + \hat{f}_s(s) \sin(xs) \, ds$$

$$\hat{f}_c(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xs) \, dx$$

$$\hat{f}_s(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xs) \, dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx$$

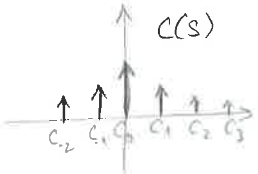
Klasszikus Fourier sor.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+j\frac{2n\pi}{T}x} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} c(s)\, e^{j\frac{2s\pi}{T}x}\, ds}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-j\frac{2n\pi}{T}x}\, dx$$

Klasszikus Fourier sor exp. alakban

$$\boxed{C(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \delta(s-n)}$$



legyen $\bar{s} = \frac{2\pi s}{T}$, $d\bar{s} = \frac{2\pi}{T}ds$ } integrálási vált. csere

$$\cancel{f(x) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c\left(\frac{T\bar{s}}{2\pi}\right) e^{j\bar{s}x}\, d\bar{s}} =$$

$$\cancel{= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x) e^{-j\frac{2\pi n}{T}x}dx\right)\delta(s-n)\right] e^{j\bar{s}x}\, d\bar{s}} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-n)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s)\, e^{j\frac{2\pi}{T}sx}\, ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta(s-\mu) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi\mu}{T}x}\, dx \right) e^{j\frac{2s\pi}{T}x} ds$$

legyen $\bar{s} = \frac{2\pi}{T}s$

$d\bar{s} = \frac{2\pi}{T}ds$

$ds = \frac{T}{2\pi}d\bar{s}$

$$= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{T}{2\pi}\bar{s}-\mu\right) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi\mu}{T}}dx \quad e^{j\bar{s}x} d\bar{s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{T}{2\pi}s-\mu\right) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi\mu}{T}}dx \right)}_{\mathcal{F}\{\text{periodikus fv.}\}} e^{jsx} dx =$$

Landau-Lifschitz-Gilbert egyenlet } Áron előadása (Csurgay Árpád doktorandusza)

↳ micromagnetic module

$\boxed{\text{spin waves}}$

Laplace egyenlet, ha Ω az egységkör

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \}$$

$$\partial\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \}$$

$$\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}$$

$$u(x,y) = g(x,y) \quad \partial\Omega\text{-ban}$$

peremfelt: $v(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$v(1,\theta) = g(\cos\theta, r\sin\theta) = \bar{g}(\theta)$

polár koordinátákban:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$\Rightarrow v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$r \in [0,1]$

$\theta \in [0,2\pi]$

$$v'_r = u'_x \cos\theta + u'_y \sin\theta$$

$$v''_{rr} = u''_{xx}\cos^2\theta + u''_{yy}\sin^2\theta + 2u''_{xy}\cos\theta\sin\theta$$

$$v'_\theta = -u'_x r\sin\theta + u'_y r\cos\theta$$

$v''_{\theta\theta} = \cancel{-u''_{xx} r^2\cos\theta - u''_{yy} r^2 \sin\theta - u''_{xy}}$

$= \cancel{-u''_{xx} r^2 \sin\theta\cos\theta} -$ } elég bonyolult számítás

$v''_{\theta\theta} =$

Δ egység kiírni: ← Laplace egyenlet polárkoordinátákban

$$(3) \quad \boxed{r^2 v''_{rr} + r v'_r + v''_{\theta\theta} = 0} \rightarrow v(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$$

$v'_r = R'(r)\,T(\theta)$

$v''_{rr} = R''(r)\,T(\theta)$

$\Rightarrow \boxed{r^2 R''T + r R'T + RT'' = 0}$

$\boxed{\text{Anal 3 -1- 12. hét E.0}}$

$$T(r^2R'' + rR') = -T''R$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda \quad (\text{konst})$$

$$r^2R'' + rR' = +\lambda R$$

$$\left.\begin{array}{l} T'' = -\lambda T \\ \underline{\lambda = \alpha^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T = A\sin(\alpha\theta) + B\cos(\alpha\theta)}$$

2π szerint periódikus kell legyen

mert $T(0) = T(2\pi)$

$\Downarrow$

$\alpha \in \mathbb{N}$

$\lambda = n^2$

$$\boxed{r^2R'' + rR' - n^2R = 0}$$

II rendű Euler egyenlet

$n = 0$-ra: $R(r) = C_0 + \underbrace{D_0 \ln(r)}$

ez nem jó, miért is? Mert $r = 0$-ra is legyen értelme!

$n \neq 0$-ra: $R(r) = C_n r^n + \cancel{D_n r^{-n}}$

tehát $\boxed{R_n(r) = C_n r^n}$

n-edik alapmegoldása a (3)-nak:

$$v_n(r,\theta) = r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

$$v(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

$$v(1,\theta) = g(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)$$

ez a $g(\theta)$-nak a Fourier sorfejtése.

pld:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in B_1 \\ u(x,y) = y^2 \end{cases}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

ez itt az A_2

A_0 $\quad B_2$

ide kéne kijönnie hogy $u(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2)$

$$w(1,\theta) = \left[r^2\sin^2\theta\right]_{r=1} = \left[\frac{r^2}{2}(1-\cos 2\theta)\right]_{r=1} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2\theta$$

miért van itt cos ?

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} + r^2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2\theta)$$

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(1-2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2)$$

Áll (Poisson formula)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & (x,y) \in B_1 \\ u = g & \partial B_1\text{-en} \end{array}}$$

Fontos.

$$w(r,\theta) = \int_0^{2\pi} K(r,\theta,\varphi)\, g(\varphi)\, d\varphi$$

Poisson kernel: $K(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1-r^2}{2(1-2r\cos\alpha + r^2)\pi}$

$\alpha = \theta - \varphi$

Áll: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, nyílt

határa $\partial\Omega = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b]\}$

Ekkor $\exists\, G(x,y,t)$ melyre

$\Delta u = 0$ $\quad \Omega$-n

$u = g$ $\quad \partial\Omega$-n,

akkor $u(x,y) = \int_a^b G(x,y,t)\, g(\gamma(t))\, dt$

$G: \Omega\times[a,b] \to \mathbb{R}$ „Ω sajátja"

Green fv-e Ω-nak

Spec: B_1-re G a Poisson mag

(M) hasonló igaz a Neumann felt-re is.

(displacement)

+Ptd: $\Omega = \{(x,y) \quad x\in R,\ y>0\}$

$\Delta u = 0$

$\partial\Omega$-n: $u(x,0) = g(x)$

Áll: $u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{(x-t)^2+y^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{\pi}\cdot\frac{g(\xi)}{(x-\xi)^2+y^2}\,d\xi$

Hővezetés egyenlet (heat eq.)

$u(x,t)$ $\qquad u(x,0) = f(x)$

Áll: $\boxed{u'_t = k^2 u''_{xx}}$

1. változók szétválasztása. (Ilyet már láttunk)

Mo: frekvencia tartományban oldjuk meg.

Figyelem $\mathcal{F}\{u'_x(x,t), s\} = js\,\hat{u}(x,t)$

$\mathcal{F}\{u(x,t), s\} = \hat{u}(s,t)$

$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(x,t), s\} = -k^2 s^2 \mathcal{F}\{u(x,t), s\}$

Figyelem, csak 1. rend.

$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(s,t) = k^2 (js)^2 \hat{u}(s,t)$

$\dot{\hat{u}}(s,t) = -k^2 s^2 \hat{u}(s,t) \quad \rightsquigarrow \quad \dot{v}(s,t) = -k^2 s^2 v(s,t)$

$\cancel{v(s,t) = A(s)\cos(kst) + B(s)\sin(kst)}$

$\cancel{\frac{\dot{\hat{u}}(s,t)}{u(s,t)} = -k^2 s^2}$

$v(s,t) = C(s)\, e^{-k^2 s^2 t}$

$t=0$-ban $\quad v(s,0) = C(s) =$ konst

$C(s) = \hat{f}(s)$

$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-s^2 t}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Alaptul : $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{s^2}{2}}$

Átskálázás : $\mathcal{F}(f(ax), s) =$

$$\mathcal{F}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}}_{g(t)}\Big) = e^{-s^2 t}$$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s) \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z) g(z)\, dz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\, dy}_{\mathbb{E}(f(\xi)) \text{ ahol } \xi \sim N(x, \sqrt{2t})}$$

így szemléltetjük ki az eloszlást egy val. vált. függvényeként.

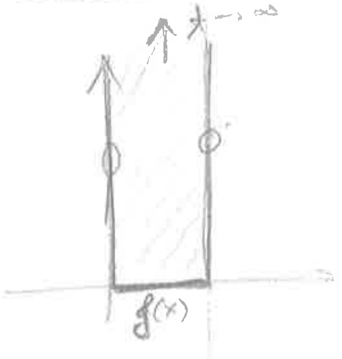
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

Ha $f(y) = \delta(y)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

2. feladat véges rúd $0 \le x \le 1$ a rúd két vége :

$u(1,t) = u(0,t) = 0$



$u'_t = k^2 u''_{xx} \quad 0 < x < 1$

$0 < t$

+ kezdeti felt. $u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

Mo: $u(x,t) = X(x)\, T(t)$

$W(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0$$

$$(r^2R'' + rR')T = -RT''$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$\underline{\text{I}}$ $T'' = -\lambda T$ $\qquad$ $\underline{\text{II}}$ $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$

$T(\theta)$ periodikus

2π szerint!

Jutalább az a cél, hogy $T(0) = T(2\pi)$ $\Big\} \Rightarrow \lambda = \alpha^2$

$$T(\theta) = A\cos(\alpha\theta) + B\sin(\alpha\theta)$$

$$T(0) = A\cos(0) \cancel{+ B\sin(0)} = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi) = T(2\pi)$$

$A = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi)$ $\quad$ pld ha $\alpha \in \mathbb{N}$

Áll. Tétel

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ $\quad$ $\partial\Omega = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$

$\exists G : \Omega \times [a,b]$ Green fv:

$$u(x,y) = \int_a^b \underbrace{G(x,y,t)}_{\text{tartomány sajátossága}} f(t)\,dt$$

Hővezetés: $\quad u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy$

$\hookrightarrow \mathbb{E}(f(\xi))$ $\qquad$ $\xi \sim \mathcal{N}(x, 4t^2)$

Anal 3 ea PDE 2

Analízis III. 11. heti feladatok

2015. december 4.

PDE 3. rész. Laplace egyenlet (folyt). Hővezetés egyenlete.

1. (Múlt hétről újra kitűzve.) Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:

$$u(x,y) = 2y, \qquad \text{ha } x^2 + y^2 = 1.$$

(+)

A Laplace egyenletet polárkoordinátákban: $w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0$, *ha* $w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

2. (Múlt hétről újra kitűzve.) Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1) \times (0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

$X \cdot Y' = 0$ $\quad$ $u(x,0) = g(x)$

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0 \qquad \text{(derivált van adva!)} \\ u(x,1) &= x^2 - x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

$Y'(0) = 0$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét végtelen rúdban az alábbi feltételekkel:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Hogyan terjed a szakadás az időben?

4. Tekintsük a hővezetés egyenletét véges rúdban az alábbi feltételekkel:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty),$$

$$u(x,0) = f(x), \; x \in (0,1), \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \; \forall t > 0.$$

Igazoljuk, hogy a megoldás: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$, ahol A_n az f függvény Fourier együtthatói:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x, \qquad A_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

5. (*Tartalék feladat*) Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay, \qquad U(\overline{x}, \overline{y}) = u(x,y),$$

ahol a U függvény ÉT-a $\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \; : \; (x,y) \in \Omega\}$. Igazoljuk, hogy $\triangle U = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

D6* (A Laplace-egyenlet invariáns a forgatásra) Tfh $u(x,y)$ függvény harmonikus az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon. Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon, Az új koordináták:

$$\overline{x} = x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) \qquad \overline{y} = x \cdot (-\sin(\varphi)) + y \cdot \cos(\varphi).$$

Az új koordináta rendszerben a függvény $U(\overline{x},\overline{y}) = u(x,y)$. Igazoljuk, hogy U is harmonikus $\overline{\Omega}$-n, ahol $\overline{\Omega} = \{(\overline{x},\overline{y}) \ : \ (x,y) \in \Omega\}$.

D7* (*Előadáson elhangzott szorgalmi HF.*) Tfh $u(x,t)$ kétszer folytonosan differenciálható $(0,1) \times (0,\infty)$-ben, folytonos $[0,1) \times [0,\infty)$-ben, és megoldása a hővezetés egyenletének az alábbi feltételekkel:

$$\begin{aligned} u_t'(x,t) &= u_{xx}''(x,t) \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in (0,1) \\ u_x'(0,t) = 0, &\qquad u_x'(1,t) = 0. \qquad t > 0 \end{aligned}$$

Beláttuk, hogy ekkor az "összes hőmennyiség" időben konstans, azaz

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u(x,0)dx = \mathcal{T}(0) \qquad \forall t > 0.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $t \to \infty$ esetén a rúd hőmérséklete homogén lesz:

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \mathcal{T}(0) \qquad \forall x \in (0,1).$$

$\mathcal{F}(f(x),s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x)dx$

$\mathcal{F}(f(x),s) = \hat{f}(s)$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cancel{f(x)} d\xi$

$\mathcal{F}(f(ax),s) =$

Analízis III. 12. heti feladatok
2015. december 11.

PDE 4. rész. Hővezetés, folytatás.

1. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= x^2-x \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u'_x(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

2. Definiáljuk az előző feladathoz kapcsolódóan az *összes hőenergiát*:

$u'_t = u''_{xx}$ $t>0,\ 0<x<1$

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\,dt.$$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz

$$\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

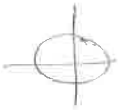
$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= \begin{cases} x, & x\in[0,1/2) \\ 1-x, & x\in[1/2,1] \end{cases} \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

(+) Euler egyenlet kör

$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$

Adott $R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$

1) $\Delta u = 0$

$u(x,y) = g(x,y) = 2y$ ha $(x,y) \in B_1$  egységkör

$u(x,y) \rightsquigarrow v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$v(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$

$$\Delta u = 0 \equiv \boxed{v''_{rr} + \frac{1}{r^2} v''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v'_r = 0}$$

$$\Downarrow$$

$R = A_0 + B_0 \ln(r) \xleftarrow{n=0}$ $\boxed{r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0}$ Euler egy.

$R = A_n r^n + B_n r^{-n} \xleftarrow{n \neq 0}$

2) $\Delta u = 0$

$u'_y(x,0) = 0$

$u(x,1) = x^2 - x$

$u(0,y) = u(1,y) = 0$

3) $u'_t = u''_{xx}$ $t > 0$

$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

↳ Fourier trafó x szerint

4) $u'_t = u''_{xx}$ $t > 0$

$x \in (0,1)$

$u(x,0) = x^2 - x$

$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0$

Hővezetés egyenlete ∞ hosszú rúdban

$$\boxed{\begin{aligned} u'_t &= b^2 u''_{xx} \quad (1a) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (1b) \end{aligned}}$$ ← ezt kell megoldani $t \in \mathbb{R}_+$-ra

feltevés : $\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ (C1)

legyen $\hat{u}(s,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-jxs}\,dx$

$$\mathcal{F}\{u'_x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u'_x\, e^{-jsx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{u\, e^{-jsx} \Big|_{-\infty}^{\infty}} - (-js) \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-jsx}\,dx \right)$$

$$= js \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-jsx}\,dx = js\, \mathcal{F}\{u\}$$

$$\mathcal{F}\{u''_{xx}\} = (js)^2\, \mathcal{F}\{u\} = -s^2\, \mathcal{F}\{u\}$$

$$u'_t = b^2 u''_{xx} \quad \Big|\ \mathcal{F}\{\cdot\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{u}'_t = -b^2 s^2 \hat{u}}$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{u} = C\, e^{-b^2 s^2 t}$$

$$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{b\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4b^2 t}}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u} = C\, e^{-\frac{(b\sqrt{2t}\, s)^2}{2}}$$

$$\dot{v} = -b^2 s^2 v$$

$$\int \frac{\dot{v}}{v}\,dt = -b^2 s^2 t + A$$

$$\ln|v| = -b^2 s^2 t + A$$

$$v = \pm e^{-b^2 s^2 t}\, e^A$$

$$\boxed{v = C\, e^{-b^2 s^2 t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{u}'_t &= -b^2 s^2 \hat{u} \\ \hat{u}(s,0) &= \hat{f}(s) \end{aligned}} \Rightarrow \hat{u}(s,t) = C \cdot e^{-b^2 s^2 t}$$

$$\hat{u}(s,0) = C = \hat{f}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-b^2 s^2 t}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * \frac{1}{b\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4b^2 t}} = \frac{1}{2b\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b^2 t}}\,d\xi$$

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(as)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2b\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b^2 t}}\,d\xi}$$

Hővez 1

tmal 3 12 ... PDE

Hővezetés (kinta)

Megoldandó PDE

$$u'_t = k\, u''_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

feltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$

$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

Elsőrendű ODE (szétválasztható vált-jú)

$$\hat{u}'_t = -ks^2 \hat{u}$$

$$\hat{u}(s,0) = \hat{f}(s)$$

$\Downarrow$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-ks^2 t}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \cdot \hat{g} \Longrightarrow$$

$$u(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(s)\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-ks^2 t}\}$$

$$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(ax)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\, s)^2}{2}} = e^{-kts^2}$$

tehát $\mathcal{F}^{-1}\{e^{-kts^2}\} = \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, dy}$$

$\to$ $E f(\xi)$ ahol $\xi \sim N(x, \sqrt{2kt})$

$\to$ ez a megoldása a PDE-nek!

tehát $u(x,t) = (f * g)(x,t)$; ahol $g(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt\pi}}$

g-re: 1° $\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\, dx = 1 \quad \forall t > 0$

2° $\lim_{t \to 0} g(x,t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow \lim_{t \to 0} g(x,t) = \delta(x)$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{4kt}}}_{g(y,t)}\,dy$$

Hővezetési egyenlet megoldása!

(T) $\boxed{\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)}$

$$\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}}\right)^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = 1 \quad \forall t>0 \text{ ra}$$

Biz 1°

$z = \frac{y}{2\sqrt{kt}}$

$dy = 2\sqrt{kt}\,dz$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(y,t)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\,dy = 1 \quad \forall t>0}$$

$$L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{4kt}} = \infty \quad \text{ha } \underline{y=0}$$

ha $y \neq 0$, akkor:

$$L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{4kt}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\frac{k\pi\cdot h^2 y^2}{4k}}}\,e^{-\frac{y^2}{4k\cdot\frac{h^2\cdot y^2}{4k}}} =$$

legyen $t = \frac{h^2}{4k}\cdot y^2$

$h>0$ ha $t\to 0$ akkor $h\to 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{y h\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{h^2}} =$$

legyen $x = \frac{1}{h}$

$x \to \infty$

$$= \frac{1}{y\sqrt{\pi}}\lim_{x\to\infty} x\,e^{-x^2} = \frac{1}{y\sqrt{\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

Biz 2°

tehát
$$\left.\begin{aligned} L(0) &= \infty \\ L(y) &= 0 \quad \forall y\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} L(y)\,dy &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-\frac{y^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt\pi}} = \delta(y)}$$

tehát $g(y,t)$ a Dirac deltává fajul, ha $t\to 0_+$

Hőveze 2

$u'_t = k\,u''_{xx}$
$u(x,0) = f(x)$
Hővezetés

Hővezetés egyenlete Fourier trafóval (végtelen rúdban)

$$\begin{cases} u'_t = k\, u''_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} \begin{cases} \hat{u}'_t = -k s^2 \hat{u} \\ \hat{u}(s,0) = \hat{f}(s) \end{cases}$$

Fourier trafó tulajdonságai:

$$u'_x \rightsquigarrow is\,\hat{u}$$

$$u''_{xx} \rightsquigarrow -s^2 \hat{u}$$

$$g(\alpha x) \rightsquigarrow \frac{1}{\alpha}\hat{g}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{\beta} g\left(\frac{x}{\beta}\right) \rightsquigarrow \hat{g}(\beta s)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$\boxed{f * g \rightsquigarrow \sqrt{2\pi}\, \hat{f}\cdot\hat{g}}$$

$$\hat{u}(s,t) = C(s)\, e^{-ks^2 t}$$

$$\hat{u}(s,0) = C(s) \overset{!}{=} \hat{f}(s)$$

tehát

$$\boxed{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-ks^2 t}}$$

átírás: $e^{-ks^2t} = e^{-\frac{2kts^2}{2}} = e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\, s)^2}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\, s)^2}{2}}$$

tehát $\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} e^{-ks^2t}$

$$\hat{u}(s,t) = \mathcal{F}\{f\}\cdot \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(x) * \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x}{4kt}}$$

kifejtve:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2kt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\frac{y^2}{4kt}}\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, dy$$

2017

Hővez 2.5

PDE2 hővez

$p \times p$ matrix $R = R(k, \ell)$

Benoit Gatorida
WVYOFU

$$R_{k,\ell} = r(\ell - k), \quad k, \ell = 1 \dots p$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{1-1} & r_{2-1} & \dots & r_{p-1} \\ r_{1-2} & r_{2-2} & & \vdots \\ r_{1-3} & r_{2-3} & \ddots & \vdots \\ r_{1-p} & r_{2-p} & \dots & r_{p-p} \end{bmatrix}$$

$Y = (y_{n-1}, \dots y_{n-p})^T$

$$YY^T = \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \dots & y_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1}^2 & y_{n-1} y_{n-2} \\ y_{n-2} \cdot y_{n-1} & \end{bmatrix}$$

$$y_{k,\ell} = y_{n-k} \cdot y_{n-\ell}$$

$$E(YY^T) = E\, y_{n-k} y_{n-\ell} = r(n - k \cancel{*} - n + \ell) = r(\ell - k)$$

1p

---o---

$y = (y_n)$ complex valued w.s.st. $(-\infty < n < \infty)$

$r^y(\cdot)$ auto-covariance function $= \mathrm{Cov}(y_{n+\tau}, y_n)$

Show: $R = (R_{k,\ell})$, $R_{k,\ell} = r^y(\ell - k)$ $\quad k, \ell = 1 \dots p$ is Hermetian pos. semi-definite Toeplitz

$$R = \begin{bmatrix} r^y(1-1) & r^y(2-1) & \dots & r^y(p-1) \\ r^y(1-2) & r^y(2-2) & r^y(3-2) & \\ r^y(1-3) & & \ddots & \\ r^y(1-p) & & & r^y(p-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0^y & r_1^y & r_2^y & \\ r_{-1}^y & r_0^y & r_1^y & \\ r_{-2}^y & & \ddots & \\ & & & r^y(0) \end{bmatrix}$$

$$r^y(\ell - k) = \mathrm{Cov}(y_{n+\ell-k}, y_n)$$

✓ it is Toepeitz (diagonal-constant matrix)

$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Hermitian ✓

$R_{k,\ell} = r^y(\ell - k) = \overline{r^y(k - \ell)} = \overline{R_{\ell,k}}$

1p

pos. semi-definite: $c \in \mathbb{C}$: $c^T R c \geq 0$ (?)

Konkrét pld:

feladat

$$u'_t = k\, u''_{xx}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \\ e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} = f(x)$$

megoldás

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{kt-x} \operatorname{erfc}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right) = \frac{1}{2} e^{kt-x} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

akkor $\boxed{u(x,t) = \big(f * g(t)\big)(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\, dy =$

$$= \int_{x}^{\infty} e^{-(x-y)} e^{-\frac{y^2}{4kt}} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy$$

(így szem. rossz., de talán egyszerűbb, ha

$$= \int_0^{\infty} e^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\left(y + \frac{(x-y)^2}{4kt}\right)} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy = (*)$$

levezetés a túloldalon!

$y + \frac{(x-y)^2}{4kt} \to$ teljes négyzetté kiemelni y-ra.

$$\left(\frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)^2 - (kt-x)$$

$$(*) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2+(kt-x)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{kt-x} e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2} e^{kt-x} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz}_{\operatorname{erfc}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)}$$

$$z = \frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$dy = 2\sqrt{kt}\, dz$$

$$z_0 = \frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$z_\infty = \infty$$

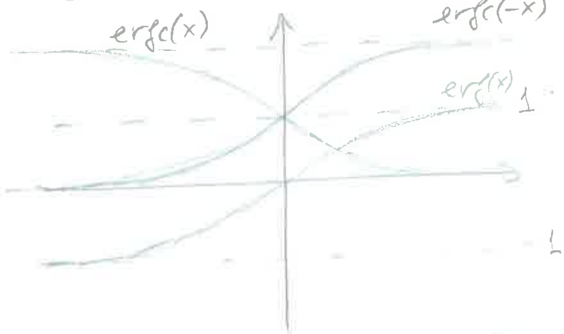
$$= \frac{1}{2} e^{kt-x} \operatorname{Erfc}\left[\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right]$$

ha $x=0$

$$u(0,t) = e^{kt} \operatorname{Erfc}\left[\sqrt{kt}\right]$$

ha $t=0$

$$u(0,0) = e^0 \operatorname{Erfc}[0] = 1$$



$$\boxed{\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2}\, dx}$$

PDE hőmér... szül...

Hőmér 3

$$y+\frac{1}{4kt}(x^2-2xy+y^2)=\frac{1}{4kt}\left(y^2+2(2kt-x)y+(2kt-x)^2-4k^2t^2+4ktx\right)=$$

$$4k^2t^2-4ktx+x^2$$

$$\frac{1}{4kt}\left(4kty+x^2-2xy+y^2\right) \quad = \frac{(y+2kt-x)^2}{4kt}-kt+x$$

$$=\left(\frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)^2-(kt+x) \quad (*)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy=\int_{-\infty}^{0}0\cdot e^{\cdots}dy+\int_0^{\infty}e^{-y}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{kt-x}\,e^{-\left(\frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)^2}dy=2\sqrt{kt}\int_{z_0}^{\infty}e^{kt-x}e^{-z^2}dz=$$

$$\frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}=z$$

$$dy=2\sqrt{kt}\,dz$$

$$z_0=\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$=2\sqrt{kt}\,e^{kt-x}\int_{z_0}^{\infty}e^{-z^2}dz$$

$$=2\sqrt{kt}\,e^{kt-x}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\mathrm{Erfc}(z_0)\right)$$

$$=\sqrt{kt\pi}\,e^{kt-x}\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

2017-ben

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\cdot\sqrt{kt\pi}\,e^{kt-x}\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)\cdot e^{kt-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{kt-x}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)$$

$$\mathrm{Erfc}(z)=1-\mathrm{Erf}(z)$$

$$\boxed{\mathrm{Erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-x^2}dx \qquad \mathrm{Erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-x^2}dx}$$

Normál eloszlással :

$$\circledast = \int_0^\infty e^{kt-x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y+2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)^2} dy =$$

tatás

legyen $z = \dfrac{y+2kt-x}{\sqrt{2kt}}$

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{2kt}}$$

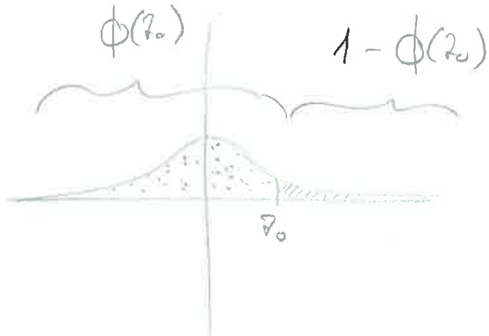
$$y_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{y_0+2kt-x}{\sqrt{2kt}} = \frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}} \qquad y_1 = \infty \Rightarrow z_1 = \infty$$

$$= \int_{z_0}^\infty e^{kt-x} \cdot \sqrt{2kt}\; e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$

$$= e^{kt-x} \cdot \sqrt{2kt} \cdot \sqrt{2\pi} \int_{z_0}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= e^{kt-x} \cdot 2\sqrt{kt\pi} \cdot \left(1 - \phi(z_0)\right)$$

$$= e^{kt-x} \cdot 2\sqrt{kt\pi} \cdot \left(1 - \phi\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)\right)$$



$$\boxed{u(x,t) = e^{kt-x}\left(1 - \phi\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)\right)}$$

tatás

2017
Hévér 3.5

PDE 2017

Hővezetés véges rúdban :

$$\boxed{\begin{aligned} &u'_t = u''_{xx} \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = g(x) \end{aligned}} \longrightarrow u(x,t) = \mathfrak{J}(x)\,\mathcal{T}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathfrak{J}(x)\,\mathcal{T}'(t) = \mathfrak{J}''(x)\,\mathcal{T}(t)$$

$$\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = \frac{\mathfrak{J}''}{\mathfrak{J}} = -s^2$$

I $\boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{J}'' = -s^2 \mathfrak{J} \\ &\mathfrak{J}(0) = \mathfrak{J}(1) = 0 \end{aligned}}$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{J}(x) = A\cos sx + B\sin sx \\ &\mathfrak{J}(0) = \underline{A = 0} \\ &\mathfrak{J}(1) = B\sin s = 0 \Rightarrow s = k\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\mathfrak{J}(x) = B\sin(k\pi x)}$$

II $\boxed{\mathcal{T}' = -(k\pi)^2\mathcal{T}} \Rightarrow \underline{\mathcal{T}(t) = Ce^{-(k\pi)^2 t}}$

a k-adik alapmegoldás :

$$\underline{u_k(x,t) = A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)}$$

általános megoldás
amire: $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \equiv g(x) \Rightarrow A_k = 2\int_0^1 g(x)\sin(k\pi x)\,dx$$

→ ha $g(x) = \sin \pi x \Rightarrow A_1 = 1 \Rightarrow \boxed{u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)}$

$$\left.\begin{aligned} &u'_t = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) \\ &u''_{xx} = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$u(x,0) = \sin(\pi x)$ ✓

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ ✓

speciális eset.

Hővezetés

Hővez 4.

(4) $\boxed{\begin{array}{l} u'_t = u''_{xx} \quad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) = x^2-x \\ u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0 \end{array}}$

$u(x,t) = \xi(x)\tau(t)$

$\xi\tau' = \xi''\tau$

$$\boxed{\frac{\xi''}{\xi} = \frac{\tau'}{\tau} = -s^2}$$

$\xi'_x(0)\tau(t) = \xi'_x(1)\tau(t) = 0 \quad \forall t$

$\Downarrow$

$\xi'_x(0) = \xi'_x(1) = 0$

I $\xi'' = -s^2\xi$

$\Downarrow$

$\xi = A\cos sx + B\sin sx$

$\xi' = -As\sin(sx) + Bs\cos(sx)$

$\xi'(0) = Bs = 0 \Rightarrow B=0$

$\xi'(1) = -As\cdot\sin s = 0 \Rightarrow s = k\pi$

tehát $\boxed{\xi(x) = A\cos(k\pi x)}$

II $\tau' = -(k\pi)^2\tau$

$\boxed{\tau(t) = C e^{-(k\pi)^2 t}}$

alapmegoldás:

$u_k(x,t) = \xi_k(x)\tau_k(t) = A_k\cos(k\pi x)e^{-(k\pi)^2 t}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\cos(k\pi x)e^{-(k\pi)^2 t}}$$ ← áll. megold.

$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\cos(k\pi x) \equiv x^2-x \Rightarrow A_k = 2\int_0^1 (x^2-x)\cos(k\pi x)\,dx$

cos transzf. (köv. oldalon)

Házi 5. | Anal 3 12. gyak PDE

$$2A_k = \int_0^1 (x^2-x)\cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (x^2-x)(\sin k\pi x)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}(x^2-x)\sin(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 (2x-1)(\cos k\pi x)'\,dx =$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{(k\pi)^2}(2x-1)\cos(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^1 \cos k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}\Big(\cos(k\pi) - (-1)\cos 0\Big) - \frac{2}{(k\pi)^3}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi + 1) - \frac{2}{(k\pi)^3}\left(\sin(k\pi) - \cancel{\sin(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi + 1) = \begin{cases} \dfrac{2}{k^2\pi^2} & \text{ha } k \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \Rightarrow A_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2\pi^2}, & k \text{ páros} \\ 0, & \ldots \end{cases}$$

$$A_0 = 2\int_0^1 (x^2-x)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{16\pi^2}\cos(4\pi x) + \ldots$$

$$= -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2}\cos(2k\pi x)$$

tehát $$\boxed{u(x,t) = -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2}\cos(2k\pi x)\, e^{-4k^2\pi^2 t}}$$

ell: $$u(0,t) = -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2} e^{-4k^2\pi^2 t}$$

↳ Szoftverrel le kell ellenőrizni + ábra

+ ZH feladatok mr-a

Analízis III. 13. heti feladatok

2016. december 16.

PDE 4. rész. Hővezetés, folytatás.

1. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:

$$
\begin{aligned}
u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1)\\
u(x,0) &= x^2 - x\\
u'_x(0,t) &= 0,\\
u'_x(1,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

2. Definiáljuk az előző feladathoz kapcsolódóan az *összes hőenergiát*:

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\,dt.$$

$T'(t) = \int_0^1 2uu'_t\,dx = \int 2uu''_{xx}\,dx$

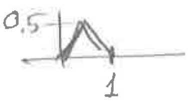
Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz

$$\mathcal{T}(t_1) \ge \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

$$
\begin{aligned}
u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t) \qquad t>0,\ x\in(0,1)\\
u(x,0) &= \begin{cases} x, & x\in[0,1/2)\\ 1-x, & x\in[1/2,1]\end{cases}\\
u'_x(0,t) &= 0,\\
u(1,t) &= 0.
\end{aligned}
$$

$(uu'_x)' = uu''_{xx} + u'_x u'_x$

serfytése a 

4. (a) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az alábbi peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = 0 \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = \sin(2\pi x), \qquad x\in[0,1]$$

(b) Oldjuk meg az INHOMOGÉN hővezetés egyenletét véges rúdban homogén peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = e^{-t}\sin(2\pi x) \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x\in[0,1]$$

Hullámegyenlet.

5. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ahol c adott konstans. Keressük az egyenlet megoldását $F(x+ct) + G(x-ct)$ alakban, ha

(a) $u(x,0) = f(x) \qquad u'_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$ $\Rightarrow \begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = G(x) + C \end{cases}$

(b) $u(x,0) = 0, \qquad u'_t(x,0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}.$

$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)+C}{2} \\ G(x) = \frac{f(x)-C}{2} \end{cases}$

6. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban az alábbi általános peremfeltételekkel:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x).$$

Lássuk be, hogy a D'Alambert formula valóban megoldja a hullámegyenletet:

$$u(t,x) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

deriválással könnyen!

7. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ahol c adott konstans. Az kezdeti feltételek esetén oldjuk meg az egyenletet.

(a) $u(x,0) = f(x) = 1$ ha $|x| \le 1$ egyébként 0, és $u'_t(x,0) = g(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $u(x,0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, és $u'_t(x,0) = 1$ ha $|x| \le 1$ és egyébként 0.

(*) 8. Oldjuk meg a hullámegyenletet végtelen húr esetén az alábbi feltételekkel ($c = 1$ választással):

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x \le 0 \\ 1-2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 0 & x < 0, \ x > 1/2 \end{cases}, \qquad u_t(x,0) = 0$$

Rajzoljuk fel a megoldásfüggvényt (= a húr helyzetét) a $t = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ időpontokban. Mit látunk?

D11* Tekintsük a hővezetés egyenletét véges rúdban homogén *Neumann peremfeltétellel*:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx} \qquad t > 0, \ x \in (0,1), \qquad u(x,0) = f(x),$$

$$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0, \qquad t > 0.$$

(Előadáson elhangzott [illegible])

Igazoljuk, hogy a megoldásfüggvény konstanshoz tart:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \mathcal{T} = \int_0^1 f(x)dx, \qquad \forall x \in (0,1).$$

$$T(t) = \int_0^1 u(x,t)\,dt \qquad \text{FIX}$$

(*) Spec hullám

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$g = 0$

$f = 0$

$g = \begin{cases} 1 & \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Hővezetés egyenlete (energiamegmaradás)

$$\boxed{u'_t = u''_{xx}}$$ $t > 0$, $x \in (0, \ell)$ „ℓ hosszú rúd" homogén sűrűségű

b.c: $u(x,0) = g(x)$

b.c.: $u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0$ „a végeknél nincs hőmozgás => nincs hővezetés"

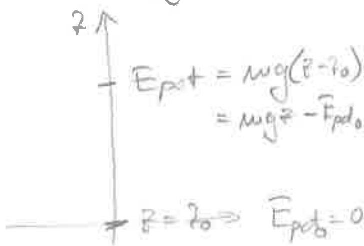
legyen $$\boxed{T(t) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx \; [K]}$$ átlaghőmérséklet.

ha nem lenne homogén: $T = \sum_i m_i T_i = \sum_i \sigma_i T_i \Delta x_i$

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{m} \int_0^\ell \sigma(x)\, u(x,t)\, dx}$$

$$\ell = \int_0^\ell dx \; ; \quad m = \int_0^\ell \sigma(x)\, dx$$ $[\sigma(x)]_{SI} = \frac{kg}{m}$ „hossz menti sűrűség"

A hő(energia) pont úgy, mint a potenciális energia, függ attól, hogy hol definiálom a 0-potenciált.



$$\boxed{Q = c \cdot m \cdot \Delta T} = \underline{c \cdot m \cdot T - Q_0}$$

Kelvinben adott.

Legyen Q_0 : a $T = 0K$ (abszolút nulla fokos test hőenergiája)

vagy Legyen Q_0 : ha $T = 273.15\,K = 0\,°C$

$[c]_{SI} = \frac{J}{kg \cdot K}$

$$Q(t) = c \cdot m \cdot T(t) - Q_0 = \frac{cm}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx - Q_0$$

$$Q(t) = \frac{cm}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx - Q_0$$ (homogén test)

$$Q(t) = c \int_0^\ell \sigma(x)\, u(x,t)\, dx - Q_0$$ (ha homogén test)

} energia dimenziójú [Joule]

13. hét.
Hővezetés, PDE hőenergia.

Lényeg: $Q(t) \sim$ „$T_1(t)$"
hő(energia)

$\hookrightarrow T_1(t) = \int_0^l u(x,t)\,dx$

Hőmennyiségváltozás az idő során a kiindulási hőhöz képest (*)

tfh. $\boxed{u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0}$

$$T_1'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^l u(x,t)\,dx = \int_0^l u'_t(x,t)\,dx \overset{PDE}{=} \int_0^l u''_{xx}(x,t)\,dx =$$

$$= u'_x(x,t)\Big|_{x=0}^{l} = -u'_x(0,t) + u'_x(l,t) = 0$$

tehát $T_1(t)$ időben NEM változik, vagyis a hőmennyiség állandó a homogén sűrűségű rúd mentén.

Legyen $T_2(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx \not\sim Q(t)$ (ez nem igazi energia)

$$T_2'(t) = \int_0^l 2u\,u'_t\,dx \overset{PDE}{=} 2\int_0^l u\,u''_{xx}\,dx = 2u\,u'_x\Big|_0^l - 2\int_0^l (u'_x)^2\,dx =$$

$$= -2u(0,t)\underbrace{u'_x(0,t)}_{=0} + 2u(l,t)\underbrace{u'_x(l,t)}_{=0} - 2\int_0^l u'^2_x\,dx =$$

$$= -2\int_0^l u'^2_x\,dx < 0 \quad \text{mert } u'_x \not\equiv 0$$

(*) Ebben az esetben hasznos, ha
$$Q_0 = \frac{cm}{l}\int_0^l u(x,0)\,dx = \frac{cm}{l}\int_0^l g(x)\,dx$$

Inhomogén hővezetés egyenlet

$$\begin{cases} u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t) + \underbrace{e^{-t}\sin(2\pi x)}_{\text{gerjesztés}} = f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Megoldás : Duhamel's principle

legyen : $v(x,t,\tau)$: $\begin{cases} v'_t = v''_{xx} & t \geq \tau \\ v(x,0,\tau) = f(x,\tau) \end{cases} \qquad (2)$

Peremfelt : $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0$

$v(0,t,\tau) = v(1,t,\tau) = 0 \quad \forall t > \tau \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$

$$v = \underbrace{f(x)g(t)}_{\tau \text{ is lesz benniük valószínűleg}} \Rightarrow fg' = f''g \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{f''}{f} = -s^2$$

I $\quad f'' = -s^2 f$

$f(0) = f(1) = 0$

$\Downarrow$

$f(x) = A\sin sx + B\cos sx$

$f(0) = \underline{B = 0}$

$f(1) = A\sin s = 0 \Rightarrow \underline{s = k\pi}$

$\boxed{f(x) = A\sin(k\pi x)}$

II $\quad g' = -(k\pi)^2 g$

várhatóan $\lim_{t\to\infty} g(t) < \infty$

$g(t) = Ce^{-(k\pi)^2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ✓

alapmegold : $v(x,t,\tau) = f(x)g(t)$

$v_k(x,t,\tau) = A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)$

$$v(x,t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)$$

$\downarrow t = \tau$

$$v(x,\tau,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 \tau}\sin(k\pi x) = f(x,\tau)$$

$f(x,\tau)$-t szinuszosan sorbafejtem $\Rightarrow A_k = \ldots$

— folyt. hőv. old. —

13. hét

2016 PDE inhom hővezetés

$$v(x,\tau,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2\tau}\sin(k\pi x) = \underbrace{e^{-\tau}\sin(2\pi x)}_{=f(x,\tau)}$$

$$\Downarrow$$

$$A_2 = \frac{e^{-\tau}}{e^{-(2\pi)^2\tau}} \quad ; \quad A_{k\neq 2} = 0$$

tehát

$$\boxed{v(x,t,\tau) = e^{(4\pi^2-1)\tau}\, e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)}$$

Ez a homogén egyenlet megoldása (2)-nek

Ell: $v'_t = -4\pi^2 v$

$v'_x = 2\pi(\ \cos 2\pi x)$

$v''_{xx} = (-2\pi)(2\pi)v$

$v'_t = v''_{xx}$ ✓

$v(x=0|1, t, \tau) = 0$ ✓

$v(x,\tau,\tau) = e^{(4\pi^2-4\pi^2-1)\tau}\sin(2\pi x) = e^{-\tau}\sin(2\pi x) = f(x,\tau)$ ✓

Duhamel's princ:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\int_0^t e^{(4\pi^2-1)\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\frac{1}{4\pi^2-1}\left(e^{(4\pi^2-1)t} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\underbrace{\left(e^{-t} - e^{-4\pi^2 t}\right)}}$$

Ez a megoldása az inhomogén egyenletnek! (1)-nek.

Ell: $u'_t = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(-e^{-t} + 4\pi^2 e^{-4\pi^2 t}\right)$

$-u'_{xx} = +4\pi^2\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(e^{-t} - e^{-4\pi^2 t}\right)$

$(4\pi^2-1)\cdot\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}e^{-t}$ ✓

$u(x,0) = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(e^0 - e^0\right) = 0$ ✓

$u(x=0|1, t) = 0 \quad \forall t > 0$ ✓

Inhomogén hővezetés egyenlete

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = g(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} v'_t - v''_{xx} &= 0 \\ v(x,0) &= f(x) \end{aligned} \quad (2)}$$ homogén

$\searrow$

$$\boxed{\begin{aligned} w'_t - w''_{xx} &= g(x,t) \\ w(x,0) &= 0 \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (3)}$$

legyen $\omega(x,t,\tau)$ ü.h.

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega'_t - \omega''_{xx} = 0 \\ &\omega(x,\tau,\tau) = g(x,\tau) \\ \text{és } &\omega(0,t,\tau) = \omega(1,t,\tau) = 0 \end{aligned} \quad (4)}$$

$$\boxed{\text{Állítás: (3) megoldása } w(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau)\,d\tau}$$

Biz

$$w'_t = \omega(x,t,t) + \int_0^t \omega'_t(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$w''_{xx} = \int_0^t \omega''_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$w'_t - w''_{xx} = \underbrace{\omega(x,t,t)}_{\substack{g(x,t) \\ \text{(4.2) miatt}}} + \int_0^t \underbrace{(\omega'_t - \omega''_{xx})}_{=0 \text{ mert megoldása (4)-nek}}(x,t,\tau)\,d\tau$$

Electromágneses hullám egyenletének levezetése a Maxwell egyenletekből (vákuumban)

A Maxwell egyenletek differenciális alakja:

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

vákuumban - nincs áram (nem folyik áram) - nincs töltés

vagyis $J = 0$

$\rho = 0$

$$\Downarrow$$

$$\nabla E = 0$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ismert összefüggés:

$$\underline{u} \times \underline{v} \times \underline{w} = u\langle v, w\rangle - \langle u, v\rangle w$$

Így $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\cancel{\nabla E}) - (\nabla \cdot \nabla) E$

$$= -\Delta E$$

tehát $\Delta E = -\nabla \times (\nabla \times E) = +\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \frac{1}{c^2}}$$ ahol $\cancel{c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

$$\varepsilon_0 \cong 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$\mu_0 \cong 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$$

$$c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 300.000 \frac{km}{s} = 3e8 \frac{m}{s}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$$

13. gyak.

PDE hullámegy.
Levezetés Maxwell

1) Laplace (Elliptikus)
2) Hővezetés (Parabolikus)
3) Hullámegyenlet (Hiperbolikus)

} $\forall$ másodrendű PDE visszavezethető ezek valamelyikére

Hullámegyenlet

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u'_t(x,0) = g(x)$$

ahol f, g abszolút integrálhatóak.
(bár erre nincs szükség)

legyen $\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2c} \end{cases}$

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

$$v'_\xi = \frac{1}{2}u'_x + \frac{1}{2c}u'_t$$

$$v''_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u''_{xx} - \frac{1}{2c}u''_{tx}\right) + \frac{1}{2c}\left(u''_{tx}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2c}u''_{tt}\right) = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{u''_{xx} - \frac{1}{c^2}u''_{tt}}_{0}\Big) = 0$$

hullám egy.

ezért $v'_\xi(\xi,\eta) = F_0(\xi)$ (nem függ η-tól)

$$v(\xi,\eta) = \int F_0(\xi)\,d\xi = F(\xi) + G(\eta)$$

ezért $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

Formalizmus:

$L[u] = 0$ ahol $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$

tehát $L = L_1 \cdot L_2$

$L[u] \Leftrightarrow \begin{cases} L_1[u] = 0 \\ \text{vagy} \\ L_2[u] = 0 \end{cases}$ ← transzport egyenletek!

2017
Hullámegyenlet
∞ RÚDBAN

PDE 3

legyen $v(x,0) = f(x)$
$v'_t(x,0) = 0$

$$v(x,t) = F_1(x+ct) + G_1(x+ct)$$

$$w(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

$w(x,0) = 0$
$w'_t(x,0) = g(x)$

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

Véges húrban

$u''_{tt} = u''_{xx}$
$u(x,0) = f(x)$
$u'_t(x,0) = g(x)$
$0 < x < 1$

Dirichlet feltétel:
$u(1,t) = u(0,t) = 0$

vagy:
Neumann felt:
$u'_x(1,t) = u'_x(0,t) = 0$

Hullámegyenlet véges rúdban

Neumann feltétel: $u'_x(0,t)=0$, $u'_x(\pi,t)=0$

azaz a végén elengedjük

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}u''_{tt} = u''_{xx} \\ &\left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ u'_t(x,0) &= g(x)\end{aligned}\right\} (*) \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{aligned}}$$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \longrightarrow$ Dirichlet feltétel

legyen
$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$
$$u(x,0) = X(x)\,T(0) = f(x)$$
$$u'_t(x,0) = X(x)\,T'(0) = g(x)$$
$$\left.\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)\,T(t) = 0 \\ u(\pi,t) &= X(\pi)\,T(t) = 0 \end{aligned}\right\} X(0) = X(\pi) = 0$$

Egyenlet: $$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -k^2$$

$$\text{I}\quad \boxed{\begin{aligned} X'' &= -k^2 X \\ X(0) &= X(\pi) = 0 \end{aligned}}$$

$$\text{II}\quad \boxed{T'' = -(kc)^2\,T}$$

$$T(t) = C\cos(kct) + D\sin(kct)$$

$$X(x) = A\sin(kx)$$

$$\boxed{u_k(x,t) = \sin(kx)\left[A_k\cos(kct) + B_k\sin(kct)\right]}$$

alapmegoldás!

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left[A_k\cos(kct) + B_k\sin(kct)\right]$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(kx) \overset{!}{=} f(x) \Longrightarrow \boxed{A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx}$$

$$u'_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left[-kcA_k\sin(kct) + kcB_k\cos(kct)\right]$$

$$u'_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot c\cdot B_k\sin(kx) \overset{!}{=} g(x) \Longrightarrow \boxed{B_k = \frac{1}{k\cdot c}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx}$$

(*) azért lehet két feltétel $(x,0)$-ra mert nincs peremfeltétel (x,∞)-re

2017

PDE3

PDE
hullámegy.
véges rúdba

3D-ben?

$$\frac{1}{c^2}u''_{tt} = u''_{xx} + u''_{yy} \qquad \text{legyen} \quad u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$$

$$\frac{1}{c^2} X\,Y\,T'' = X''\,Y\,T + X\,Y''\,T$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{T''}{T} = \frac{X''Y + XY''}{XY} = -\alpha^2$$

általában $u(x,y,t) = \varphi(x,y)\,T(t)$

$$\frac{1}{c^2}\,\varphi\, T'' = \varphi''_{xx}\,T + \varphi''_{yy}\,T$$

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{T''}{T} = \frac{\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}}{\varphi} = -\alpha^2$$

I $\quad T'' = -(\alpha c)^2\, T$

II $\quad \boxed{\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} = -\alpha^2 \varphi}$

$$\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = -\alpha^2 XY$$

$$X''Y + \alpha^2 XY = -XY''$$

$$\left[X'' + \alpha^2 X\right] Y = -XY''$$

$$\frac{X'' + \alpha^2 X}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

II.1 $\quad X'' + \alpha^2 X = \lambda X$

II.2 $\quad Y'' = -\lambda Y$

Vektormező jelölés: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

vektormezőket nagy betűvel jelöljük

Jelölés „$\frac{\partial F}{\partial x}$" $= \boxed{DF}$

Def: F derív. ha $\forall f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható

$\Updownarrow$

Def: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffható $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ha $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = A \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

vagyis $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - A \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = 0$

$$DF(x_0) = A$$

Lánc: $D(F \circ G)(x) = D(F(G(x))) = DF(G(x)) \cdot DG(x)$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tfh. $\exists F^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffható

$$DF^{-1}(F(a)) = (DF(a))^{-1}$$

(M) F vektormező, ami diff $a \in \mathbb{R}^n$-ben és annak környezetében

$\Updownarrow$

$DF(a)$ teljes rangú

Anal 3. ea.
1.
09.1?
2016

pld: $F(r) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

↳ ennek minden pontjában
z szerint rotálódik és mindenhol egyformanagyra.

---

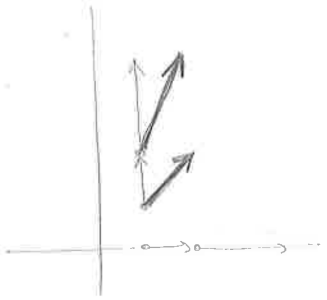
angolban $\boxed{\text{curl} = \text{rot}}$

Vektormező: → áramlás :
→ erőtér
→ elektromos tér : $\nabla B = 0$
→ mágneses tér

Skalármező: → potenciál

---

legyen pld: $F(r) = (x \ \ y^2 \ \ 0) \rightsquigarrow \nabla F(r) = 1 + 2y$



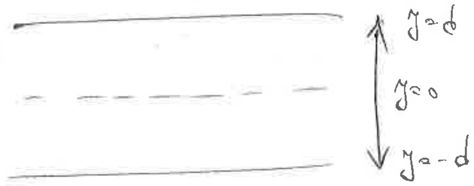
legyen pld: $\vec{E} = k_e \frac{Q}{\|r\|^3} \vec{r} = k_e Q \left(x^2 + y^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = k_e Q \left(-\frac{3}{2}\right) (x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}} 2x^2 + k_e Q (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$=$

Folyó áramlása:

$F(x,y,z) = \left[v_0 \left(1 - \frac{y^2}{d^2}\right), 0, 0 \right]$



$\nabla \times F = \left(0, 0, \frac{2}{d^2} y\right)$

legyen $F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\text{div } F = 1 + 1 = 2$

legyen $F(x,y) = \frac{1}{(}$

„$\vec{F}$ cirkulációja": $\oint \vec{F}\, d\vec{l}$

Felületintegrál

Def: (Felület)
$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ típusú fv
$D \subset \mathbb{R}^2$
$S: \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \} \subset \mathbb{R}^3$

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Def: S sima (diffható), ha $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diffható

Spec. eset:
$x(u,v) = u$
$y(u,v) = v$
$z(u,v) = f(u,v)$

pld: egységgömb felülete
(gömbi polárkoordinátákkal)
$u \sim \theta$
$v \sim \varphi$ (z tengellyel bezárt szög)

$$\begin{cases} x(u,v) = \sin v \cos u \\ y(u,v) = \sin v \sin u \\ z(u,v) = \cos v \end{cases}$$

$D: [0,2\pi) \times [0,\pi]$

Adott $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező

$$\text{"}\iint_S f(x,y,z)\, dS\text{"} = \iint_D f(s(u,v)) \cdot |S'_u \times S'_v| \, d(u,v)$$

Jelentés: S'_u és S'_v = az érintő sík kifeszítő bázisvektorai

$S'_u \times S'_v \equiv$ normálvektora

$\boxed{\text{az integrál értéke független } S \text{ paraméterezésétől}}$

Anal 3
2. előadás
2016.03.

Spec. eset: $S = \{ (u, v, f(u,v)) : (u,v) \in D \}$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D \underbrace{f(u, v, f(u,v))}_{\text{sűrűségfv.}} \underbrace{\sqrt{1+f_u'^2+f_v'^2}}_{\text{felület nagysága}}\, d(u,v)$$

A vektorokat $\underline{n}$ így jelöli!

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$S \subset \mathbb{R}^2$

Def: F FLUXUSA-a:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{egységnyi normálvektor}}\, dS \overset{\text{jel}}{=} \iint_S F\, d\underline{S}$$

pld 1. $F(x,y,z) = \underline{r}$

S gömbfelület: R sugarú gömb.

$\Phi = \iint_S F\, d\underline{S}$ $\qquad \underline{n} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\langle F, n \rangle = (x,y,z) \cdot \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R$$

$$n = \iint_S R\, dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

pld 2 $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S =$ 

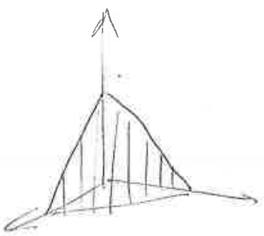
$S \perp F(x,y,z) \Rightarrow \Phi = 0$

---

pld 3. $F = \underline{i}$

$S = \{ x+y+z = 1$, az első térnyolcadba eső rész$\}$

$S(u,v) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$



$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Megj Fluxus a síkon: $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

sima görbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \underline{n}$ normálvektor

$$\Phi = \int_\Gamma F \cdot \underline{n}\, dl$$

Felületi integrál és vektortér potenciálok

Newton Leibniz formula:

$f: [a,b] \to$ diff.ható (folytonosan)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

(T) Divergencia tétel (Gauss – Osztrogradszkij)

Adott $M \subset \mathbb{R}^3$ korlátos térrész

Tfh. ∂M felület (sima felület)

Adottak $\underline{n}$ felület normálvektorok.

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffható folytonosan

$$\iiint_M \nabla F(x,y,z)\, d(x,y,z) = \oint\!\!\oint_{\partial M} F \cdot \underline{n}\, dS$$

Biz: $F = (f_1\ f_2\ f_3)^T$

$$\iiint_M \left(f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z}\right) d(x,y,z) = \oint\!\!\oint_{\partial M} \left(f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3\right) dS$$

Tagonként igazoljuk

$$\iiint_M f'_{3z}\, d(x,y,z) = \iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS$$

Tfh. M egy egyszeresen összefüggő térrész

$$\partial M = \begin{cases} \partial M_{top} & n_3 > 0 \\ \partial M_{side} & n_3 = 0 \\ \partial M_{bottom} & n_3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{j.o.} = \iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \overbrace{\iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS}^{①} + \overbrace{\iint_{\partial M_{bottom}}}^{②}$$

$$\text{tfh. } \partial M_{top} = \{(x, y, t(x,y)) \mid x, y \in D\}$$

(ugyanúgy)

$$① = \iint_D f_3(x,y,t(x,y))\, d(x,y)$$

$$② = -\iint_D f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

MINT:

$$M = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ b(x,y) \le z \le t(x,y)\}$$

$$\iiint_M d(x,y,z) = \iint_D \int_{b(x,y)}^{t(x,y)} f'_{3z}\, dz\, d(x,y)$$

$$= \iint_D \left(f(x,y,t(x,y)) - f(x,y,b(x,y))\right) d(x,y)$$

| Gauss Osz. BIZ.

Anal 3.
2. előadás
2016.09.30

Tfh. F vektorpotenciálos vagyis $\exists G$ ú.h. $F = rot(G)$

$$div(F) = div(rot(G)) = 0$$

Ekkor

$$\oiint_{\partial M} F \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_M div(F)\, dV = 0$$

tehát ha vektorpotenciálos, akkor: $\oiint_S F \underline{n}\, dS = 0 \quad \forall\ S$ sima, zárt felü

Lehet-e M lyukas: tórusz ✓ ∂M egy felülettel megadható

Gömbhéj esetén: $S_{R_1R_2} = S_{R_1} \setminus S_{R_2}$

$S_{R_1R_2}$

$$\iint_{S_{R_1R_2}} F\, \underline{n}\, dS = \oiint_{S_{R_1}} F\, d\underline{S} - \oiint_{S_{R_2}} F\, d\underline{S}$$

$$div(rot F) = \nabla(\nabla \times F) = \begin{vmatrix} \nabla \\ \nabla \\ F \end{vmatrix} = 0$$

tehát $\boxed{\vec{a}^T(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \\ \vec{c}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \text{determináns!}}$

G-O. 2D-ben: $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

$$div\, F(x,y) = P'_x + Q'_y$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ korlátos ∂M: zárt görbe, 1D. sokaság

$\underline{n} \perp \partial M$-re

∂M: pozitív irányítás: balra van a közrezárt terület.

$$\int_{\partial M} P(x,y)\, dy - Q(x,y)\, dx = \iint_M P'_x + Q'_y\, d(x,y)$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S F(x,y,z)\, d\underline{S} = \iint_D \langle F(s(u,v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u,v)$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{\underline{S}} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$$

Skalármező felületi integrálja

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(s(u,v)) \cdot \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v)$$

Egy rövid példa

$F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad S =$ egységgömb felső fele (a sugarú)

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta \sin\varphi \\ a\cos\vartheta \cos\varphi \\ a\sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$s'_u \times s'_v = \Big(a$

$$n = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\langle F, n \rangle = \frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2) = a$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = a \iint_S dS = a \cdot A$$

A ↳ félgömb felülete

Másik pld

$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k$; $S =$ hengerfelület egy darabja:

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 1\}$

$$n = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = 0$$

tehát $\iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = 0$

(T) Gauss - Osztrogradszkij / Divergencia tétel

$M \subset \mathbb{R}^3$ térrész amelynek határa ∂M sima felület.

$F: R \to \mathbb{R}^3$ $M \subset R \subset \mathbb{R}^3$ diff-ható vektormező

akkor: $$\oiint_{\partial M} F(x,y,z)\, d\underline{S} = \iiint_M \operatorname{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Biz Spec eset: M = normáltartomány

$$\oiint_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)\, dS \overset{?}{=} \iiint_M (f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z})\, d(x,y,z)$$

tagonként egyenlőek.

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \iiint_M f'_{3z}\, d(x,y,z)$$

EZT a BIZONYÍTÁST ÁT KELL VENNI!

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D,\ b(x,y) \le z \le t(x,y) \}$$

Stokes T:

$$\iint_M F\, dS = \oint_{\partial M} \mathrm{rot}\, F\, d\vec{l}$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ felület

∂M sima görbe

$\underline{n} \perp M$

T érintővektor ∂M-nek

} kompatibilisek

ha F vektorpot: $\nabla F = 0$

$$\boxed{\iint_M \overset{rot(F)}{F} \cdot \underline{n}\, dS = \oint_{\partial M} \underbrace{\overset{F}{\cancel{rot(F)}} \cdot \underline{T}\, dl}_{\text{cirkuláció}}}$$

Pl:

JO: $\oint_{\partial M} F\, T\, dl = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt =$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = -\pi$$

Green Tétel

Adott $D \subset \mathbb{R}^2$ kor. terület

C zárt görbe: $C = \partial D$

$P, Q : D \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\iint_D Q'_y - P'_x\, d(x,y) = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy}$$

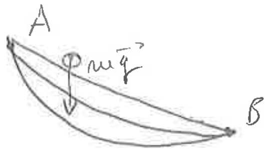
Anal. 3. ea.

2016.09.27

Variációszámítás

Bernoulli probléma (1696) — Brachistochrone

①

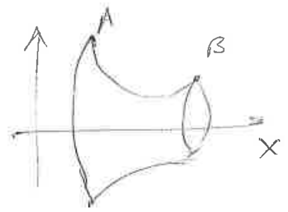


Egy anyagi pont melyik görbe mentén ér el A-ból B-be a legrövidebb idő alatt.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-y_0}}\, dx \quad (\text{ebben a konkrét esetben})$$

(cikloid ív)

②



Forgástest felszín minimalizálása.

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx$$

(láncgörbe)

tehát $\min\limits_{\substack{y(x) \\ y(x_1)=y_1 \\ y(x_2)=y_2}} S(y)$

③ $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid G(x,y,z) = 0\}$

$P_0, P_1 \in \mathcal{F}$

$\Gamma : \gamma[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^3$ $\quad \gamma(t_0) = P_0$

$\gamma(t_1) = P_1$

$G(\gamma(t)) = 0 \quad (\gamma(t) \in \mathcal{F})$

$\gamma(t)$ hossza minimális.

Vagyis $\min \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

Anal 3 e.a.
4. hét
Variációszámítás

Alapfeladat:

Def: Adott egy $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ rögzített pont.

Megengedhető függvények:

$$\mathcal{C} = \{ \phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \text{, kétszer f. diffható} ; \phi(x_0) = y_0 ; \phi(x_1) = y_1 \}$$

Speciális funkcionál: $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx$$

3 vált., 2 szer diffható

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi)$$

Szükséges feltétel:

Tfh. $u \in \mathcal{C}$ optimális: $\min = I(u)$

$\mathcal{C}_0 = \{ \eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, kétszer f. diffható, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \}$ → Ez egy vektortér

$\forall \eta \in \mathcal{C}_0 : \quad I(u) \le I(u + \eta)$ → fixáljuk le η-t (tetszőleges)

$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon \eta)$ → nullában lokális minimuma. $G'(0) = 0$

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = I'(u + \varepsilon\eta) \cdot \eta$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \nabla F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ \eta' \end{pmatrix} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta') \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, \eta'\, dx = 0$$

$$\frac{dG(0)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, u')\, \eta + \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u, u')\, \eta'\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u} \eta\, dx + \cancel{\left. \frac{\partial F}{\partial u'} \eta \right|_{x_0}^{x_1}} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} \cdot \eta\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \eta\, dx = 0$$

nullának kell lennie $\forall \eta \in \mathcal{C}_0$
ez csak akkor lehetséges, ha

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

Lemma Ha valamely $C(x)$ függ

$$\int_{x_0}^{x_1} C(x)\,\eta(x)\,dx = 0 \qquad \forall\ \eta(x_0)=\eta(x_1)=0$$

η folyt

Akkor $C(x) \equiv 0$

Köv: az optimális u fv-re teljesül:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \qquad \text{Euler egyenlet}$$

$$L[u] = 0 \qquad \text{Euler operátor}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = \nabla \frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

Példa: adott (x_0, y_0), (x_1, y_1) őket összekötő egyenes legrövidebb.

$$\gamma(t):\quad \int_{P_0}^{P_1} |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_{x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

$$I(\phi) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\phi'(x)^2}\,dx$$

$$F(x,\phi,\phi') = F(x,u,u') = \sqrt{1+u'(x)^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial u}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\frac{2u'(x)}{2\sqrt{1+u'(x)^2}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}} = 0 \quad \Big|\int_{x_0}^{x_1} dx \implies \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}} = \text{konst} \implies u'(x) = C$$

$$u(x) = Cx + D$$

$$\cancel{\left.\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}}\right|_{x_0}^{x_1} = x_1 - x_0 \implies \frac{u'(x_1)}{\sqrt{1+u'(x_1)}} - \frac{u'(x_0)}{\sqrt{1+u'(x_0)}} = x_1 - x_0}$$

Anal 3 ea.
4. hét
Variációszá...

Spec esetek

(1) $F(x,u,u') = F(x,u) \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u'} = 0$

$\hookrightarrow L[u] = \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0 \rightarrow$ u-ra ez egy implicit függvény

(2) $F(x,u,u') = F(x,u')$

$\hookrightarrow L[u] = -\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u'} = \text{const} \Rightarrow u' = g(x, \text{const})$

(3) $F(x,u,u') = F(u,u')$ energia függvény (leggyakoribb)

$$\hookrightarrow L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \;\cancel{\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u'\partial u} - \partial^2 F}$$

$$f(u,u',u'') = 0 \qquad E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'}$$

$$F'_u - F''_{uu'}u' - F''_{u'u'}u'' = 0$$

$$E = F - u'F'_{u'}$$

$$E(x) = F(x,u,u') - u'F'_{u'}(..)$$

$$\cancel{E'(x) = F'_u \cdot u' + u''F'_{u'} - u'F''_{u'u'} \cdot u''}$$

$$E'(x) = \nabla F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} - u''F'_{u'}(..) - u' \cdot \nabla F'_{u'} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

$$= u'\left(F'_u - F''_{uu'}u' - F''_{u'u'}u''\right) = u' \cdot L[u] = 0$$

vagyis $E(x) = \text{const}$

(2) Minimális forgástest felszíne

$y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ $\qquad \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

$\cancel{F = \sqrt{1+u'(x)^2}}$

$$F(y,y') = y(x)\sqrt{1+y'(x)^2} \Rightarrow F_{y'}' = y\,\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}$$

$$E(y,y') = F(y,y') - y' F_{y'}'(y,y') = y\sqrt{1+y'^2} - y'\left(y\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1+u'^2 - u'^2\right) = C$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = C \Rightarrow u^2 = c^2(1+u'^2)$$

$$\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1} = u' \quad \cancel{\Rightarrow u = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{u^2-c^2}\,dx}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{c^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{u'}{\sqrt{u^2+c^2}}\,dx$$

$$\frac{x-x_0}{c^2} = \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\frac{x-x_0}{c^2} = \operatorname{arch}\left(\frac{u(x)}{c}\right) - \operatorname{arch}\left(\frac{u(x_0)}{c}\right)$$

Anal 3 ea.
4. hét
Variációsz...

Korlátozásos feladat

$$\{G(x,y,z)=0\} = S \subset \mathbb{R}^3$$

Min. hossz. útd.: $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt$

Pl: henger-alapja egységkör

$S \equiv$ palást

$$\gamma(\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$ a két keresett függvény: $\theta(t)$, $z(t)$

Görbe mentén a tér: $\int_0^1 \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt =$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-\sin\theta)^2\cdot\dot\theta^2 + (\cos\theta)^2\dot\theta^2 + \dot z}\,dt = \int_0^1 \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}\,dt$$

$$I(\theta,z) = \int_0^1 \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}\,dt$$

$$F = F(\dot\theta,\dot z) = \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial\dot\theta} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial\dot\theta} = C_1 \Rightarrow \dfrac{\dot\theta}{\sqrt{\dot z^2+\dot\theta^2}} = C_1 \Rightarrow \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial\dot z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial\dot z} = C_2 \Rightarrow \dfrac{\dot z}{\sqrt{\dot z^2+\dot\theta^2}} = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\theta^2 = C_3(\dot z^2+\dot\theta^2) \\ \dot z^2 = C_4(\dot z^2+\dot\theta^2) \end{cases} \Rightarrow \dots \quad \begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + C_5 t \\ z(t) &= z_0 + C_6 t \end{aligned}$$

$\downarrow$

Geodetikus görbék

Ált. eset:

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u', u'')\, dx \quad , \; u: 4x \text{ diffható}$$

min $I(u)$ - t

Szükséges felt.:

$$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, \dots)\, dx \quad \Big| \frac{d}{d\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \cancel{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial u} \eta + \frac{\partial F}{\partial u'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial u''} \eta'' \, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u} \eta \, dx + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \eta - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u'} \dots$$

T $I(u)$ első variációja $= 0$

$$\boxed{L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial u''} = 0}$$

4. od. fokú ODE)

Variációszámítás 3.-rész

Geodetikus görbék: adott egy felület $G(\underline{r}) = 0$

Adott $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$ $\quad \gamma$: legrövidebb görbe

$$I(r) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

$$I(y,z) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$

Mo: felület paraméterezésével

másik típusú korlátozás: Integrál alakú!

$$\boxed{\begin{aligned} &\min I(\phi) \;;\quad \phi \in \mathcal{C} \\ &I(\phi) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \phi, \phi')\, dx \qquad (1) \\ &\text{feltéve: } \int_{x_1}^{x_2} G(x, \phi, \phi')\, dx \end{aligned}}$$

→ Dido hercegnő problémája

$u: [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diffható

$$\boxed{\begin{aligned} &u(0) = u(1) = 0 \\ &\int_0^1 \sqrt{1 + u'(x)}\, dx = L \\ &\min \int_0^1 u\, dx \qquad (2) \end{aligned}}$$

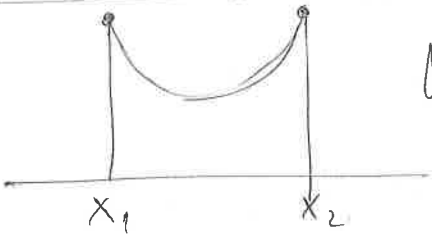
← konkrét pld.

(T) Tfh. u opt. megoldása (1)-nek, akkor az stacionárius megoldása lesz az $(I - \lambda J)(u) = \int_{x_1}^{x_2} (F - \lambda G)(x, u, u')\, dx$ funkcionálnak.

Variációszám 3.
Lagrange mult.
G fel[illegible]

(2)-re: $\quad I - \lambda J = \int_0^1 \left[u - \lambda\sqrt{1+u'^2}\right] dx$

Feladat: Adott két pózna:



L hosszú kábel

$L > x_2 - x_1$

Mi lesz az alakja?

Ahol a potenciális energia minimális.

Sűrűsége: $\sigma \Rightarrow$ Pot energia: $\sigma g \int_\Gamma y\, ds = \underbrace{\sigma g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx}$ minim

s.t.: $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx = L$

Feladat: $I^*(y) = \int_{x_1}^{x_2} (y \pm \lambda)\sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$\boxed{F^*(x,y,y') = (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'(y-\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Izoperimetrikus feladat

→ Adott kerület ⇒ maximális terület
→ Adott terület ⇒ minimális kerület.

} Feladatok egymás DUÁLISAI

Pl. legyen a zárt görbe az origó körül

$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$

kerület: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = K$

$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2 + y^2)\, dt$ (Green T-ből következik)

Stac. pont: (folyt)

Stacionárius pontját keressük:

$$I(x,y) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right)}_{F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})} dt$$

$F - \dot{x}F_{\dot{x}}' - \dot{y}F_{\dot{y}}' = C$
Energia függvény

$$x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{x}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \dot{y}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C$$

$$x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \lambda\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C$$

$x^2+y^2 = C \Rightarrow$ kör

Több dimenziós varszám

Feladat: $D \subset \mathbb{R}^2$

$u: D \to \mathbb{R}$

Mikor lesz u felszíne minimális

$$F = \iint_D \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\, d(x,y) \quad (3)$$

+ boundary condition!

$\mathcal{C}: \{u: D \to \mathbb{R}$, kétszer diffható : $u(x,y) = u_0(x,y)\ \forall (x,y) \in \partial D\}$

↳ Szappanhártya

Általános feladat: $I(u) = \iint_D F(x,y,u,u_x',u_y')\, d(x,y) \to$ min / max $\quad (4)$

$u \in \mathcal{C} \to$ boundary conditions

ahol $F: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

T $u \in \mathcal{C}$ optimális akkor u eleget tesz Euler egyenletnek:

$$L[u] = F_u' - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}' - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}' = 0$$

PDE

Variációszám 3.
Lagrange mult.
6. hét

(3)-ra kapom: (min. felszín)

$$F = \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial u}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y'} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y'}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}} = 0}$$ ← másodfokú PDE

Ha u_x' és u_y' „kicsi", akkor $L[u]=0 \approx \Delta u = 0$
harmonikus fv.

A Laplace egyenlet általában a nyugalmi állapotban lévő fizikai rendszereket írja le.

Alkalmazás

m tömegű l hosszú húr, nyúlik => elkezd rezegni

$\forall t$ időpontban $x \longmapsto u(t,x)$, $x \in [0,l]$

Húr mozgásának egyenlete

Hamilton elve: $\int T - V \, dt \to \min$ (minimal action)

t időpontban a mozgási energia:

$$T = \frac{m}{2l}\int_0^l u_t'^2 \, dx$$

helyzeti energia:

$$V = \tau \int_0^l \left(\sqrt{1+u_x'^2} - 1\right) dx$$

rugalmassági tényező   megnyúlás?

$$\min \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \underbrace{\left(\frac{m}{2l} u_t'^2 - \tau\sqrt{1+u_x'^2} + \tau\right)}_{L(t,x,u,u_t',u_x')} dx\,dt$$

$\downarrow$ Euler

$$u_{tt}'' = \frac{m}{2l}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}$$

$$\boxed{u_{tt}'' \cong \frac{m}{2l} u_{xx}''}$$ Wave eq.

Sokaságok (Th. Garrity 84old és 126old)

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim sokaság $k < n$, ha $\forall p \in M$

$\exists\, \mathcal{U}$ környezet

$\exists\, F : \mathbb{R}^{k} \to \mathbb{R}^{n}$

$\exists\, V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz

Igaz, hogy $F^{-1}(M \cap \mathcal{U}) = V$, vagyis $\boxed{F(V) = M \cap \mathcal{U}}$

F diffható és Jacobi mátrixa teljes rangú

Vagyis a sokaság lokálisan leírható k darab paraméterrel

↳ $\mathbb{R}^k$: paraméter tér

Ezen definíció alapján a sokaság alapvetően nyílt halmaz

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_k} \end{bmatrix} =$$

pld 1 egységkör:

$$M = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$DM = \frac{\partial M}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$ teljes rangú

—— 7. hét ——

DIFFGEO

Cél: Általános Stokes tétel

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega}$$

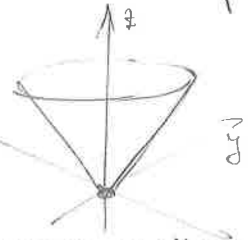
→ differenciál forma

$d\omega$: külső derivált. (valamilyen mérték

pld 2. kúp $\subset \mathbb{R}^3$

$F(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$ → 2 dim sokaság kivéve a $(0,0,0)$-ban

$\nexists\, DF(0,0,0)$



$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix}$$

Differenciálgeo

7. hét

(M) 0-dim. sokaság $\equiv M$ ha $|M|$ véges

Def Sokaság lezárása, határa:

$$M \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n) \subset M, \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$$

↳ lezárt

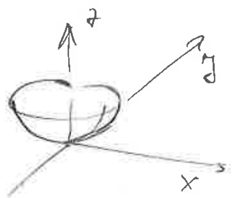
$\partial M = \overline{M} \setminus M$ határa

pld S^1 = egységkör
$\partial S^1 = \emptyset$
és $\overline{S^1} = S^1$

pld: $\cancel{t}:(1,2) \to \mathbb{R}^2$
$r(t) = (t, t^2)$
$M = \{r(t) \mid t \in (1,2)\}$
$\partial M = \{(1,1),(2,4)\}$

$(u,v) \in S^2$ egységkörlap (csak a belseje)

$F(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ $DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$ ✓

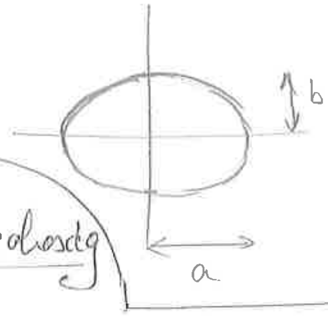
M: 

$F: R \to \mathbb{R}^3$
$R = \{(u,v) \mid u^2+v^2 < 1\}$
2-dim. sokaság

$\overline{M}: M \cup \partial M$; ∂M = vonal
↓ $\partial M = \{\cos t, \sin t, 2\}$
határ körlap

8. heti (első diffgeom)

$\boxed{HF_1}$



I Def: (2.1.1) Paraméteresen megadott sokaság

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim !diffható! sokaság, ha $\forall p \in M$-re $\exists\, \mathcal{U}_p$ környezet amelyre megadható egy diffható paraméterezés.

Vagyis $\forall p \in M$-re $\exists\, \mathcal{U}_p$ környezet

$\exists\, \Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható leképezés

$\exists\, V_p \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, hogy $\boxed{\Phi(V_p) = \mathcal{U}_p \cap M}$

és $D\Phi$ Jakobi mátrix teljes rangú

↳ ennek alapján igazoljuk hogy az ellipszis 1.-dim. sokaság.

tehát: „M = ellipszis" $\exists\, \mathcal{U}_p \subset \mathbb{R}^2$ környezet úgy, hogy:

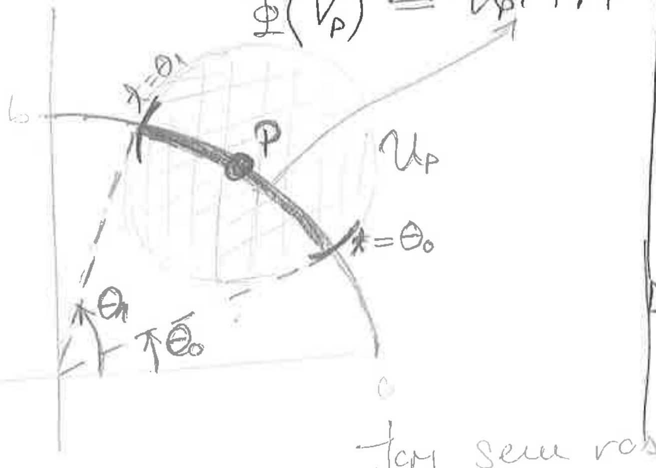
$\forall\, p \in M \cancel{\setminus \{(a,0)\}}$-ra

$\exists\, \Phi(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ diffható, $D\Phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}}$ teljes rangú $\forall\, t \in V_p = (\theta_0, \theta_1)$

$\exists\, V_p = (\theta_0, \theta_1) \subset (0, 2\pi + \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$

és valóban $\Phi(t)$, $t \in (0, 2\pi)$ az ellipszis pontjait adják, vagyis

$\Phi(V_p) = \mathcal{U}_p \cap M$



ha $p = (a, 0)$, akkor
$\exists\, \mathcal{U}_p$
$\exists\, \Phi(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ diffható

$\exists\, V_p \subset (0, 2\pi)$

$D\Phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix}$ teljes rangú $\forall t \in V_p$

Így sem rossz CSAK redundáns!

Anal 3 8. heti gyak

HF_1 -|-

(folyt)

II Def. 2.1.8 Implicit megadású sokaság

$M \in \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság, ha megadható $n-k$ db n változós függvény zérushelyeként, vagyis $\exists\, g_1, \dots, g_{n-k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diffható fv-ek amelyekre:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\}$$

másképp:

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; g_i(x) = 0 \ \forall\, i = \overline{1, n-k} \ (i = 1, \dots, n-k)\right\}$$

És $Dg = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k} \end{pmatrix}$ teljes rangú!

Ennek a megadással biz. be, hogy az ellipszis sokaság (1-dim)

$\mathbb{R}^2$-ben vagyunk $(n=2)$, 1-dim $(k=1)$ $\Longrightarrow$ 1 db implicit fv. kell $(n-k=1)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ $\longrightarrow$ előtanulmányaink alapján

$\hookrightarrow g_1(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \longrightarrow$ diffható

$Dg = \nabla g_1 = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix} \longrightarrow$ 1 rangú, nyilván teljes rangú!

Pl. Projektív terek.

$$\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$$

$r_1=(x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2)=r_2$ ha $\exists\, \lambda\in\mathbb{R}$ $\; r_1=\lambda r_2$

$P^2 = \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/_\sim \;\equiv\;$ 2 dim sokaság

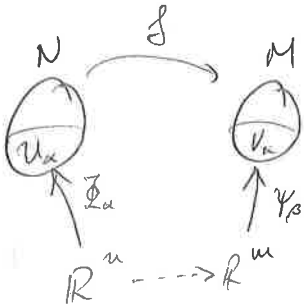
(Jegyzet + gyakorlat)

$P^n = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/_\sim$ → ekvivalencia osztályok halmaza

Projektív sík.

(M) Kitekintés: Adott két sokaság: N, M alterekkel

$f: N\to M$ diff-e?



(U_α, Φ_α) N-beli

(V_β, ψ_β) M-beli

$$\psi_\beta^{-1}\circ f\circ \Phi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$\mathbb{R}^n$-beli sokaság

Ha $M\subset\mathbb{R}^n$ k-dim. sokaság $\forall p$-ben T_p: k-dim. altér
N_p: n-k-dim altér

Def: M: k dim. sokaság, ha $\forall p\in M$ $\exists\, U$ $\exists$ n-k db fv. $g_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diffható és ΔS teljes rangú (gradiensek lin. függ.)

$$M\cap U = \{x\in\mathbb{R}^n \mid g_j(x)=0 \;\; \forall j=\overline{1,n-k}\}$$

↳ Sokaság implicit megadása

Pld: S^1 esetén: $\varphi(x,y) = x^2+y^2-1$

$$M = \{(x,y) : \varphi(x,y) = 0\}$$

$$\nabla\varphi = (2x, 2y)$$

Áll: $N_p = \{\nabla\varphi_j : j = \overline{1,k}\}$

↳ kifeszített altér

Ugyanis itt szorzatvonalak vannak!

Egy adott $\varphi(x) = 0$ egy $n-1$ dimenziós sokaság, itt a normálvektor egyértelmű: $\nabla\varphi(x)$

Irányítás $\equiv N_p$ (T_p)

Def: egy vektortér irányítása!

V tér bázisa: $(v_1, , v_n)$

$(w_1, .., w_n)$

$\exists A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ úh. $v_i = Aw_i$

$\det A \neq 0$

Bázisok két osztályra, két ekvivalencia osztály.

$$[v] = \{w \in R^{n\times n} \mid \text{ha } v = Aw,\ \det(A) > 0\}$$

Mérték M-en: k-dim. sokaság

Vonal integrál:

$$\int_\Gamma f(r)\,d\ell = \int_\Gamma f(r)\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\int_\Gamma F(r)\,d\underline{\ell} = \int_\Gamma F(r)\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$$= \int_\Gamma \underbrace{F_1(r)\,dx + F_2(r)\,dy}_{\omega} \quad \cancel{\text{Stokes}}$$

$$\cancel{= \int_{\partial\Gamma} d(F_1(r)\,dx + F_2(r)\,dy)}$$

$$\boxed{d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(dx_i \wedge dx_I)}$$

ha $\omega = f\,dx_I$

$$\boxed{d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I}$$

ezt nem értem!

ha $\omega = f\,dx + g\,dy$

$$d\omega = f'_x\,dx\wedge dx + f'_y\,dy\wedge dx + g'_x\,dx\wedge dy + g'_y\,dy\wedge dy =$$

$$= (g'_x - f'_y)\,dx\wedge dy$$

Tehát: $\int_{\partial\Gamma} d(f\,dx + g\,dy) = \underbrace{\int_{\partial\Gamma} (g'_x - f'_y)\,dx\wedge dy}$

ezt hogy kell értelmezni?

$$\cancel{\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} f}$$

$$\omega: \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R} \quad \Rightarrow (v_1,\dots,v_k) \mapsto |v$$

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ k-formák vektortere

↳ wedge

bázist alkotnak az elemi k-formák

$$\dim\left(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\right) = \binom{n}{k}$$

$$\tau = \bigwedge_{i=1}^{k} dx_{\sigma_i}, \quad \lambda = \bigwedge_{j=1}^{k} dx_{\rho_j} \Rightarrow \tau\wedge\lambda = \bigwedge_{j=1}^{k} dx_{\sigma_j} \wedge \bigwedge_j dx_{\rho_j}$$

Tanárnál:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= f'_{x_1}\Delta x_1 + \dots + f'_{x_n}\Delta x_n + o(|\Delta x|)$$

Anal 3. 9.
differenciál
[illegible]

Sima ~~Vonal~~ integrál

$$\int_D f(x)\,dx \quad ; \quad D = (a, b)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in (a,b)\}$$

ez egy 1 dim. sokaság az $\mathbb{R}^1$-ben
⇓ nincs multiplic. megoldás
⇓ ∄ normálvektor!

tfh. $\exists F(x)$ i. h. $F'(x) = f(x)$

$$\int_D F'(x)\,dx = \int_D d(F(x)) = \int_{\partial D} F(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Vonalintegrál

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(x)\,d\underline{l} = \int_\Gamma f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_\Gamma d(v(x,y)) = \int_{\partial\Gamma} v(x,y)$$

tfh. $\exists$ ~~Φ~~(x,y) i. h. $d(v(x,y)) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$

vagyis $F(x)$ potenciálos.

$$\int_\Gamma f(x)dl = \int_\Gamma f(x)\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_D f(\gamma(t))\sqrt{d(x(t))^2 + d(y(t))^2} =$$

$$= \int_D f(\gamma(t))\sqrt{x'(t)^2dt^2 + y'(t)^2dt^2} = \int_D f(\gamma(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

$$f(x,y,z) = f(r)$$

$$df(x,y,z) = \underbrace{f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz}_{\text{gradiens.}}$$

Felületi integrál

$$\int_S F(x)\,d\underline{S}$$

$$T_0 : \Lambda^0(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

$$T_1 : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$$

$$T_2 : \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$$

$$T_3 : \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

$$T_1(d\omega) = \text{grad}\,T_0(\omega)$$

$$T_2(d\omega) = \text{rot}(T_1(\omega))$$

$$T_3(d\omega) = \text{div}(T_2(\omega))$$

$$d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) =$$

$$= f'_y\,dy\wedge dx + f'_z\,dz\wedge dx$$

$$+ g'_x\,dx\wedge dy + g'_z\,dz\wedge dy$$

$$+ h'_x\,dx\wedge dz + h'_y\,dy\wedge dz =$$

$$= -f'_y\,dx\wedge dy - f'_z\,dx\wedge dz$$

$$+ g'_x\,dx\wedge dy - g'_z\,dy\wedge dz$$

$$+ h'_x\,dx\wedge dz + h'_y\,dy\wedge dz$$

$$= (g'_x - f'_y)\,dx\wedge dy + (h'_x - f'_z)\,dx\wedge dz + (h'_y - g'_z)\,dy\wedge dz$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} dy\wedge dz - dz\wedge dy \\ dz\wedge dx - dx\wedge dz \\ dx\wedge dy - dy\wedge dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dydz \\ dzdx \\ dxdy \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$-ben $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ diff k-forma

$$\int_M \omega = ?$$

Spec esetek:

1) $k = n$ $\quad M =$ tér rész.

$\omega = f(x) \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{dV}$ $\Bigg\}$ $\int_M f(x)\, dV$ jól számítható!

1.1) $\mathbb{R}^3$-ban

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x,y,z)\, dV$$

2) $n = 2,\ k = 1$

$M = \{ \gamma(t),\ t \in [a,b] \}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\omega = f\,dx + g\,dy = F\,d\underline{l}$

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma f dx + g dy = \int_\Gamma F d\underline{l} = \int_a^b F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (x,y) \longmapsto (x(t), y(t)) \\ dx \longmapsto dx(D\gamma)\, dt = x'(t)\, dt \quad \text{és} \quad dx\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \\ \quad \hookrightarrow dx\text{-et alkalmazom } D\gamma\text{-ra} \qquad dy\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = v \end{array}}$$

Mal 3 e.G 10 ...

utolsó diffgeo ← k...

$$F = (f, g, h)^T \longleftrightarrow \omega = f dx + g dy + h dz$$

$$\int_{\Gamma} F\, dR = \int_{\Gamma} \omega = \int_a^b f(\gamma(t))\, dx(\dot\gamma(t))\, dt + g(\gamma(t))\, dy(\dot\gamma(t))\, dt + h(\gamma(t))\, dz(\dot\gamma(t))\, dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt$$

<u>Def</u> M k dim. sokaság

$\Phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\Phi(B) = M$ egy-egy ért.

$D\Phi$: $n \times k$ dim.

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$; $\omega = f\, dX_I$

$$\int_M \omega = \int_B f(\Phi(u))\, dX_I(D\Phi(u))\, \underbrace{du_1 \dots du_k}_{\text{„}dV_u^{(k)}\text{"}}$$

(T) Stokes tétel:

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. sokaság

tfh. ∂M k-1 dim sokaság.

Adott ω diff. k-1 forma

Ekkor $$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

① Newton – Leibniz.
$n = 1, \; k = 1$ 

$M = (a,b)$

$\partial M = \{a,b\}$; $d\omega = f'(x)\,dx$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \implies \int_{(a,b)} f'(x)\,dx = \int_{\{a,b\}} f(x)$$

② $n = 3, \; k = 2$

$M \subset \mathbb{R}^3$ = felület

$M = \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \}$

$\partial M = \{ \gamma(t) \mid t \in (a,b) \}$

$\oint \omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz \equiv F$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \implies \iint_M \left\langle \operatorname{rot} F, \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\partial M}$$

③ $n = 3, \; k = 3$ G – O

④ $n = 2, \; k = 2$ Green

⑤ $n = 2, \; k = 1$ Potenciál !

PDE: jelölés: $D^{(2,0)} u(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)$

$D^{(1,1)} u(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y)$

Lineáris : $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u = 0$ homogén

Laplace : $\Delta u = 0$

$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ + kezdeti felt.

↳ ha F Lipschitzes, stb. stb., akkor $\exists!$ megoldás

Alapkérdések

1. van-e megoldás?
2. ha van egyértelmű-e?
3. ha egyért. folyt. függ-e a kezd. ért., paraméterértékektől?

nem feltétlenül

Az egyenlet jól kondicionált, ha 1, 2, 3.
„well-posed"

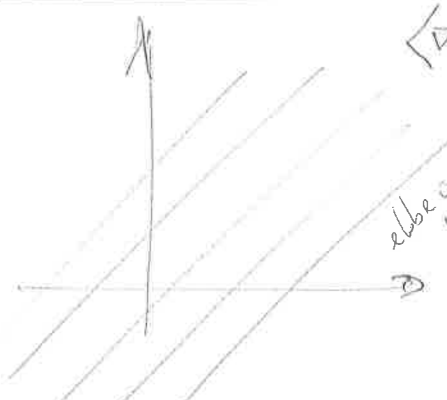
különben rosszul kond. = „ill-posed"

ha nem létezik megoldás ami diffható, akkor $\exists$-het gyenge megoldás, ami nem diffható

Transzport: (Homogén)

$u'_t + b u'_x = 0$

$u(x,0) = g(x)$



$\langle \nabla u, v \rangle = 0$

ebbe az irányba konstans

legyen $z(s) = u(x+sb, t+s)$

$z'(s) = u'_x b + u'_t = 0 \Rightarrow z(0) = z(-t) = u(x-bt, 0) = g(x-bt)$

tehát $z(0) = u(x,t) = g(x-bt)$

A megoldás szükséges felt. hogy $g(x)$ sima

Ha g nem sima, akkor $u(x,t) = g(x-bt)$ gyenge megoldás.

Inhomogén transzport egyenlet

$$\begin{cases} u'_t + b u'_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

homogén rész: $v'_t + b v'_x = 0$, $v(x,0) = g(x)$ (2)

inhomogén rész: $w'_t + b w'_x = f(x,t)$, $w(x,0) = 0$ (3)

akkor $u = v + w$ megoldása (1)-nek.

$w(x,t) \rightsquigarrow z(s) = w(x+sb, t+s)$ és $z'(s) = w'_x b + w'_t = f(x+sb, t+s)$

$z(-t) = 0$

$$z(0) = \cancel{\int_{-t}^{0} f(x,t)\,ds} = \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\,ds = \int_0^t f(x+(u-t)b, u)\,du$$

$t + s = u$

$$\boxed{u(x,t) = g(x-bt) + \int_0^t f(x+(u-t)b, u)\,du}$$

Szuperpozíció elve

Anal 3
11. ea.

Több dimenzióban

$$\begin{cases} u'_t + \langle b, \nabla u \rangle = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$\rightarrow$ irány menti derivált.

Általánosabban:

$$a(x,t)\, u'_t + b(x,t)\, u'_x = 0$$

$\leftarrow$ modellinvertáló esetén fontos

Laplace egyenlet.

$u(x,y,z)$ hőmérséklet, potenciál, anyag sűrűség.

Egyensúly: nincs mozgás $\forall S \in \Omega$ zárt felületen

$$\oint\!\!\oint_S F\, d\underline{S} = 0 \quad (\text{fluxus} = 0)$$

vagyis
$$\iiint_M \operatorname{div} F\, dV = 0 \quad \forall M \subset \Omega$$

Tfh. $F(x,y,z) = -a \operatorname{grad}(u(x,y,z))$

$\operatorname{div} F = -a \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x,y,z) = -a\, \underline{\Delta u = 0} \Rightarrow$

$$\Delta u = 0$$

Lemma: Tfh. $\eta: \Omega \to \mathbb{R}$

$$\forall M \subset \Omega \quad \iiint_M \eta(x,y,z)\, dV = 0$$

Ekkor $\eta(x,y,z) = 0$

Laplace egyenlet : $\Delta u = 0$

+ peremfeltétele a $\partial\Omega$-n

pld. Dirichlet felt. $u(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$

Displacement problem :

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u(x) = f(x) \text{ ha } x \in \partial\Omega \end{array}}$$

ez egy jól kondícionált feladat

Neumann feltétel $\partial_n u(x) = f(x) \quad \partial\Omega$

($\partial\Omega$-ra merőleges irányú deriváltja)

III. felt :

$$a u + b\, \partial_n u(x) = f(x)$$

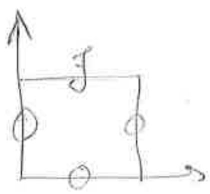
$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ \partial_n u(x) = f(x) \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ a\, \partial_n u(x) + b\, u(x) = f(x) \end{array}}$$

jól kondícionált ah

$\boxed{n = 2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x,y) \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \\ u(x,y) = f(x,y) \text{ ha } (x,y) \in \partial\Omega \end{array}}$$

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$



$u(x,0) = 0$

$u(0,1,y) = 0$

$u(x,1) = f(x)$

A megoldás úgy keressük alakot :

$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$

$X''Y + XY'' = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

And 3 ea. 11. hét.

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$Y''(y) = -\lambda Y(y)$$

$u(x,0)=0 \Rightarrow X(x)\,Y(0)=0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0)=0$

$u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)\,Y(y)=0 \quad \forall y \Rightarrow X(0)=0$

$u(x,1)=0 \Rightarrow X(1)=0$

lényeg: $\begin{cases} X''=\lambda X \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$ ha $\lambda>0$: $X''=\alpha^2 X$

$X(x)= Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$

$\begin{cases} X(0)=A+B=0 \\ X(1)=Ae^{\alpha}+Be^{-\alpha}=0 \end{cases}$ ↯

ha $\lambda<0 \Rightarrow \lambda=-\alpha^2$

$X(x)=C\cos(\alpha x)+D\sin(\alpha x)$

$X(0)=C=0$

stb..

$X(1)=D\sin(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=k\pi$

$\lambda=-(k\pi)^2$

$Y''=(k\pi)^2 Y$

$Y(y)=Ae^{k\pi y}+Be^{-k\pi y}$

$A=-B$

$u_k(x,y)=\sin(k\pi x)\,\mathrm{sh}(k\pi y)$ → megoldás jelölt.

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\, u_k(x,y)$$

$$f(x)=u(x,1)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x)\,\mathrm{sh}(k\pi)$$

ha f Fourier sorfejtés

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$$

$$b_k=\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$$

$$\boxed{B_k=\frac{b_k}{\mathrm{sh}(k\pi)}}$$

PDE másodrendű, kétváltozós

Hővezetés véges rúdban : $u'_t = u''_{xx}$ $\quad t > 0$

$x \in (0,1)$

kezdeti felt.: $u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ (Perem feltétel)

Megold.: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$X T' = X'' T$$

$$\frac{T'}{T} = + \frac{X''}{X} = \lambda \Rightarrow \underline{\text{I}}\ X'' = \lambda X \qquad \lambda < 0$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

$$\underline{\text{II}}\ T' = \lambda T$$

$\underline{\text{I}}$ $\left.\begin{array}{l} X'' = -s^2 X \\ X(0) = X(1) \end{array}\right\} \Rightarrow X(x) = A \cos sx + B \sin sx$

$X(0) = A = 0$

$X(1) = B \sin s \Rightarrow s = n\pi$

$\underline{\text{II}}$ $T' = -(n\pi)^2 T \Rightarrow T_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}$

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = f(x)$$

Idő megfordítása

$t \longmapsto -t$

$$\left.\begin{array}{l} u(x,t) = u(x,-t) \\ u'_t = -u'_t \end{array}\right\} \Rightarrow u'_t = -u''_{xx} \Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M > 0$-ra $\exists f$
amellyre $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < \varepsilon$
mégis $\|u(x,t)\| > M$ elegendően
nagy T-re

Hővezetés Neumann feltétellel

$u'_t = u''_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

Neumann felt.

$u'_x(0,t) = u'_x(1,0) = 0$ (hőmérséklet nem megy ki)

Def. $I(t) = \int_0^1 u(x,t)\,dx$ összes hőmennyiség

Áll: $I(t)$ konstans

Biz: $I'(t) = \int_0^1 u'_t\,dx = \int_0^1 u''_{xx}\,dx = u'_x\big|_0^1 = u'_x(1) - u'_x(0) = 0$

HF* $u(x,t) \longrightarrow I = \int_0^1 f(x)\,dx = I(0) = I(t) = I$

Inhomogén hővezetés

$u'_t - u''_{xx} = f(x,t) \leftarrow$ külső gerjesztés

$u(x,0) = 0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

sok homogén egyenletet:

$u(x,t,\tau)$: $u'_t = u''_{xx} \quad t \geq \tau$

$u(x,\tau) = f(x,\tau)$

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t,\tau)\,d\tau$$

Duhamel's principle

Hullámegyenlet

végtelen húr esetén

$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$ (homogén egyenlet) → idő megfordítása esetén nem változna az egyenlet

$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\}$ kezdeti feltételek

d'Alembert féle megoldás

$\left.\begin{array}{l} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{array}\right\}$ új koordináták. $\Rightarrow$ $x = \dfrac{\xi + \eta}{2}$

$t = \dfrac{\xi - \eta}{2c}$

$$\mathcal{U}(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

$$\mathcal{U}'_\xi(\xi,\eta) = u'_x\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)\cdot\frac{1}{2} + u'_t\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)\frac{1}{2c}$$

$$\mathcal{U}''_{\xi\eta}(\xi,\eta) = u''_{xx}\frac{1}{4} + \cancel{u''_{xt}\left(-\frac{1}{4c}\right)} + \cancel{u''_{xt}\frac{1}{4c}} + u''_{tt}\left(-\frac{1}{4c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u''_{xx} - u''_{tt}\frac{1}{c^2}\right) = 0$$

$\boxed{\mathcal{U}''_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0} \Rightarrow \mathcal{U}'_\xi(\xi,\eta) = f_0(\xi) \Rightarrow \mathcal{U}(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$

ugyanígy $\mathcal{U}'_\eta(\xi,\eta) =$

Állítás: $\forall$ megoldás $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$,
ahol F, G „szép" fv-ek

$$L[u] \longrightarrow L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$L = L_1 L_2$

$\Downarrow$

$L[u] = L_1 L_2 [u] = 0$

$L_1[u] = 0$ $\qquad$ $L_2[u] = 0$

$\left.\begin{array}{ll} u'_t - c u'_x = 0 & u'_t + c u'_x = 0 \end{array}\right\}$ transzport egyenlet.

Kezdeti feltételek linearitása

$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$ | $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$

$v(x,0) = f(x)$ | $w(x,0) = 0$

$v_t(x,0)$ | $w_t(x,0) = g(x)$

Áll: d'Alembert formula:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

Köv: ez valóban megoldás, ha f, g sima függvények, ha nem simák, akkor gyenge megoldás.

Másodrendű lineáris PDE típusai:

$$L[u] = a\,u''_{xx} + 2b\,u''_{xy} + c\,u''_{yy} + d\,u'_x + e\,u'_y + fu = g$$

főrész

operátor diszkrimináns: $\delta L = a^2 - bc$? $\boxed{ac - b^2}$

↳ elliptikus: $\delta L > 0$ Δu

↳ parabolikus $\delta L = 0$ $u'_x = u''_{yy}$

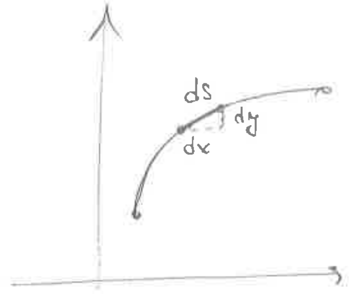
↳ hiperbolikus $\delta L < 0$ $u''_{xy} = 0$ v. $u''_{xx} - c^2 u''_{yy} = 0$

Áll: típus koordináta független

$$L = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} + 1$$

$$\int_\gamma f(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{f(x(t),y(t))}_{\gamma(t)} \underbrace{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}_{\|\dot\gamma(t)\|}\, dt}_{ds}$$

Th. Garrity
91. old



$$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t\end{pmatrix}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t\right)\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

Ha $a=b \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sqrt{a^2}\, dt = a^3\frac{\pi}{2}$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2\end{pmatrix}$ $\quad \gamma = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t\end{pmatrix}$ $\quad \dot\gamma = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t\end{pmatrix}$ $\quad \|\dot\gamma\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$$\int_\Gamma F_1(x,y)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\,\|\dot\gamma\|\,dt = \int a^2\cos^2 t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

$$= \cancel{\int \frac{a^2}{2}(1+\cos 2t)\sqrt{\frac{a^2}{2}}} =$$

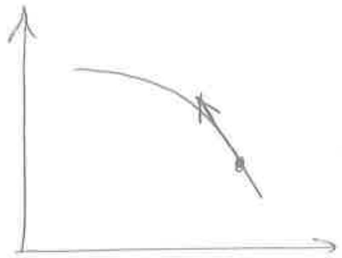
$$= \int a^2\cos^2 t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\, dt = \int a^2\cos^2 t\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t + b^2}\, dt$$

$u = \cos^2 t$ $\qquad u = \sin t$ $\qquad \cos t = \sqrt{1-u^2}$

$du = 2\cos t\sin t\, dt$ $\qquad du = \cos t\, dt$

$$\int a^2\sqrt{\cancel{\cos}-u^2}\sqrt{(a^2-b^2)u^2+b^2}\, du$$

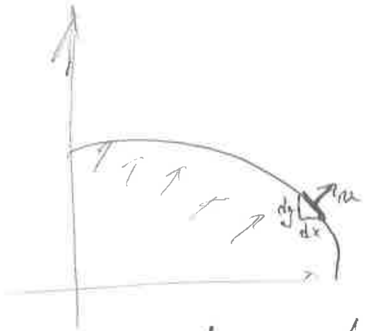
Anal 3
piszkozatok



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{\perp}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ -x(t) \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma^{\perp}(t) = \begin{pmatrix} b\cos t \\ a\sin t \end{pmatrix}$$



$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_\Gamma \left\langle F(x,y), d\vec{n} \right\rangle =$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle F(x(t),y(t)), \dot\gamma^{\perp}(t) \right\rangle dt =$$

$$\Delta\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t_k) - x(t_{k-1}) \\ y(t_k) - y(t_{k-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^2\cos^2(t)\, b\cos(t) + b^2\sin^2(t)\, a\sin(t) \right) dt =$$

$$d\vec{n} = \begin{pmatrix} dx \\ -dy \end{pmatrix}$$

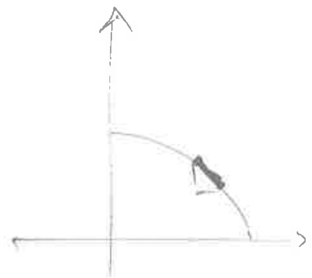
$$= a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt + b^2 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt =$$

$$d\vec{n} = \begin{pmatrix} \dot x(t) \\ \dot y(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= a^2 b \int \cos t \left(1 - \sin^2 t \right) dt$$

Szám. kv. $f(x,y) = x^2+y^2$ $\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) = \gamma(t), t\in$

$\Gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$



$$\int_\Gamma f(x,y)\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\| \, dt$$

$$\int f(x)\, dx$$

legyen $\cancel{x} = u(t)$

$$dx = \dot u(t)\, dt$$

$$\int f(u(t))\, \dot u(t)\, dt$$

$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \gamma(t)$

$$\left.\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ dx &= \dot\gamma_1(t)\, dt \\ dy &= \dot\gamma_2(t)\, dt \end{aligned}\right\} \quad ds = \underbrace{\sqrt{\dot\gamma_1(t)^2 + \dot\gamma_2(t)^2}}_{\|\dot\gamma(t)\|}\, dt$$

$$\int_\Gamma f(x,y)\, ds = \cancel{\int_\Gamma f(x,y) \sqrt{dx^2+dy^2}}$$

$$= \int f(x(t), y(t)) \sqrt{\cancel{d} x\cancel{(t)}^2 + dy^2}$$

$$x \longmapsto \gamma_1(t)$$

Anal III motivációk:

↳ vektormezők 2D, 3D

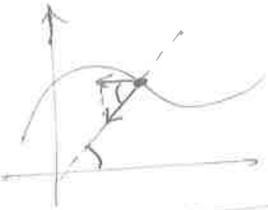
↳ gradvektortér

adott $f(x,y) \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$-q_1 \quad e \qquad +q_2$

$$\vec{F} = k_e \frac{-q_1 e}{\|\vec{r_e} - \vec{r_{q_1}}\|^3}(\vec{r_{q_1}} - \vec{r_e}) + k_e \frac{q_2 e}{\|\vec{r_{q_2}} - \vec{r_e}\|^3}(\vec{r_{q_2}} - \vec{r_e})$$

↳ lehet több pont is



TODO

$\boxed{\text{Vektormezőkre fizikai példák}}$

$$r_e = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad r_{q_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F_1}(x,y) = -k_e \frac{q_1 e \begin{pmatrix} -x + x_1 \\ -y + y_1 \end{pmatrix}}{\left((x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{const}{\left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \vec{F_1}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} =$$

$$= const\left(-\frac{3}{2}\right)\left((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \cdot (x$$

$+$

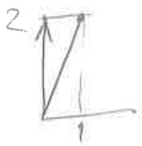
$$\sum_{k=0} k_e \frac{\frac{Q}{n} q}{\|r_q - r_k\|^3} (\vec{r_k} - \vec{r_q}) =$$

$$r_k = \begin{pmatrix} a + \frac{k}{n}(b-a) \\ 0 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k_e \frac{\frac{Q}{b-a} q}{\|r_q - r_k\|^3} (\vec{r_k} - \vec{r_q}) \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\Delta x} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} k_e \int_a^b \frac{\varrho q}{\left\|r_q - \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^3} \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{r_q}\right) dx$$

adott $f(x,y) = x^2 + 5y \Rightarrow \int_\Gamma f(x,y)\,ds = \int_\Gamma f(x,y) \sqrt{dx^2 + dy^2} \cdot \frac{dt}{dt}$



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0,1]$

$$= \int_0^1 f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 6t)\sqrt{1+5}\, dt$$

1/7 a)

$$\mathbb{I} = \int_\Gamma \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} dr = \int_0^3 \text{polinom-tag} \, dt$$ ✓

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t-5 \\ t \end{pmatrix}, t \in [0,3]$$

~~1/8~~

b) ✓

potenciálos-e?

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + \dots + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{potenciálos!}$$

legyen $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s.t. $\operatorname{grad} V = F \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = F_x \quad \dots \quad \Rightarrow V = \int_{x_0}^{x} F_1(\quad) \dots$$

D1* vektorpotenciálos, ha $\exists\, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ s.t. $\nabla \times G = F$

$$G(x,y,z) = \int_0^1 t F(tx, ty, tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \qquad ; \; F(x) := \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^1 t \begin{pmatrix} ty \\ tz \\ tx \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t \begin{pmatrix} tz^2 - txy \\ tx^2 - tyz \\ ty^2 - txz \end{pmatrix} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} z^2 - xy \\ x^2 - yz \\ y^2 - xz \end{pmatrix} \cancel{t}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} z^2 - xy \\ x^2 - yz \\ y^2 - xz \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2y - y \\ 2z - z \\ 2x - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$ ✓

$$\nabla \times (\alpha F + G) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(\alpha F_3 + G_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha F_2 - G_2) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\alpha F_1 - G_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha F_3 - G_3) \end{pmatrix} = \alpha(\nabla \times F) + \nabla \times G$$

ha $\nabla \times F = \nabla \times G$ akkor $F + F_0 = G$

F_0 ~~vektorp~~ skalárpotenciálos!

TODO: Átírni

óra 3
1/7
1/D1*

$$\int_\Gamma \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{\ell} = \int_\Gamma \underbrace{f_1(r)dx + f_2(r)dy + f_3(r)dz}_{\omega}$$

$$= \int_a^b \quad \text{leggiu} \quad r = \gamma(t) \qquad \gamma[a,b] = \Gamma$$

$$d\vec{\ell} = \dot{\gamma}(t)dt$$

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$d\ell = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t)dt \\ \dot{\gamma}_2(t)dt \\ \dot{\gamma}_3(t)dt \end{pmatrix}$$

$$J = \int_C f(x,y)\, d(x,y) = \int_C f(x,y)\, dx \wedge dy$$

leggiu $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\cancel{\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix}}$

$\cancel{D\Phi(x,y)} =$

$$x = \Phi(r,\theta) = \begin{bmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \qquad D\Phi(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$(r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi] = I$$

$$\Phi(I) = C$$

$$dx = d\Phi(r,\theta) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}dr + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}d\theta$$

$$dy = d\Phi(r,\theta) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}dr + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}d\theta$$

$$J = \int_I f(\Phi(r,\theta))(D\Phi)\, dr \wedge d\theta$$

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}dr + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}d\theta\right) \wedge (\ldots) =$$

$$= \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}\, dr \wedge d\theta +$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\, d\theta \wedge dr$$

$$= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right) dr \wedge d\theta$$

$$D\Phi(r,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad \det$$

Area? parallelogram?