Parciális differenciál egyenletek (PDE)

A Matlab ilyeneket tud megoldani:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(c\cdot\nabla u) + au = f \qquad u: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

m, d, c, a, f: folyt. (x,y,z)-től függő dolgok

---

pdepe (parabolic-elliptic) 1D

$u: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad u(x,t)$

$m \in \{0,1,2\}$ Ilyet tud megoldani

$$\boxed{c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{m} f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}$$

$$u(x,t_0) = u_0(x)$$

Konkrét pld:

$m = 0$

$c = \pi^2$

$f = \frac{\partial u}{\partial x}$

$s = 0$

$$\Rightarrow c^2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}}$$ (heat transfer equation)

initial condition: $u(x,t_0) = u_0(x)$

boundary condition: $p(x,t,u) + q(x,t)\underbrace{f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ jelen esetben}} = 0$

① Transzport egyenlet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{b\,\partial u}{\partial x}$$

vagyis:

$C(..) \equiv 1$

$f(..) \equiv 0$

$S(..) = -b\,\frac{\partial u}{\partial x}$

vagy:

$C(...) \equiv 1$

$f(...) = bu$

$S(..) \equiv 0$

$m = 0$

pdepe: $C(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^m f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\right) + s(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})$

Általános alak

3D pde-k; $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ esetben:

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(c\nabla u) + au = f$$

$m, d, c, a, f = \sim(x,y,z)$

② Laplace egyenlet:

$\Delta u = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

vagyis:

$m \equiv 0$

$d \equiv 0$

$c \equiv 1$

$a \equiv 0$

$f \equiv 0$

③ Helmholtz-egyenlet:

$\Delta u = -\lambda u$

de $\cancel{a} = \cancel{-\lambda}$

④ Hővezetés egyenlete:

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$ $\to$ $m \equiv 0$

$d \equiv 1$

$c \equiv 1$

$a \equiv 0$

$f \equiv 0$

④ Schrödinger egyenlet

$i \cdot u_t' = -\Delta u$ (mint ④)

⑤ Hullám egyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

⑥ Minimális felület (nemlin)

$$\operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{grad} u}{\sqrt{1+|\operatorname{grad} u|^2}}\right) = 0$$

pde modellek:

$$-\nabla\cdot(c\nabla u) + a u = f \quad \text{vagy} \quad \underbrace{-\nabla\cdot(c\otimes\nabla u)}_{\text{vektoros}} + a u = f$$

$c = c(x,y,z,u)$

$a = a(x,y,z,u)$

$f = f(x,y,z,u)$

(6) Minimális felület

$$-\nabla\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}}_{c(x,u)}\nabla u\Big) = 0$$

$$|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \Rightarrow c(r,u) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}$$

$a(r,u) \equiv 0$

$f(r,u) \equiv 0$

assempde: elliptic PDE

$$-\nabla\cdot(c\Delta u) + a u = f$$

parabolic: $u(t,r)$

$$d\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot(c\nabla u) + a u = f$$

Dirichlet feltétel: $u(x,t) = f(x) \quad \forall x\in\partial\Omega,\ \forall t\in[0,\infty)$

Neumann feltétel: $\langle \text{grad}\, u, \underline{n}\rangle = f(x) \quad \partial\Omega$

Kevert: $\alpha u(x,t) + \beta u'_{\underline{n}}(x,t) = f(x) \quad \partial\Omega$

peremfelt.

V a peremfeltétel és van kezdeti érték

$\hookrightarrow u(x,t_0) = g(x)$

PDE összefogl. Matlab

Transzport egyenlet, 1D-ban

$$\boxed{\begin{aligned} &u = u(x,t) \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = f(x) \\ &u(x,0) = g(x) \text{ adott} \end{aligned}} \rightarrow \text{ez a feladat}$$

Euler numerikus megközelítés:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{T_s} \qquad \text{Ah. } \forall k\text{-ra } t_{k+1} - t_k = T_s$$

Visszahelyettesítve:

$$\frac{u(x,t_{k+1}) - u(x,t_k)}{T_s} + b\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_k) = f(x)$$

$$\underbrace{u(x,t_{k+1}) = u(x,t_k) + T_s\left(f(x) - b\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_k)\right)}$$ → numerikus megold. egyenlete!

Homogén egyenlet analitikus megoldása:

Vegyük észre, hogy:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad \text{vagyis a } v = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \text{ irány mentén } u(x,t) \text{ konst.}$$

legyen (x_0, t_0) rögzített

$u(x_0 + bt, t_0 + t)$ megoldása az egyenletnek!

Inhomogén egyenlet analitikus megoldása:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = f(x) \qquad \text{legyen } v(x,t) = bu(x,t) - \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds; \quad \underline{\text{ha } b = \text{konst.}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b\frac{\partial u}{\partial x} - f(x) \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

↳ visszavezettük homogén egyenletté!

$\boxed{\text{pdepe}}$ ~~[illegible]~~

több dimenzióban is

$$\boxed{c\,\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f\right) + s}$$

c, f, s argumentumai (x, t, u, u'_x)

$u(x, t_0) = u_0(x)$ $\rightarrow$ initial cond

$p(x,t,u) + q(x,t)\, f = 0$ $\rightarrow$ boundary cond $\rightarrow$ 2 db van a két oldalon

$\hookrightarrow$ $x = x_0$ vagy x_1

sol = pdepe(m, pde, ic, bc, xmesh, tspan)

1 pld : Hővezetés véges hosszú rúdban

$$\pi^2 u'_t = \frac{\partial}{\partial x} u'_x \implies \begin{cases} m = 0 \\ c = \pi^2 \\ f = u'_x \\ s = 0 \end{cases}$$

$u(x, 0) = g(x)$

$u(0, t) = 0 \implies \begin{cases} p = u(x_0, t) \\ q = 0 \end{cases}$

$$\pi e^{-t} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(1, t)}_{f} = 0 \implies \begin{cases} p = \pi e^{-t} \\ q = 1 \end{cases}$$

2 pld Hővezetés egy fémlemezen : $u'_t = \Delta u + 1$

PDE összefoglaló Matlab

Matlab R2016b : $\boxed{\text{solvepde}}$ → assempde
parabolic
hyperbolic
pdenonlin

helyett.

PDE – Mathematica-val

Transzport egyenlet:

1: $u = u(t,x)$; $u'_x + u'_t = 0$

$t(0,x) = e^x$

```
DSolve[D[u[t,x], x] + D[u[t,x], t] == 0, u, {t, x}]
```

Megoldás: $\boxed{u[t,x] = C(t-x)}$ ← ált. mo.

$u(0,x) = e^x \Rightarrow C(-x) = e^x \Rightarrow C(t-x) = e^{x-t}$

$\boxed{u(t,x) = e^{x-t}}$ ← spec. megold

2: $u'_x + u'_t = x - t$

Mathematika: $\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + C(t-x)}$ ← ált. megold

ellen: $u'_t + u'_x = -x + C'(t-x) + \left(-t + 2x - C'(t-x)\right) = x - t$

ha $u(0,x) = e^x \Rightarrow x^2 + C(-x) = e^x \Rightarrow C(-x) = e^x - x^2$

$C(x) = e^{-x} - x^2$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + e^{x-t} - (t-x)^2}$

ha $u(0,x) = \sin x \Rightarrow x^2 + C(-x) = \sin x$

$C(x) = -\sin x - x^2$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + \sin(t-x) - (t-x)^2}$

ha $u(t,0) = f(t) \Rightarrow C(t) = f(t)$

$\boxed{u(t,x) = -tx + x^2 + f(t-x)}$

PDE önszorg
Mathematica

3: $u'_t + 2u'_x = x^2 + 4tx$ ~~$u(t,x)$~~

Method. $\longrightarrow$ $\boxed{u(t,x) = tx^2 + C\left(\frac{2t-x}{2}\right)}$ $\longleftarrow$ ált. megoldás

ha $u(0,x) = 0$

$C\left(-\frac{x}{2}\right) = 0 \quad \forall x \Rightarrow C \equiv 0$

$\boxed{u(t,x) = tx^2}$

Analitikusan mit lehetne vele csinálni?

$\left\langle \nabla u, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + 4tx$

$\left\langle \nabla u(x,y), \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \right\rangle = y^2 + 4xy$

Ez nem vezet megoldásra...

$\frac{d}{dt} u(x,y) = y^2 + 4xy$ és $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2$

Laplace egyenlet:

pld: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 9 \xrightarrow{\text{Mdh}} u(x,y) = C_1(y-x) + C_2(x+y) + \frac{9x^2}{2}$

PDE (bevezető)

Komplex függvénytanban:
adott $f(z = x + jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ diffható, ha:

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''_{xx} = v''_{yx} \\ -u''_{yy} = +v''_{xy} \end{cases} \Rightarrow u''_{xx} = -u''_{yy} \Rightarrow \boxed{\Delta u = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u''_{xy} = v''_{yy} \\ u''_{xy} = -v''_{xx} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta v = 0} \longrightarrow \text{harmonikus függvények}$$

Keresünk olyan függvényeket amik függenek x-től, t-től

$u(x,t)$ ⟶ initial condition: $u(x,0) = f(x)$

⟶ boundary condition: $\boxed{u(x,t) = f(x) \ \forall t, \ \forall x \in \partial\Omega}$

Csak (x,y,z)-től függenek ⟹ boundary condition
peremfeltétel

Még 3 gyak.
10 lab. –3–

pld Transzport egyenlet:

$$\boxed{u'_t + c\,u'_x = 0}$$

$$\cancel{f(x)\,u'_x + g(x)\,u'_y = 0 \Rightarrow \langle \nabla u, P \rangle = 0}$$

~~legyen~~ $\cancel{\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b]\}}$

$\cancel{\dot\gamma(t) =}$

$$f(x,y)\,u'_x + g(x,y)\,u'_y = 0$$

$$\left\langle \nabla u, \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

legyen $\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$u(x,y)$

tfh. $\dot x = f(x)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$

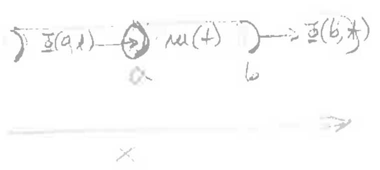
legyen $V(x)$ függvény

$V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \nabla V(x(t)) \cdot f(x)$$

$\xrightarrow{c}$ sebességgel áramlik a folyadék

A csőben
GÁZ áramlik



$\mu(x,t)$: sűrűség

$$\dot{m}(t) = \Phi(a,t) - \Phi(b,t) = -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

Azonban a tömeget máshogy is ki lehet számolni:
$$m(t) = \int_a^b \mu(x,t)\cdot A\,dx$$

Az áramlás hozama:

$$\dot{m}(t) = \int_a^b \mu'_t(x,t)\,A\,dx = -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A\mu'_t(x,t) + \Phi'_x(x,t) = 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu'_t(x,t) + \left[c(x,t)\cdot\mu(x,t)\right]'_x = 0$$

(!)
$$\Phi = \iint_S \underline{v}\,d\underline{s}$$ azonban itt most sűrűség is van!

$$\Phi = \iint_S \mu(x,t)\,\underline{v}\,d\underline{s}$$

$$= \iint_S \mu(x,t)\cdot\left(c(x,t)\ 0\ 0\right)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$= \iint \mu(x,t)\,c(x,t)\,dy\,dz$$

$$= \mu(x,t)\cdot c\iint_S dy\,dz = c(x,t)\,\mu(x,t)\cdot A \longrightarrow \left[\frac{m}{s}\cdot\frac{kg}{m^3}\cdot m^2 = \frac{kg}{s}\right]$$

$$\Phi(x,t) = c(x,t)\,\mu(x,t)\cdot A$$

$$\Phi_{ab}(t) = A\left(\Phi(a,t) - \Phi(b,t)\right) = -A\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}m(t) = \Phi_{ab}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$A\cdot\frac{d}{dt}\int_a^b \mu(x,t)\,dx = -A\cdot\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx$$

$$\int_a^b \mu'_t(x,t)\,dx = -\int_a^b \Phi'_x(x,t)\,dx \Longrightarrow \boxed{\mu'_t(x,t) + \Phi'_x(x,t) = 0}$$

$\forall\ [a,b]$ intervallumra igaz hogy $\int_a^b (\mu'_t - \Phi'_x)\,dx = 0$

$$\Downarrow$$

víz esetén: $\Phi = \iint_S \underline{v}\cdot d\underline{s} \longrightarrow \frac{m}{s}\cdot m^2 = \frac{m^3}{s}$ = „térfogat" / sec a teljes felületen

sűrűség esetén: $\Phi = \frac{1}{|S|}\iint_S \mu(x,t)\,\underline{v}\,d\underline{s}$ = „tömeg" / sec egységnyi tér

Transport egyenlet

Ind 3 gyak

lev. Fiz

Analízis III. 9. heti feladatok

2015. november 20.

Variációszámítás 3. rész.

1. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x,t)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$. (Tehát $u : [0,\ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell u_t'^2(x,t)\, \mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau \int_0^\ell \left(\sqrt{1 + u_x'^2(x,t)} - 1 \right) \mathrm{d}x,$$

   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1,\, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\, \mathrm{d}t.$$

   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

2. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D |\operatorname{grad} \phi(x,y)|^2\, \mathrm{d}(x,y).$$

PDE 1. rész. Transzport egyenlet.

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport egyenleteket.

3.
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= 0 \\ u(0,x) &= e^x \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + u_x'(x,t) &= x - t \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}$$

5. ~~(HF)~~
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) + 2 \cdot u_x'(x,t) &= x^2 + 4tx \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

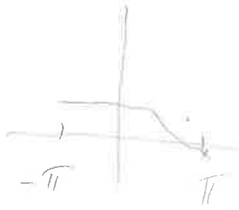
6. (HF)
$$\begin{aligned} u_t'(x,t) - 2 \cdot u_x'(x,t) &= 0 \\ u(x,0) &= \sin(x) \end{aligned}$$

Laitler: $f : (0,1) \to \mathbb{R}$
(Fourier trafó)

11 hét

Ism: Fourier-sorfejtés:

$f: [-\pi,\pi]$ + Dirichlet feltételek,



akkor $f = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) + \frac{a_0}{2}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

Ha $f: [0,\pi]$ + Dirichlet felt

akkor $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + A_0$ $\qquad A_k = 2a_k$

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$ $\qquad B_k = 2b_k$

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx =$$

$x = \pi y$

$dx = \pi dy$

$$= 2 \int_0^{\pi} f(\pi y) \sin(k \pi y)\, dy$$

$f: (0,1) \to \mathbb{R}$ + Dirichlet

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x)$$

Analízis III. 10. heti feladatok
2015. november 27.

PDE 2. rész. Laplace egyenlet.

1. Határozzuk meg az $u''_{xx}(x,y)+u''_{yy}(x,y)=0$ Laplace egyenlet megoldását az $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ tartományon az alábbi peremfeltételekkel:

(a)
$$u(0,y)=0$$
$$u(1,y)=0$$
$$u(x,1)=1$$
$$u(x,0)=0$$

(b)
$$u(0,y)=0$$
$$u(1,y)=1$$
$$u(x,1)=0$$
$$u(x,0)=0$$

(c)
$$u(0,y)=\cancel{1}\ 0$$
$$u(1,y)=1$$
$$u(x,1)=1$$
$$u(x,0)=1$$

2. (HF) Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

(a)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(x,1) &= 2\sin(2\pi x) \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin(5\pi x) \\ u(x,1) &= 0 \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

3. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1)\times(0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0 \qquad \text{(derivált van adva!)} \\ u(x,1) &= x^2-x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

4. Oldjuk meg a Laplace egyenletet felső félsíkban, tehát $\Omega=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R}, y>0\}$. Az (egyik) peremfeltétel:

$$u(x,0)=\cos(2x).$$

Azt a megoldást keressük, melyre az is teljesül, hogy

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y)=0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

5. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:

$$u(x,y)=2y, \qquad \text{ha } x^2+y^2=1.$$

Segítség: A Laplace egyenletet polárkoordinátákban, ahol $w(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$:

$$w''_{rr}+\frac{1}{r^2}w''_{\theta\theta}+\frac{1}{r}w'_r=0$$

+ túloldal tartalék

11. hét

$\Delta u = 1 \cdot u''_{xx} + 1 \cdot u''_{yy}$

?

6. (*Tartalék feladat*) Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá

$$\begin{aligned} \overline{x} &= x + y \\ \overline{y} &= x - y \\ v \quad \cancel{U}(\overline{x}, \overline{y}) &:= u(x,y), \end{aligned}$$

$v(\bar{x}, \bar{y}) = u(x,y)$

ahol a U függvény ÉT-a

$$\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \; : \; (x,y) \in \Omega\}.$$

$\Delta v = 0$

$\Updownarrow$

$\Delta u = 0$

Igazoljuk, hogy $\triangle U = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

7. (*HF, szorgalmi*) Oldjuk meg:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0, & x^2 + y^2 &> 4 \\ u(x,y) &= y, & x^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Olyan megoldást keresünk, melyre $\lim\limits_{|x|,|y| \to \infty} u(x,y) = 0$.

8. (*HF, szorgalmi*) Oldjuk meg a Laplace egyenletet az első síknegyedbe eső negyed-egységkör belsejében. A határon a feltételek:

$$u(0,y) = 0, \qquad y \in [0,1].$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,1].$$

$$u(\cos\theta, \sin\theta) = g(\theta), \qquad \theta \in [0, \pi/2],$$

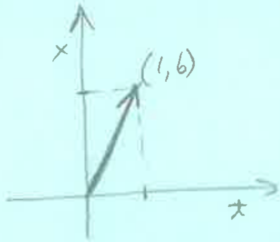
ahol $g(\theta)$ adott függvény.
Konkrétan, mi lesz a megoldás, ha $g(\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$?

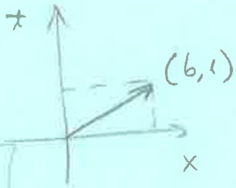
Transzport egyenlet megoldása

I homogén

$$\begin{cases} u'_t + b u'_x = 0 & (1a) \\ u(x,0) = g(x) & (1b) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u'_t & u'_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$





$z(s) := u(x+sb,\ t+s)$

$z'(s) = u'_x b + u'_t = 0 \implies z(s) = \text{konst}$

$$u(x,t) = z(0) = z(-t) = u(x-bt, 0) \underset{(1b)}{=} g(x-bt)$$

Tehát $\boxed{u(x,t) = g(x-bt)}$

II inhomogén rendszer

$$\begin{cases} v_t + b v_x = f(x,t) & (2a) \\ v(x,0) = 0 & (2b) \end{cases}$$

legyen $z(s) = v(x+bs,\ t+s)$

$z'(s) = v'_x b + v'_t = f(x+bs,\ t+s)$

$z(-t) = v(x-bt, 0) = 0$ (2b miatt)

kaptuk, hogy $z'(s) = f(x+bs,\ t+s) \quad \Big| \int_{-t}^{0} ds$

$$\int_{-t}^{0} z'(s)\, ds = \int_{-t}^{0} f(x+bs,\ t+s)\, ds$$

$$z(0) - \cancel{z(-t)} = \int_{-t}^{0} f(x+bs,\ t+s)\, ds$$

legyen $\tau = s + t$; t egy konst

$d\tau = ds$

$\tau_1 = s_1 + t = -t + t = 0$

$\tau_2 = s_2 + t = 0 + t = t$

$$z(0) = \int_0^t f\big(x + b(\tau - t),\ \tau\big)\, d\tau$$

$$z(0) = \boxed{v(x,t) = \int_0^t f(x - bt + b\tau,\ \tau)\, d\tau}$$

Csak ha b konst

Transzport egyenlet!

Anal3 11. hét

–1–

Általános esetben $\boxed{\text{grad}(u(x,y)) \cdot g(x,y) = 0}$

$$\boxed{u'_x g_1 + u'_y g_2 = 0} \quad (3a)$$

Legyen $\gamma(t)$ megoldása az $\begin{cases} \dot{x} = g_1(x,y) \\ \dot{y} = g_2(x,y) \end{cases}$ -nak, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

ekkor $z(t) = u(x(t), y(t))$

$$\dot{z}(t) = u'_x(x(t), y(t))\,\dot{x}(t) + u'_y(x(t), y(t))$$

$$= \left[\text{grad}(u)\right]_{r=\gamma(t)} \cdot \left[g(x,y)\right]_{r=\gamma(t)} = 0 \quad (3a) \text{ miatt}$$

Tehát $u(x,y)$ konstans $\gamma(t)$ mentén

TODO: továbbgondolni!

2017b: homogén egyenlet: $\boxed{\begin{cases} u'_x + b u'_t = 0 \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}}$

kijön, hogy $(u'_x \; u'_t)\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ irány szerint konstans az $u(x,t)$ fv.

ezen irány szerint az $x - bt$ kifejezés ami konstans, ezért az $u(x,t)$ az $(x-bt)$ kif. tetszőleges fv-e lehet!

pld $u(x,t) = h(x-bt)$

DE $u(x,0) = h(x) \overset{!}{\equiv} g(x)$

$\Downarrow$

$h(x) = g(x) \quad \forall x$

EZÉRT: $\boxed{u(x,t) = g(x-bt)}$

11. hét (I PDE)

1.

$$\boxed{\begin{aligned} u'_t + u'_x &= 0 \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}}$$

$$u(x,t) = e^{(x-ct)}\Big|_{c=1} = e^{(x-t)}$$

2a

$$\boxed{\begin{aligned} u'_t + u'_x &= x-t \\ u(x,0) &= e^x \end{aligned}}$$

$$f(x,t) = x-t$$

$$v(x,t) = e^{x-t}$$

$$w(x,t) = \int_0^t f(x-bt+b\tau, \tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t (x-t+\tau-\tau)\, d\tau = (x-t)t = xt - t^2$$

$$u(x,y) = e^{x-t} + xt - t^2$$

Ell:

$$u'_x = e^{x-t} + t$$

$$u'_t = -e^{x-t} + x - 2t$$

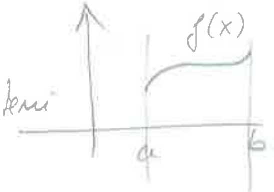
$$u'_x - u'_t = x - t \checkmark$$

$$u(x,0) = e^x \checkmark$$

hd 3
11. hét

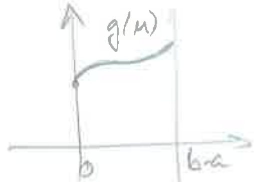
Van egy függvényem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Ezt szeretném Fourier sin/cos sorral közelíteni



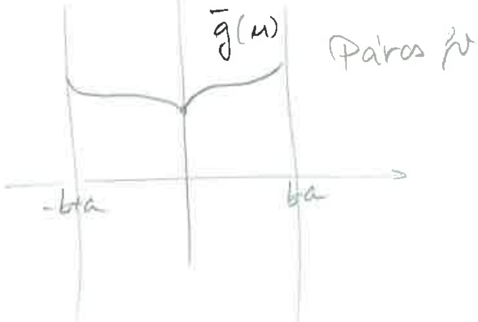
legyen $g:[0,\, b-a]\to\mathbb{R}$

$$g(u) = f(u+a)$$



legyen $\bar{g}:[-b+a,\, b-a]\to\mathbb{R}$

$$\bar{g}(u) = g(|u|)$$



$$\bar{g}(u) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \sin$$

Adott egy fv. aminek a periódusa T

intervallumot veszünk!

most $D=[0,T]$

$f:[0,T]\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{2\pi k x}{T} + b_k \sin\frac{2\pi k x}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2k\pi x}{T}\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx$$

Anal 1:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

$[-\pi,\pi]$ intervallumon

Tfh adott $f:[-T,T]$ -ind-on egy PÁROS fv

$$f(-x) = f(x)$$

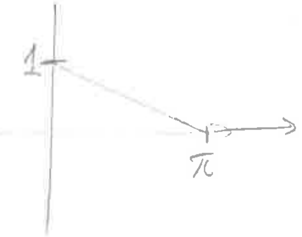
$$a_k = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{2k\pi x}{2T}\,dx = \frac{1}{T}\cdot 2\cdot\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx$$

$$b_k = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{2k\pi x}{2T}\,dx = 0$$

Anal 3
PDE - Laplace
Fourier sorfejt

Egyszerű pld (hogy ellenőrizzem a képletek helyességét)

legyen $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$; $f:[0,\pi]\to \mathbb{R}$



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{T} \quad (\text{mert per} = 2T)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^T \cos\frac{k\pi x}{T}\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^T x\cos\frac{k\pi x}{T}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{T}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T - \frac{T}{k\pi^2}\int_0^T x\cdot\frac{k\pi}{T}\cos\frac{k\pi x}{T}\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\left(\frac{T}{k\pi}(\sin k\pi - \sin 0) - \frac{T}{k\pi^2}\int_0^T x\left(\sin\frac{k\pi x}{T}\right)' dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{T}\cdot\frac{T}{k\pi^2}\left(\cancel{x\sin\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T} - \int_0^T \sin\frac{k\pi x}{T}\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{T}\Big|_0^T\cdot\frac{T}{k\pi} = -\frac{2T}{k^2\pi^3}\left(\cos k\pi - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right)$$

$k=0 \Rightarrow a_0 = 0$

$k=1 \Rightarrow a_1 = +\frac{4T}{k^2\pi^3} = \frac{4T}{\pi^3} \underset{T=\pi}{=} \frac{4}{\pi^2}$

$k=2 \Rightarrow a_2 = 0$

$k=3 \Rightarrow a_3 = \frac{4T}{9\pi^3} \underset{T=\pi}{=} \frac{4}{9\pi^2}$

Ez a megoldás helyes

Mathematica-proved!

$k = 2l+1 \Rightarrow a_k = \frac{4T}{k^2\pi^3}$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T\left(1-\frac{x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{T}\left(x - \frac{x^2}{2\pi}\right)\Big|_0^T = \frac{2}{T}\left(T - \frac{T^2}{2\pi}\right) \overset{T=\pi}{=}$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\boxed{a_0 \underset{T=\pi}{=} 1}$$

Mathematicával ell.

Tehát

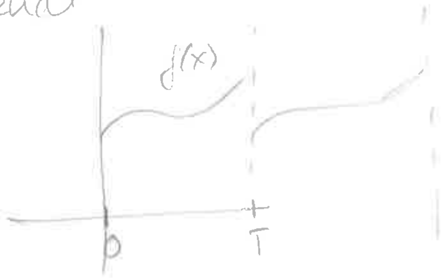
$$1-\frac{x}{\pi} \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{k\pi x}{T} \underset{T=\pi}{=}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos x + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3x) + ..$$

Math.-val ell.!

Tehát

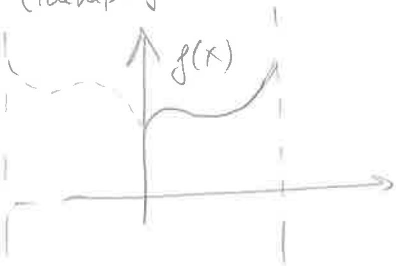


$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{2k\pi x}{T} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx$$

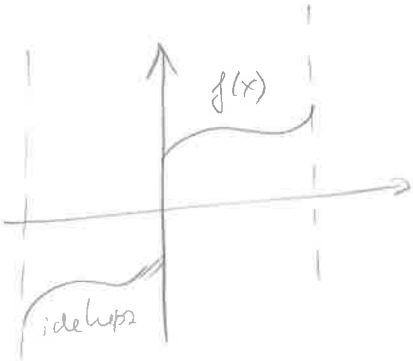
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2k\pi x}{T}\right) dx$$

(idehepzeljük)



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{T}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{k\pi x}{T} dx$$



$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{T}$$

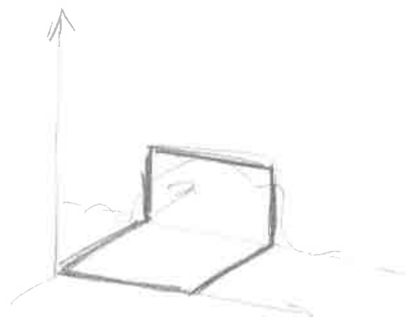
(itt az a_0 teljesen eltűnik)

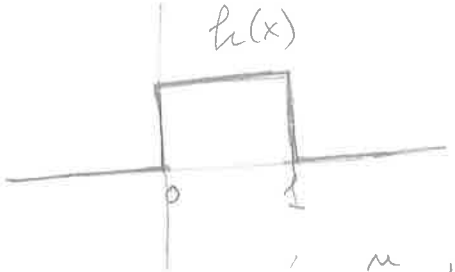
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{k\pi x}{T} dx$$

$$a_0 = \frac{2}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx = 0 \quad \text{mert } f \text{ páratlan}$$

Anal 3 gyak
PDE – Laplace
Fourier sor!

2





$$h(x) \cong \sum_{k=1}^{n} b_k \sin k\pi x$$

(a₀ nincs!)

$$b_k = 2\int_0^1 \sin k\pi x \, dx = \frac{-2}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 = +\frac{2}{k\pi}\left(1-\cos k\pi\right)$$

$$h(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k=2l+1}}^{n} \frac{4}{k\pi}$$

$$h(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin (2k+1)\pi x$$

$$\Delta u = 0$$

legyen $u(x,y) = f(x)\,g(y)$

$$\Delta u = f''g + fg'' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = \lambda}$$

$f(0)\,g(y) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$f(1)\,g(y) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$f(x)\,g(\cancel{0}) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$f(x)\,g(1) = h(x)$

$$\Downarrow$$

$$g(1) = \frac{h(x)}{f(x)}$$

Mathematica:

In = "FourierSinSeries[1, x, 5]"

$$\text{Out} = \frac{4\,\text{Sin}[x]}{\pi} + \frac{4\,\text{Sin}[3x]}{3\pi} + \frac{4\,\text{Sin}[5x]}{5\pi}$$

előbb legyen $f'' = -c^2 f$

$f(0) = f(1) = 0$

$f(x) = A \sin cx + B \cos cx$

$f(0) = B = 0$

$f(1) = A \sin c = 0 \Rightarrow c = k\pi$

$$\boxed{f(x) = A \sin k\pi x}$$

$$g'' = (k\pi)^2 g \quad \Rightarrow \quad g = C e^{k\pi y} + D e^{-k\pi y} \Big\} \Rightarrow C = -D$$

$$g(0) = C + D = 0$$

$$\Downarrow$$

$$g = 2C\, sh(k\pi y)$$

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g(1) &= \frac{h(x)}{f(x)} \end{aligned}\right\} \text{ezzel most nem foglalkozunk}$$

$$u_k(x,y) = \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

Ált. megoldás: $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$

$$u(x,1) = h(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, sh(k\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)$$

„b_k" lehet szebb lenne!

a_k → Fourier sin coeff's-ek

$$\Downarrow$$

$$\forall k: \; A_k = \frac{a_k}{sh(k\pi)}$$

tehát $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{sh(k\pi)} \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$

ahol $a_k = 2\int_0^1 h(x) \sin(k\pi x)\, dx$

$$\boxed{Csch(x) = \frac{1}{Sinh(x)}}$$

Mathematica megoldása:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^{k+1} + 1\right] \frac{1}{sh(k\pi)} \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

(u.a.)

Anal 3 gyak
PDE Laplace

2016-os feladatsor

(3) Laplace egyenlet + $u'_y(x,0)=0$

$u(x,1) = x^2 - x$

$u(0,y)=0$

$u(1,y)=0$

$f'' = -\lambda f$ $\quad u'_y = \left(f(x)\, g(y)\right)'_y = f(x)\, g'(y)$

$g'' = \lambda g$ $\quad u'_y(x,0) = \underline{f(x)\, g'(0) = 0} \Rightarrow g'(0)=0$

$f(x)\, g(1) = x^2 - x$

$f(0)=0$

$f(1)=0$

$\lambda = c^2$

$\begin{cases} f'' = -c^2 f \\ f(0)=f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{f = A \sin k\pi x}$

$g'' = (k\pi)^2 g$

$g = C e^{+k\pi y} + D e^{-k\pi y}$

$g' = Ck\pi e^{k\pi y} - Dk\pi e^{k\pi y} = 0$ ha $y=0$

$Ck\pi - Dk\pi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C=D}}$

$\boxed{g = 2D\, ch(k\pi y)}$

$u_k(x,y) = \sin k\pi x\, ch(k\pi y)$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, ch(k\pi y)$$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\, ch(k\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$$

$$b_k = 2\int_0^1 (x^2 - x) \sin k\pi x$$

$$x^2 - x \simeq 2\pi(-5+\pi^2) \sin \pi x$$
$$+ (\pi - \pi^3) \sin 2\pi x$$
$$+ \frac{2\pi}{27}(9\pi^2 - 15) \sin(3\pi x)$$

$$A_k = \frac{b_k}{ch(k\pi)}$$

bármilyen

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x) \frac{b_k}{ch(k\pi)} \sin(k\pi x)\, ch(k\pi y)$$

$$u'_y = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(x) \frac{b_k}{ch(k\pi)} (k\pi) \sin(k\pi x)\, sh(k\pi y)$$

nem vált.

$$u''_y(\cancel{x},0)$$

Dg*

$$u(x,y) = v(x+y,\, x-y)$$ ← láncszabály

$$u'_x = v'_x(x+y, x-y) + v'_y(x+y, x-y)$$

$$u''_{xx} = v''_{xx} + v''_{xy} + v''_{yx} + v''_{yy}$$

$$u'_y = v'_x - v'_y$$

$$u''_{yy} = v''_{xx} - v''_{xy} - v''_{yx} + v''_{yy}$$

$$\underbrace{\Delta u = 2\Delta v = 0}$$

2017-es kidolgozás

$u(0,y)=0$ $\quad u'_y(x,0)=0$ $u(1,y)=0$ $\quad u(x,1)=x^2-x$ Laplace $\quad \triangle 4$	Anal 3 PDE – Laplace

Laplace egyenlet

$u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

$u(0,y)=0 \quad u'_y(x,0)=0$
$u(1,y)=0 \quad u(x,1) = x^2-x$

2017-es kidolgozás

legyen $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$$\left.\begin{array}{l} u(0,y) = X(0)\,Y(y)=0 \\ u(1,y) = X(1)\,Y(y)=0 \end{array}\right\} \forall y\in[0,1] \Rightarrow X(0)=X(1)=0$$

$$u'_y(x,0) = X(x)\,Y'_y(0)=0 \Rightarrow Y'_y(0)$$
$\forall x\in[0,1]$

$$\Delta u = X''Y + XY''=0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

I. $X''=\lambda X$
$X(0)=0$
$X(1)=0$

II. $Y''=-\lambda Y$
$Y'_y(0)=0$

I. megoldása:
λ csak negatív lehet: $\lambda = -\alpha^2$
ekkor $X'' = -\alpha^2 X$

$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$

$X(0) = A = 0$

$X(1) = B\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$

tehát $\lambda = -(k\pi)^2$

$X(x) = B\sin(k\pi x)$

II. $Y''=(k\pi)^2 Y$
ekkor $Y(y) = Ce^{-k\pi y} + De^{k\pi y}$

$Y'_y(y) = -Ck\pi e^{-k\pi y} + Dk\pi e^{k\pi y}$

$Y'(0) = -Ck\pi + Dk\pi = 0$

$C = D$

$Y(y) = 2C\,\mathrm{ch}(k\pi y)$

tehát egy alapmegoldás: $u_k(x,y) = A_k\,\mathrm{ch}(k\pi y)\sin(k\pi x)$

ezért $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\mathrm{ch}(k\pi y)\sin(k\pi x)$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\mathrm{ch}(k\pi)\sin(k\pi x) \overset{!}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\pi x)$$

ahol $b_k = 2\int_0^1 (x^2-x)\sin(k\pi x)\,dx$

tehát $A_k = \frac{2}{\mathrm{ch}(k\pi)}\int_0^1 (x^2-x)\sin k\pi x\,dx$

(4)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \boxed{u(x,0) = \cos 2x} \\ u(x,\infty) = 0 \end{cases}$$

$u := X(x)Y(y) \Rightarrow X''Y + XY'' = 0$

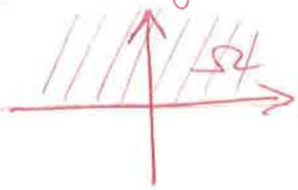
$X(x)\,Y(0) = \cos 2x$

$X(x)\,Y(\infty) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ezért $Y(\infty) = 0$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Laplace egyenlet a félsíkon



I $X'' = \lambda X$

$$X(x) = \frac{\cos 2x}{Y(0)}$$

↳ ebből lehet segíteni, hogy az exponenciális megoldás nem lesz jó mert az nem tud előállítani tetszőleges fv-t (esetünkben $\cos 2x$-t)

$\boxed{\text{tehát } \lambda = -\alpha^2}$

$X''(x) = -\alpha^2 X(x)$

$X(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$

II $Y'' = -\lambda Y$

$Y(\infty) = 0$ → ebből lehet segíteni, hogy a sin/cos megoldás nem lesz jó

$Y'' = \alpha^2 Y \Rightarrow Y(y) = Ae^{-\alpha y} + Be^{\alpha y}$

$Y(\infty) = 0$ ezért $B = 0$

$Y(y) = Ae^{-\alpha y}$

Tehát egy lehetséges alapmegoldás:

$$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\left(C_\alpha \cos \alpha x + D_\alpha \sin \alpha x\right)$$

Peremfeltétel:

$$u_\alpha(x,0) = C_\alpha \cos \alpha x + D_\alpha \sin \alpha x \overset{!}{=} \cos 2x$$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \alpha = 2 \\ D_2 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$ és minden más tag nulla!

tehát

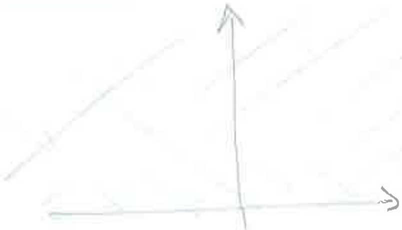
$$\boxed{u(x,y) = e^{-2y} \cos 2x}$$

félsík

5. Δ-höz

Laplace egyenlet : $\Delta u = 0$

$y > 0$ félsíkon



2016-os kidolgozás

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{(1a)} \\ u(x,0) = \cos(2x) & \text{(1b)} \\ \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0 & \text{(1c)} \end{cases}$$

→ Ezt kell megoldani

$\Longrightarrow$ $\Omega = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$

$\partial\Omega = \{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Megoldás. legyen $u(x,y) = \xi(x)\eta(y) \Rightarrow \Delta u = \underbrace{\xi''\eta + \xi\eta'' = 0}$

$\Downarrow$

$\lambda = \frac{\xi''}{\xi} = -\frac{\eta''}{\eta} \quad \forall (x,y)\in\Omega$

$\xi(x)\eta(0) = \cos(2x)$

$\xi(x)\underbrace{\lim\limits_{y\to\infty}\eta(y)}_{=0} = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ha $\lambda > 0$ vagyis $\lambda = \alpha^2$

$$\begin{cases} \eta'' + \alpha^2\eta = 0 & \text{(2a)} \\ \eta(\infty) = 0 & \text{(2b)} \end{cases}$$

→ most ezt kell megoldani

$(2a) \Rightarrow \eta = A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y)$

azonban ekkor $\eta(\infty) \neq 0$

tehát $\lambda > 0$ NEM jó ↯

ha $\lambda < 0$ vagyis $\lambda = -\alpha^2$

$$\begin{cases} \eta'' = \alpha^2\eta & \text{(3a)} \\ \eta(\infty) = 0 & \text{(3b)} \end{cases} \Rightarrow \eta = Ae^{-\alpha y} + Be^{+\alpha y}$$

$\eta(\infty) = Ae^{-\infty} + Be^{+\infty} \Rightarrow B = 0$

$s^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow s = \pm\alpha$

tehát $\boxed{\eta(y) = Ae^{-\alpha y}}$

$\xi'' = -\alpha^2\xi$

$\xi = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$

$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\left(A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)\right)$

$u_\alpha(x,0) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x) = \cos(2x)$

$\boxed{u(x,y) = e^{-2y}\cos(2x)}$

megj. ezesetben vagyon egyszerű:

$\xi(x) = \frac{\cos(2x)}{\eta(0)} = \frac{\cos(2x)}{A}$

$u(x,y) = \xi(x)\eta(y) = \frac{\cos(2x)}{A}Ae^{-\alpha y} = \cos(2x)e^{-\alpha y}$

$\boxed{u(x,y) = e^{-\alpha y}\cos(2x)}$

Azonban V.Z. nem így!

Ez a megoldás ROSSZ!

12. hét (szerda)
Laplace félsík

Rossz megoldás (szándékosan):

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta u = 0 \\ &u(x,0) = g(x) \\ &\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \end{aligned}} \longrightarrow u(x,y) = \xi(x)\eta(y) \implies \frac{\xi''}{\xi} = -\frac{\eta''}{\eta} = -\alpha^2$$

$$\xi(x)\eta(0) = g(x)$$

$$\xi(x) \underbrace{\lim_{y\to\infty}\eta(y)}_{=0} = 0$$

I $$\boxed{\begin{aligned} &\eta'' = \alpha^2\eta \\ &\lim_{y\to\infty}\eta(y) = 0 \end{aligned}} \implies \eta(y) = A e^{-\alpha y}$$

II $$\boxed{\begin{aligned} &\xi'' = -\alpha^2\xi \\ &\xi(x) = \frac{g(x)}{\eta(0)} \end{aligned}} \implies \boxed{\begin{aligned} &\text{ha:} \\ &\xi(x) = \frac{1}{A} g(x) \end{aligned}} \implies \xi''(x) = \frac{1}{A} g''(x)$$

nem elégíti ki $\underline{\xi'' = -\alpha^2\xi}$ -t

NA, ezért nem jó így!

még egy próba

$$\left.\begin{aligned} &u(x,y) := e^{-\alpha y} g(x) \\ &u''_{xx} = e^{-\alpha y} g''(x) \\ &u''_{yy} = \alpha^2 e^{-\alpha y} g(x) \end{aligned}\right\} \implies \Delta u = e^{-\alpha y}\underbrace{(g'' + \alpha^2 g)}_{???} \stackrel{?}{=} 0$$

Jó megoldás:

$$\xi(x) = A\sin(\alpha x) + B\cos(\alpha x) \longrightarrow \text{ez kielégíti } \boxed{\xi'' = -\alpha^2\xi} \text{-t}$$

$$u_\alpha(x,y) = e^{-\alpha y}\left(A_\alpha \sin(\alpha x) + B_\alpha \cos\alpha x\right) \longleftarrow \text{ezek összege is kielégíti a differenciál egyenletet}$$

$$u(x,y) = \int_0^\infty e^{-\alpha y}\left(A_\alpha \sin(\alpha x) + B_\alpha \cos(\alpha x)\right) d\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &u''_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u_\alpha \, d\alpha = \int_0^\infty u''_{\alpha_{xx}} \, d\alpha \\ &u''_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^\infty u_\alpha \, d\alpha = \int_0^\infty u''_{\alpha_{yy}} \, d\alpha \end{aligned}\right\} \implies \Delta u = \int_0^\infty \underbrace{\Delta u_\alpha}_{\substack{=0 \\ \forall\alpha>0}} d\alpha = 0$$

ha nem tűnödel, akkor:

$$g(x) = \int_0^\infty \left(\hat{g}_c(\alpha)\cos\alpha x + \hat{g}_s(\alpha)\sin\alpha x\right) d\alpha$$

cos. tr. sin. tr.

$$u(x,0) = \int_0^\infty A_\alpha \sin\alpha x + B_\alpha \cos\alpha x \, dx$$

Egységkörön:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u(x,y) = 0 \\ u(x,y) = g(x,y) \\ \text{ha } x^2+y^2 = R^2\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0 \\ w(R,\theta) = g(R\cos\theta, R\sin\theta) = \bar{g}(R,\theta) \\ w(r,0) = w(r,2\pi)\end{array}}$$ (2b) (2c)

ezt kell megoldani

$$w(r,\theta) = \rho(r)T(\theta)$$

$$\rho'' T + \frac{1}{r^2}\rho T'' + \frac{1}{r}\rho' T = 0 \Rightarrow \left(\rho'' + \frac{1}{r}\rho'\right)T + \frac{1}{r^2}\rho T'' = 0$$

$$\frac{\rho'' + \frac{1}{r}\rho'}{\rho} = -\frac{1}{r^2}\frac{T''}{T}$$

$$\boxed{\frac{r^2\rho'' + r\rho'}{\rho} = -\frac{T''}{T} = \lambda}$$

I $\lambda = \alpha^2$ $\qquad (2c) \Rightarrow T(0) = T(2\pi)$

$$T'' = -\alpha^2 T$$

$$T = A\cos(\alpha\theta) + B\sin(\alpha\theta) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} T(0) = A \\ T(2\pi) = A\cos(2\pi\alpha) + B\sin(2\pi\alpha)\end{array}\right\} =$$

tehát $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha = n$

II $r^2\rho'' + r\rho' = n^2\rho$

$$r^2\rho'' + r\rho' - n^2\rho = 0$$

Tehát az alapmegoldás:

$$w_n = r^n(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta)$$

II.1 ha $n = 0$

$$r^2\rho'' + r\rho' = 0$$

$$\boxed{\rho = A + B\ln r}$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho' = \frac{B}{r} \\ \rho'' = -\frac{B}{r^2}\end{array}\right\} r\rho' + r^2\frac{\rho''}{r^2} = 0$$

II.2. ha $n \neq 0$

$$r^2\rho'' + r\rho' - n^2\rho = 0$$

$$\boxed{\rho = Cr^n + Dr^{-n}}$$

$$\rho' = nCr^{n-1} - nDr^{-n-1}$$

$$\rho'' = n(n-1)Cr^{n-2} + n(n+1)Dr^{-n-2}$$

$$r^2\rho'' = (n^2-n)Cr^n + (n^2+n)Dr^{-n}$$

$$r\rho' = nCr^n - nDr^{-n}$$

$$Cn^2r^n + n^2Dr^{-n} = n^2\rho$$

Az alapmegoldásokból kikeverjük azt a függvényt ami a redéső értékeknek is eleget tesz.

$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$w(R,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \equiv \bar{g}(\theta)$$

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

$$A_0 = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\, d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{R^n} a_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{R^n} b_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin(n\theta)\, d\theta$$

---

pld:
$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta u = 0 \qquad R=1 \\ u(x,y) = y^2 \text{ ha } (x,y) \in \partial\Omega \end{array}}$$

$$\left[w(r,\theta)\right]_{r=1} = w(1,\theta) = \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$w(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$w(1,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \equiv \underbrace{\frac{1}{2}}_{A_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{A_2} \cos 2\theta$$

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} + r^2 \frac{1}{2} \cos 2\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + x^2 - y^2\right)$$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1+x^2-y^2}{2}}$$

$\Delta u = 0$

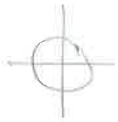
$u(x,y) = 2y$

$w(1,\theta) = 2\cos\theta \Rightarrow A_1 = 2$

$w(r,\theta) = 2r\cos\theta \Rightarrow u(x,y) = 2y$

ez elég egyszerű volt.

PDE | 12. hét (szerda) Laplace

$\Delta u = 0 \qquad \Omega =$ 

$u(x,y) = y^2$ ha $(x,y) \in \partial\Omega$ vagyis, ha $x^2+y^2=1$

Áttérés polárkoordinátákra: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$w(r,\theta) := u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\boxed{w''_{rr} + \frac{1}{r} w'_r + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} = 0 \quad (1)} \qquad w(r,\theta) = r^2 \sin^2\theta \quad \text{ha } r^2 = 1$$

Tehát a peremfeltétel így: $\underline{w(1,\theta) = \sin^2\theta}$

További feltételek: $\underline{w(r,0) = w(r,2\pi)}$

Legyen $w(r,\theta) = R(r)T(\theta) \implies R(r)\underline{T(0)} = R(r)\underline{T(2\pi)} \ \forall r$

Ekkor az (1)-es egyenlet: $R''T + \frac{1}{r} R'T + \frac{1}{R^2} RT'' = 0$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\text{I} \quad \boxed{T'' = -\lambda T} \qquad \text{II} \quad \boxed{\begin{array}{l} r^2R'' + rR' = \lambda R \\ \text{ú. h. } T(0) = T(2\pi) \end{array}}$$

1. eset $\lambda < 0$

legyen $\lambda = -\alpha^2$

I ekkor $T(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}$

$$T(0) = A + B \stackrel{!}{=} Ae^{2\alpha\pi} + Be^{-2\alpha\pi} = T(2\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$A = -B\,\frac{e^{-2\alpha\pi} - 1}{e^{2\alpha\pi} - 1}$$

$$T(0) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left(\operatorname{sh} 0 - \operatorname{sh}(-2\alpha\pi)\right) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1} \operatorname{sh}(2\alpha\pi)$$

$$T(2\pi) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left(\operatorname{sh}(2\alpha\pi) - \operatorname{sh} 0\right) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1} \operatorname{sh}(2\alpha\pi)$$

$$T(\theta) = B\left(e^{-\alpha\theta} - e^{\alpha\theta}\,\frac{e^{-2\alpha\pi}-1}{e^{2\alpha\pi}-1}\right) = B\,\frac{1}{e^{\alpha}-1}\left(e^{-\alpha(\theta-2\pi)} - e^{-\alpha\theta} - e^{\alpha(\theta-2\pi)} + e^{\alpha\theta}\right.$$

$$= \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[\operatorname{sh}(\alpha\theta) - \operatorname{sh}(\alpha(\theta-2\pi))\right]$$

Nem kaptam semmi féle összeférhetetlenséget (eddig)

majd: NEM diszkrét megoldás

Laplace
2017

Ellenőrzés :

$$T'(\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[ch(\alpha\theta)\cdot\alpha - ch(\alpha(\theta-2\pi))\cdot\alpha\right]$$

$$T''(\theta) = \alpha^2\frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right] = \alpha^2 T(\theta) \checkmark$$

II $\quad r^2R'' + rR' + \alpha^2 R = 0 \longleftarrow$ dsolve-al: (Matlab)

$$R(r) = C\cos(\alpha \ln r) + D\sin(\alpha\ln r)$$

legyen $r := e^{\xi}$

$$\bar{R}(\xi) = C\cos(\alpha\xi) + D\sin(\alpha\xi)$$

lehet, hogy erre más szebb

$$w(r,\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right]\left(C\cos(\alpha\ln r) + D\sin(\alpha\ln r)\right)$$

emiatt nem lesz diffható origó körül!

$$w_\alpha(1,\theta) = \frac{2B}{e^{\alpha}-1}\left[sh(\alpha\theta) - sh(\alpha(\theta-2\pi))\right]C$$

előállítható-e a $\sin^2\theta$ ilyen függvényekből
(nem hiszem, hogy igen)

---

2. eset $\lambda > 0$ legyen $\lambda = \alpha^2$

I $\quad T''(\theta) = -\alpha^2 T(\theta)$

$$T(\theta) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

$$T(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$$

$$T(2\pi) = A\cos 2\alpha\pi + B\sin 2\alpha\pi$$

$$A = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi)$$

$$A = B\frac{\sin(2\alpha\pi)}{1-\cos(2\alpha\pi)}$$

túl bonyolult.

ha $T(\theta)$ periodikus 2π szerint, akkor $T(0) = T(2\pi)$ ✓ $\Big\} \Rightarrow \alpha = n \in \mathbb{N}$

9

II $\quad r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$

ha $n = 0$, akkor

$$r^2 R'' + r R' = 0 \quad \Big| \int \qquad \text{ha } R(r) = D_0 \ln(r) + C_0$$

$$\text{akkor } R'(r) = \frac{D_0}{r}$$

$$R''(r) = -\frac{D_0}{r^2}$$

$$\cancel{\int r^2 R'' dr + \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - 2\int r R' dr + \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - \int r R' dr = 0}$$

$$\cancel{r^2 R' - r R + \int R dr = 0}$$

ha $n > 0$

$$r^2 R'' + r R' - n^2 R = 0$$

$$(r^n)' = n r^{n-1}$$

$$(r^n)'' = n(n-1) r^{n-2}$$

$$r^n (n^2 - n) + n r^n - n^2 r^n = 0 \quad \text{valóban}$$

---

tehát $\quad w(r, \theta) = r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \right)$

+ BÓNUSZ feladat

A pozitív síknegyedben keressük a Laplace egyenlet megoldását az egységkör ide eső részén.

$$\Omega = \{ (x,y) : \ 0 < x^2+y^2 < 1, \ x,y>0 \}$$

Az egyenlet:

(1) $$u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \qquad (x,y) \in \Omega$$

A peremfeltételeket a polárkoordinátákban adjuk meg:

$$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(2) $$w(r,0) = 0 \qquad 0 \le r \le 1$$

(3) $$w(r,\pi/2) = 0 \qquad 0 \le r \le 1$$

(4) $$w(1,\theta) = \sin(2\theta) \qquad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Írjuk fel (1), (2), (3), (4) feladat megoldását.

Anal 3 NagyZH 2. BONUSZ feladata

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1 \,;\, x,y>0\}$$

$$\boxed{u''_{xx}+u''_{yy} = u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta} \quad (\Delta p)}$$

$$\Downarrow$$

$$r^2u''_{rr} + r u'_r + u''_{\theta\theta} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$r^2R''T + rR'T + RT'' = 0$$

$$\Downarrow$$

$$T(r^2R''+rR') = -RT''$$

$$\frac{r^2R''+rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{II} \quad r^2R''+rR'-\lambda R = 0 \\ \text{I} \quad T''+\lambda T = 0 \end{array}}$$

(1) $\Delta u = 0 \quad \forall (x,y)\in\Omega$

$w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

(2) $w(r,0) = 0$ } $r\in[0,1]$

(3) $w(r,\frac{\pi}{2}) = 0$

(4) $w(1,\theta) = \sin(2\theta)$

Megoldás:

$R(r)T(0) = 0$ $\forall r \Rightarrow \underline{T(0)=T(\frac{\pi}{2})=0}$

$R(r)T(\frac{\pi}{2}) = 0$

I $\quad T''+\lambda T = 0 \iff T'' = -\lambda T$

$T(0) = T(\frac{\pi}{2}) = 0$

csak ha $\lambda = s^2 \Rightarrow T(\theta) = A\cos(s\theta)+B\sin(s\theta)$

$T(0) = \boxed{A=0}$

$T(\frac{\pi}{2}) = B\sin(s\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \underline{s=2k}$ (páros szám)

Tehát $\lambda = (2k)^2$

$T(\theta) = B\sin(2k\theta)$

II $\quad r^2R''+rR'-(2k)^2R = 0$

$k=0$: $R_0(r) = C_0 + \cancel{D_0 \ln r}$

ell: $R_0' = \frac{D_0}{r}$; $R_0'' = -\frac{D_0}{r^2}$

$k\neq 0$: $R_k(r) = C_k r^{+2k} + D_k r^{-2k}$

ell: $R_k' = 2kC_k r^{2k-1}$

$R_k'' = (2k)(2k-1)C_k r^{2k-2} = [(2k)^2-2k]C_k r^{2k-2}$

mivel $r=0$ eset is lehet $\Rightarrow D_k = 0$

Alapmegoldás:

$w_k(r,\theta) = T(\theta)R(r) = r^{2k}\sin(2k\theta)$

$w_0(r,\theta) = 1\cdot\sin 0 = \underline{0}$

A megoldás ezekből összekeverésével:

$$w(r,\theta) = \cancel{C_0} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{2k}\sin(2k\theta)$$

13. hét

Anal 3 nagyZH 2. BONUSZ fel

12

tehát $\boxed{w_k(r,\theta) = r^{2k}\sin(2k\theta)}$ $k \neq 0$

ell: $w'_{k\,r} = 2k\, r^{2k-1}\sin(2k\theta)$ $\quad | \cdot r$

$w''_{k\,rr} = (2k)(2k-1)\, r^{2k-2}\sin(2k\theta)$ $\quad | \cdot r^2$

$w''_{k\,\theta\theta} = -(2k)^2 r^{2k}\sin(2k\theta)$

$$r^2 w''_{k\,rr} + r w'_{k\,r} + w''_{k\,\theta\theta} = r^{2k}\sin(2k\theta)\left[2k + (2k)^2 - 2k - (2k)^2\right] = 0 \checkmark$$

$w_k(r,0) = 0 \checkmark$

$w_k(r,\frac{\pi}{2}) = r^{2k}\sin(2k\frac{\pi}{2}) = 0 \checkmark$

Megoldás összetákolása:

$$\boxed{w(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^{2k}\sin(2k\theta)}$$

kielégíti (1_p)-t
(2)-t
(3)-t
DE a (4)-t MÉG NEM

$$w(1,\theta) = \sum_{k=1} C_k \sin(2k\theta) == \sin(2\theta)$$

$\Downarrow$

$C_{k\neq 1} = 0, \quad C_1 = 1$

Tehát $\boxed{w(r,\theta) = r^2\sin(2\theta)}$

$\hookrightarrow$ ez a megoldása az $(1p, 2, 3, 4)$-nek.

Áttérés Cartesian k.r.-be:

$$w(r,\theta) = r^2\, 2\cdot\sin\theta\cos\theta = 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2xy$$

$\boxed{u(x,y) = 2xy}$ $\longrightarrow$ kielégíti (1)-t
(2)-t $(x=0)$
(3)-t $(y=0)$
(4)-t (polár k.r.-ben ellen., elég)

Fourier transform

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x s}\, dx \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)\, e^{2\pi i x s}\, ds\end{aligned}}$$

$$= \int_0^{\infty} -f(x)\, e^{-2\pi i x s}\, dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-2\pi i xs} = \cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs \Rightarrow \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs\right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)(\ldots)\, dx + \int_0^{\infty} f(x)(\ldots)\, dx =$$

$$= -\int_0^{\infty} f(-x)\left(\cos 2\pi xs + i \sin 2\pi xs\right) dx + \int_0^{\infty} f(x)\left(\cos 2\pi xs - i \sin 2\pi xs\right) dx =$$

Fourier series:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = (*)$$

$$\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2} \quad \text{mert} \quad \frac{\cos a + \cancel{j \sin a} + \cos a - \cancel{j \sin a}}{2} = \cos a.$$

$$\sin(a) = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$$

$$(*) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{jnx} + e^{-jnx}}{2} + b_n \frac{e^{jnx} - e^{-jnx}}{2j} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j}\right) e^{jnx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j}\right) e^{-jnx} =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - b_n j)}_{c_n} e^{jnx} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + b_n j)}_{\bar{c}_n = c_{-n}} e^{-jnx} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnx}, \quad \text{ahol} \quad c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cos nx - j f(x) \sin nx\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-jnx}\, dx$$

Fourier Tr. trigonometriai formai

$$f(x) = \int_0^\infty \left(a_u \cos 2\pi u x + b_u \sin 2\pi u x\right) du$$

$$a_u = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos 2\pi u x \, dx$$

$$b_u = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin 2\pi u x \, dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty a_u \frac{e^{2u\pi jx} + e^{-2u\pi jx}}{2} + b_u \frac{e^{2u\pi jx} - e^{-2u\pi jx}}{2j} \, du =$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_u - \frac{j}{2} b_u\right)}_{c_u} e^{2u\pi jx} + \left(\frac{1}{2} a_u + \frac{j}{2} b_u\right) e^{-2u\pi xj} \, du$$

$$c_u = \frac{1}{2} \cdot 2\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) \cos 2\pi u x - j f(x) \sin 2\pi u x\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi u x} dx$$

Tehát

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} df$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} df$$

$$X_c(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t \, df$$

$$X_s(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t \, df$$

$$x(t) = \int_0^\infty \left(X_c(\omega) \cos \omega t + X_s(\omega) \sin \omega t\right) df$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{jxs} ds$$

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-jxs} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(s) \cos(xs) + \hat{f}_s(s) \sin(xs) \, ds$$

$$\hat{f}_c(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(xs) \, dx$$

$$\hat{f}_s(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(xs) \, dx$$

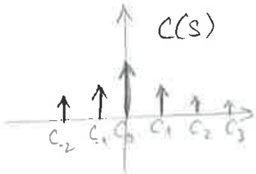
$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right)dx \end{aligned}}$$

Klasszikus Fourier sor.

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{+j\frac{2n\pi}{T}x} \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-j\frac{2n\pi}{T}x}\,dx \end{aligned}} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} c(s)\, e^{j\frac{2s\pi}{T}x}\,ds}$$

Klasszikus Fourier sor exp. alakban

$$\boxed{C(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \delta(s-n)}$$



legyen $\bar{s} = \dfrac{2\pi s}{T}$, $d\bar{s} = \dfrac{2\pi}{T}ds$ $\Big\}$ integrálási vált. csere

$$\cancel{f(x) = \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} c\left(\frac{T\bar{s}}{2\pi}\right) e^{j\bar{s}x}\,d\bar{s}} =$$

$$\cancel{= \frac{T}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\left(\int_0^T f(x)\, e^{-j\frac{2\pi n}{T}x}\,dx\right)\delta(s-n)\right] e^{j\bar{s}x}\,d\bar{s}} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s-n)\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(s)\ e^{j\frac{2\pi}{T}sx}\,ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} \delta(s-u)\ \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi u}{T}x}\, dx \right) e^{j\frac{2s\pi}{T}x} ds$$

legyen $\bar{s} = \frac{2\pi}{T} s$

$d\bar{s} = \frac{2\pi}{T} ds$

$ds = \frac{T}{2\pi}\, d\bar{s}$

$$= \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{T}{2\pi}\bar{s} - u\right) \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi u}{T}} dx \quad e^{j\bar{s}x}\, d\bar{s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{T}{2\pi} s - u\right) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, e^{-j\frac{2\pi u}{T}} dx \right)}_{\mathcal{F}\{\text{periodikus fv.}\}} e^{jsx}\, dx =$$

Landau-Lifschitz-Gilbert egyenlet
↳ micromagnetic module
$\boxed{\text{spin waves}}$

} Áron előadása (Csurgay Árpád doktorandusza)

Laplace egyenlet, ha Ω az egységkör

$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 \}$

$\partial\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \}$

$\Delta u = 0$ Ω-ban

$u(x,y) = g(x,y)$ $\partial\Omega$-ban

peremfelt: $v(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$v(1,\theta) = g(\cos\theta, r\sin\theta) = \bar{g}(\theta)$

polár koordinátákban:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$\Rightarrow v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$r \in [0,1]$
$\theta \in [0,2\pi]$

$v'_r = u'_x \cos\theta + u'_y \sin\theta$

$v''_{rr} = u''_{xx}\cos^2\theta + u''_{yy}\sin^2\theta + 2u''_{xy}\cos\theta\sin\theta$

$v'_\theta = -u'_x r\sin\theta + u'_y r\cos\theta$

$v''_{\theta\theta} = \cancel{-u''_{xx} r^2\cos\theta - u''_{yy} r^2\sin\theta - u''_y}$
$= \cancel{u''_{xx} r^2\sin\theta\cos\theta} -$

} elég bonyolult számítás

$v''_{\theta\theta} =$

Δ egyszerűsödik: Laplace egyenlet polárkoordinátákban

(3) $\boxed{r^2 v''_{rr} + r v'_r + v''_{\theta\theta} = 0}$ → $v(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$

$v'_r = R'(r)\,T(\theta)$
$v''_{rr} = R''(r)\,T(\theta)$

$\Rightarrow \boxed{r^2 R''T + rR'T + RT'' = 0}$

hét 3 -1-
12. hét e.a

$$T(r^2R'' + rR') = -T''R$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda \quad (\text{konst})$$

$$r^2 R'' + r R' = +\lambda R$$

$$\left. \begin{array}{l} T'' = -\lambda T \\ \underline{\lambda = \alpha^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{T = A \sin(\alpha\theta) + B \cos(\alpha\theta)}$$

2π szerint periódikus kell legyen

mert $T(0) = T(2\pi)$

$\Downarrow$

$\alpha \in \mathbb{N}$

$\lambda = n^2$

$$\boxed{r^2R'' + rR' - n^2 R = 0}$$

II rendű Euler egyenlet

$n = 0$-ra: $R(r) = C_0 + \underbrace{D_0 \ln(r)}_{}$

ez nem jó, miért is? Mert $r = 0$-ra is legyen értelme!

$n \neq 0$-ra: $R(r) = C_n r^n + \cancel{D_n r^{-n}}$

tehát $\boxed{R_n(r) = C_n r^n}$

n-edik alapmegoldása a (3)-nak:

$$v_n(r,\theta) = r^n\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

$$v(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right)$$

$$v(1,\theta) = g(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)$$

ez a $g(\theta)$-nak a Fourier sorfejtése.

pld:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (x,y) \in B_1 \\ u(x,y) = y^2 \end{cases}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$w(1,\theta) = \left[r^2 \sin^2\theta\right]_{r=1} = \left[\frac{r^2}{2}(1-\cos 2\theta)\right]_{r=1} = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2\theta$$

A_0 B_2

ez itt az A_2

ha hamar meg is kellene hogy $u(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2)$

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} + \cancel{\tfrac{r^2}{2}}\, r^2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2\theta)$$

miért van itt cos?

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(1-2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = \frac{1}{2}(1-x^2+y^2)$$

Áll (Poisson formula)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & (x,y) \in B_1 \\ u = g & \partial B_1\text{-en} \end{array}}$$

Fontos.

$$w(r,\theta) = \int_0^{2\pi} K(r,\theta,\varphi)\, g(\varphi)\, d\varphi$$

Poisson kernel: $K(r,\theta,\varphi) = \dfrac{1-r^2}{2(1-2r\cos\alpha + r^2)\pi}$

$\alpha = \theta - \varphi$

Áll: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, nyílt

határa $\partial\Omega = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b]\}$

Ekkor $\exists\, G(x,y,t)$ melyre

$\Delta u = 0$ Ω-n

$u = g$ $\partial\Omega$-n,

akkor $u(x,y) = \displaystyle\int_a^b G(x,y,t)\, g(\gamma(t))\, dt$

(M) hasonlít igaz a Neumann felt.-re is.

(displacement)

$G: \Omega \times [a,b] \to \mathbb{R}$ „Ω sajátja"

Green fv-e Ω-nak

Spec: B_1-re G a Poisson mag

+Péld: $\Omega = \{(x,y) \quad x \in R, \; y > 0\}$

$\Delta u = 0$

$\partial\Omega$-n: $\quad u(x,0) = g(x)$

Áll: $\quad u(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{(x-t)^2 + y^2}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi} \cdot \frac{g(\xi)}{(x-\xi)^2 + y^2}\, d\xi$

Hővezetés egyenlet (heat eq.)

$u(x,t) \qquad u(x,0) = f(x)$

Áll: $\boxed{u'_t = k^2 u''_{xx}}$

1. változók szétválasztása. (Ilyet már láttunk)

Mo: frekvencia tartományban oldjuk meg.

$\mathcal{F}\{u(x,t), s\} = \hat{u}(s,t)$

Figyelem $\mathcal{F}\{u'_x(x,t), s\} = js\, \hat{u}(x,t)$

$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}\{u(x,t), s\} = -k^2 s^2 \mathcal{F}\{u(x,t), s\}$

$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(s,t) = k^2 (js)^2 \hat{u}(s,t)$

Figyelem, csak 1. rend!

$\dot{\hat{u}}(s,t) = -k^2 s^2 \hat{u}(s,t) \rightsquigarrow \dot{v}(s,t) = -k^2 s^2 v(s,t)$

~~$v(s,t) = A(s) \cos(kst) + B(s) \sin(kst)$~~

$\cancel{\frac{\dot{\hat{u}}(s,t)}{u(s,t)} = -k^2 s^2}$

$v(s,t) = C(s)\, e^{-k^2 s^2 t}$

$t = 0$-ban $\quad v(s,0) = C(s) =$ konst

$C(s) = \hat{f}(s)$

$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-s^2 t}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathcal{F}(f*g) = \hat{f}\cdot\hat{g}$$

Alaptul : $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{s^2}{2}}$

Átskálázás : $\mathcal{F}(f(ax), s) =$

$$\mathcal{F}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}}_{g(t)}\Big) = e^{-s^2 t}$$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\cdot\hat{g}(s) \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f*g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)\,g(z)\,dz$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\,dy}_{\mathbb{E}(f(\xi)) \text{ ahol } \xi\sim N(x,\sqrt{2t})}$$

így szemléletesen lehet az eloszlást így val. vált. függvényeként.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, f(x)\,dx = f(0)$$

ha $f(y) = \delta(y)$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

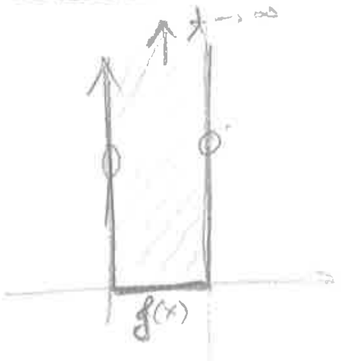
2. feladat

véges rúd $0 \le x \le 1$ a rúd két végén :

$u(1,t) = u(0,t) = 0$

$u'_t = k^2 u''_{xx}$ $\quad 0 < x < 1$

$0 < t$



+ kezdeti felt. $u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

Mo: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$W(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$$

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0$$

$$(r^2R'' + rR')\,T = -RT''$$

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}$$

$\underline{\text{I}}$ $T'' = -\lambda T$ $\qquad\qquad$ $\underline{\text{II}}$ $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$

$T(\theta)$ periodikus

2π szerint!

Jutcább az a cél, hogy $T(0) = T(2\pi)$ $\Big\} \Rightarrow \lambda = \alpha^2$

$$T(\theta) = A\cos(\alpha\theta) + B\sin(\alpha\theta)$$

$$T(0) = A\cos(0) \cancel{+ B\sin(0)} = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi) = T(2\pi)$$

$$A = A\cos(2\alpha\pi) + B\sin(2\alpha\pi)$$ pld ha $\alpha \in \mathbb{N}$

Áll. Tétel

$\Omega \subset \mathbb{R}^2 \qquad \partial\Omega = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$

$\exists\, G : \Omega \times [a,b]$ Green fv:

$$u(x,y) = \int_a^b \underbrace{G(x,y,t)}_{\text{tartomány sajátossága}}\, f(t)\,dt$$

Hővezetés: $$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

$\hookrightarrow \mathbb{E}(f(\xi)) \qquad \xi \sim \mathcal{N}(x, 4t^2)$

Anal 3 ea PDE 2

Analízis III. 11. heti feladatok
2015. december 4.

PDE 3. rész. Laplace egyenlet (folyt). és Hővezetés egyenlete.

1. (Múlt hétről újra kitűzve.) Oldjuk meg a Laplace egyenletet az egységkör belsejében az alábbi Dirichlet peremfeltétellel:

$$u(x,y) = 2y, \qquad \text{ha } x^2 + y^2 = 1.$$

(+)

A Laplace egyenletet polárkoordinátákban: $w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0$, *ha* $w(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

2. (Múlt hétről újra kitűzve.) Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1) \times (0,1)$ négyzeten az alábbi feltételekkel:

$u(x,0)=g(x)$

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0 \quad \text{(derivált van adva!)} \\ u(x,1) &= x^2 - x \\ u(0,y) &= 0 \\ u(1,y) &= 0 \end{aligned}$$

$X \cdot Y' = 0$ $\quad Y'(0)=0$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét végtelen rúdban az alábbi feltételekkel:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Hogyan terjed a szakadás az időben?

4. Tekintsük a hővezetés egyenletét véges rúdban az alábbi feltételekkel:

$$u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty),$$

$$u(x,0) = f(x),\ x \in (0,1), \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0,\ \forall t > 0.$$

Igazoljuk, hogy a megoldás: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x$, ahol A_n az f függvény Fourier együtthatói:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x, \qquad A_n = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x\, dx.$$

5. (*Tartalék feladat*) Igazoljuk egy speciális esetben, hogy a Laplace egyenlet invariáns a lineáris transzformációra. Tegyük fel, hogy $\triangle u(x,y) = 0$, ha $(x,y) \in \Omega$. Legyen továbbá

$$\overline{x} = ax, \qquad \overline{y} = ay, \qquad U(\overline{x}, \overline{y}) = u(x,y),$$

ahol a U függvény ÉT-a $\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \ :\ (x,y) \in \Omega\}$. Igazoljuk, hogy $\triangle U = 0$ az új koordinátákban az $\overline{\Omega}$ tartományban.

D6* (A Laplace-egyenlet invariáns a forgatásra) Tfh $u(x, y)$ függvény harmonikus az $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartományon. Tekintsünk egy φ szögű forgatást a síkon, Az új koordináták:

$$\overline{x} = x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) \qquad \overline{y} = x \cdot (-\sin(\varphi)) + y \cdot \cos(\varphi).$$

Az új koordináta rendszerben a függvény $U(\overline{x}, \overline{y}) = u(x, y)$. Igazoljuk, hogy U is harmonikus $\overline{\Omega}$-n, ahol $\overline{\Omega} = \{(\overline{x}, \overline{y}) \ : \ (x, y) \in \Omega\}$.

D7* (*Előadáson elhangzott szorgalmi HF.*) Tfh $u(x, t)$ kétszer folytonosan differenciálható $(0, 1) \times (0, \infty)$-ben, folytonos $[0, 1) \times [0, \infty)$-ben, és megoldása a hővezetés egyenletének az alábbi feltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t) \qquad t > 0,\ x \in (0,1) \\ u(x,0) &= f(x) \qquad x \in (0,1) \\ u'_x(0,t) = 0, & \qquad u'_x(1,t) = 0. \qquad t > 0 \end{aligned}$$

Beláttuk, hogy ekkor az "összes hőmennyiség" időben konstans, azaz

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \int_0^1 u(x,0)dx = \mathcal{T}(0) \qquad \forall t > 0.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $t \to \infty$ esetén a rúd hőmérséklete homogén lesz:

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \mathcal{T}(0) \qquad \forall x \in (0,1).$$

$$\mathcal{F}(f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx$$

$$\mathcal{F}(f(x), s) = \hat{f}(s) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cancel{f(x)} d\xi$$

$$\mathcal{F}(f(ax), s) =$$

Analízis III. 12. heti feladatok
2015. december 11.

PDE 4. rész. Hővezetés, folytatás.

1. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= x^2-x \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u'_x(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

2. Definiáljuk az előző feladathoz kapcsolódóan az *összes hőenergiát*:

$u'_t = u''_{xx}$ $\quad t>0,\ 0<x<1$

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\,dt.$$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz

$$\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

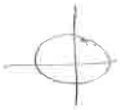
$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= \begin{cases} x, & x\in[0,1/2) \\ 1-x, & x\in[1/2,1] \end{cases} \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

(+) Euler egyenlet [illegible]

$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$

Adott $R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$

(1) $\Delta u = 0$

$u(x,y) = g(x,y) = 2y$ ha $(x,y) \in B_1$  egységkör

$u(x,y) \rightsquigarrow v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$v(r,\theta) = R(r)\,T(\theta)$

$\Delta u = 0 \equiv \boxed{v''_{rr} + \frac{1}{r^2} v''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} v'_r = 0}$

$\Downarrow$

$R = A_0 + B_0 \ln(r) \xleftarrow{n=0}$ $\boxed{r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0}$ Euler egy.

$R = A_n r^n + B_n r^{-n} \xleftarrow{n \neq 0}$

(2) $\Delta u = 0$

$u'_y(x,0) = 0$

$u(x,1) = x^2 - x$

$u(0,y) = u(1,y) = 0$

(3) $u'_t = u''_{xx} \quad t > 0$

$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ Fourier trafó x szerint

(4) $u'_t = u''_{xx} \quad t > 0$

$x \in (0,1)$

$u(x,0) = x^2 - x$

$u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0$

Hővezetés egyenlete ∞ hosszú rúdban

$$\boxed{\begin{aligned} u'_t &= b^2 u''_{xx} \quad (1a) \\ u(x,0) &= f(x) \quad (1b) \end{aligned}}$$ ← ezt kell megoldani $t \in \mathbb{R}_+$-ra

feltevés: $\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t)\,dx < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad (C1)$

legyen $\hat{u}(s,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-jxs}\,dx$

$$\mathcal{F}\{u'_x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u'_x\, e^{-jsx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\cancel{u e^{-jsx}\Big|_{-\infty}^{\infty}} - (-js)\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-jsx}\,dx \right)$$

$$= js\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u\, e^{-jsx}\,dx = js\,\mathcal{F}\{u\}$$

$$\mathcal{F}\{u''_{xx}\} = (js)^2\,\mathcal{F}\{u\} = -s^2\,\mathcal{F}\{u\}$$

$u'_t = b^2 u''_{xx} \quad \Big|\ \mathcal{F}\{\cdot\} \Rightarrow \boxed{\hat{u}'_t = -b^2 s^2 \hat{u}}$

$\Downarrow$

$\hat{u} = C\, e^{-b^2 s^2 t}$

$\xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}}$

$$\boxed{u = \frac{1}{b\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4b^2 t}}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u} = C\, e^{-\frac{(b\sqrt{2t}\,s)^2}{2}}$$

$\dot{v} = -b^2 s^2 v$

$\int \frac{\dot{v}}{v}\,dt = -b^2 s^2 t + A$

$\ln|v| = -b^2 s^2 t + A$

$v = \pm e^{-b^2 s^2 t}\, e^{A}$

$\boxed{v = C\, e^{-b^2 s^2 t}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{u}'_t &= -b^2 s^2 \hat{u} \\ \hat{u}(s,0) &= \hat{f}(s) \end{aligned}} \Rightarrow \hat{u}(s,t) = C \cdot e^{-b^2 s^2 t}$$

$\hat{u}(s,0) = C = \hat{f}(s)$

$\Downarrow$

$\boxed{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-b^2 s^2 t}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(x) * \frac{1}{b\sqrt{2t}}\, e^{-\frac{x^2}{4b^2 t}} = \frac{1}{2b\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b^2 t}}\,d\xi$$

$\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(as)$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \cdot \hat{g}$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2b\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4b^2 t}}\,d\xi}$$

Hővez 1

tanul 12 ... PDE ...

Hővezetés (kinta)

Megoldandó PDE

$$\begin{cases} u'_t = k\, u''_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

feltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$

$\xrightarrow{\mathcal{F}}$

Elsőrendű ODE (szétválasztható vált.-jú)

$$\begin{cases} \hat{u}'_t = -ks^2 \hat{u} \\ \hat{u}(s,0) = \hat{f}(s) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\, e^{-ks^2 t}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f * g \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}\cdot\hat{g}} \Longrightarrow \quad u(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(s)\} * \mathcal{F}^{-1}\{e^{-ks^2 t}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(ax)} \\ \boxed{e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{s^2}{2}}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\, s)^2}{2}} = e^{-kts^2}$$

tehát $\mathcal{F}^{-1}\{e^{-kts^2}\} = \dfrac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(x) * \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\, dy}$$

$\rightarrow E f(\xi)$ ahol $\xi \sim \mathcal{N}(x, \sqrt{2kt})$

$\rightarrow$ ez a megoldása a PDE-nek!

tehát $u(x,t) = (f * g)(x,t)$; ahol $\boxed{g(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt\pi}}}$

$$\left.\begin{array}{ll} g\text{-re}: & 1^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)\, dx = 1 \quad \forall t > 0 \\ & 2^\circ \quad \lim_{t\to 0} g(x,t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{t\to 0} g(x,t) = \delta(x)$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4kt}}}_{g(y,t)}\,dy$$

Hővezetés egyenlet megoldása!

T

$$\boxed{\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\,dy = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}}\right)^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz = 1 \quad \forall t>0 \text{ ra}$$

Biz 1°

$$z = \frac{y}{2\sqrt{kt}}$$

$$dy = 2\sqrt{kt}\,dz$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} g(y,t)\,dy = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\,dy = 1 \quad \forall t>0}$$

$$L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4kt}} = \infty \quad \text{ha } \underline{y=0}$$

ha $y \neq 0$, akkor:

$$L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{4kt}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\frac{k\pi\cdot h^2 y^2}{4k}}}\, e^{-\frac{y^2}{\frac{4k\cdot h^2\cdot y^2}{4k}}} =$$

legyen $t = \frac{h^2}{4k}\cdot y^2$

$h>0$ ha $t\to 0$ akkor $h\to 0$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{y h\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{h^2}} =$$

$$= \frac{1}{y\sqrt{\pi}}\lim_{x\to\infty} x\, e^{-x^2} = \frac{1}{y\sqrt{\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}} = 0$$

legyen $x = \frac{1}{h}$

$x \to \infty$

Biz 2°

tehát $\left.\begin{array}{l} L(0) = \infty \\ L(y) = 0 \quad \forall y \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} L(y)\,dy = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{L(y) = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-\frac{y^2}{4kt}}}{2\sqrt{kt\pi}} = \delta(y)}$

tehát $g(y,t)$ a Dirac deltához tart, ha $t \to 0_+$

Hőmér 2

$u'_t = k\,u''_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

Hővezetés

Hővezetés egyenlete Fourier trafóval (végtelen rúdban)

$$\begin{cases} u'_t = k\, u''_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \qquad x\in\mathbb{R} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} \begin{cases} \hat{u}'_t = -ks^2\hat{u} \\ \hat{u}(s,0) = \hat{f}(s) \end{cases}$$

Fourier trafó tulajdonságok:

$$u'_x \rightsquigarrow is\,\hat{u}$$

$$u''_{xx} \rightsquigarrow -s^2\hat{u}$$

$$g(\alpha x) \rightsquigarrow \frac{1}{\alpha}\hat{g}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{\beta} g\left(\frac{x}{\beta}\right) \rightsquigarrow \hat{g}(\beta s)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \rightsquigarrow e^{-\frac{s^2}{2}}$$

$$f*g \rightsquigarrow \sqrt{2\pi}\,\hat{f}\cdot\hat{g}$$

$$\hat{u}(s,t) = C(s)\,e^{-ks^2t}$$

$$\hat{u}(s,0) = C(s) \overset{!}{=} \hat{f}(s)$$

tehát

$$\boxed{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\,e^{-ks^2t}}$$

átírás: $e^{-ks^2t} = e^{-\frac{2kts^2}{2}} = e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\,s)^2}{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2kt}}\right)^2}{2}} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} e^{-\frac{(\sqrt{2kt}\,s)^2}{2}}$$

tehát $\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}} \xrightarrow{\mathcal{F}\{\cdot\}} e^{-ks^2t}$

$$\hat{u}(s,t) = \mathcal{F}\{f\}\cdot\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}\right\}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f(x) * \frac{1}{\sqrt{2kt}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

kifejtve:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2kt}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\frac{y^2}{4kt}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2kt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,dy$$

2017

Hővez 2.5

PDE2 hővez

$p \times p$ matrix $R = R(k,l)$

Benoît Gatonde
WVYOFU

$$R_{k,l} = r(l-k) \quad , k,l = 1 \ldots p$$

$Y = (y_{n-1}, \ldots y_{n-p})^T$

$$R = \begin{bmatrix} r_{1-1} & r_{2-1} & \cdots & r_{p-1} \\ r_{1-2} & r_{2-2} & & \vdots \\ r_{1-3} & r_{2-3} & \ddots & \vdots \\ r_{1-p} & r_{2-p} & \cdots & r_{p-p} \end{bmatrix}$$

$$YY^T = \begin{bmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ y_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n-1}^2 & y_{n-1} y_{n-2} \\ y_{n-2} \cdot y_{n-1} & \end{bmatrix}$$

$$y_{k,l} = y_{n-k} \cdot y_{n-l}$$

1p

$$E(YY^T) = E y_{n-k} y_{n-l} = r(n-k-n+l) = r(l-k)$$

---o---

$y = (y_n)$ complex valued w.s.st. $(-\infty < n < \infty)$

$r^y(\cdot)$ auto-covariance function $= \mathrm{Cov}(y_{n+\tau}, y_n)$

Show: $R = (R_{k,l})$, $R_{k,l} = r^y(l-k)$ $\quad k,l = 1 \ldots p$ is Hermitian
pos. semi-definite
Toeplitz

$$R = \begin{bmatrix} r^y(1-1) & r^y(2-1) & \cdots & r^y(p-1) \\ r^y(1-2) & r^y(2-2) & r^y(3-2) & \\ r^y(1-3) & & \ddots & \\ r^y(1-p) & & & r^y(p-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0^y & r_1^y & r_2^y & \\ r_{-1}^y & r_0^y & r_1^y & \\ r_{-2}^y & & \ddots & \\ & & & r^y(0) \end{bmatrix}$$

$$r^y(l-k) = \mathrm{Cov}(y_{n+l-k}, y_n)$$

✓ it is Toeplitz (diagonal-constant matrix)

$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Hermitian ✓

$R_{k,l} = r^y(l-k) = \overline{r^y(k-l)} = \overline{R_{l,k}}$

1p

pos. semi-definite: $c \in \mathbb{C}$: $c^T R c \geq 0$ (?)

Konkrét pld:

feladat

$$u'_t = k\, u''_{xx}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \\ e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} = f(x)$$

megoldás

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{kt-x} \operatorname{erfc}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{kt-x} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

akkor $\boxed{u(x,t) = \big(f * g(t)\big)(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} e^{-\frac{y^2}{4kt}}\, dy =$

$$= \int_{x}^{\infty} e^{-(x-y)} e^{-\frac{y^2}{4kt}} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy$$

(így sem rossz., de talán egyszerűbb, ha

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\left(y + \frac{(x-y)^2}{4kt}\right)} \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}}\, dy = (*)$$

levezetés a túloldalon!

$y + \frac{x-y^2}{4kt}$ → teljes négyzetet képezni y-ra.

$$= \left(\frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)^2 - (kt-x)$$

$$(*) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z^2+(kt-x)}\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{kt-x} e^{-z^2}\, dz = \frac{1}{2} e^{kt-x} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz}_{\operatorname{erfc}\left(\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right)}$$

$$z = \frac{y+2kt-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$dy = 2\sqrt{kt}\, dz$$

$$z_0 = \frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$z_\infty = \infty$$

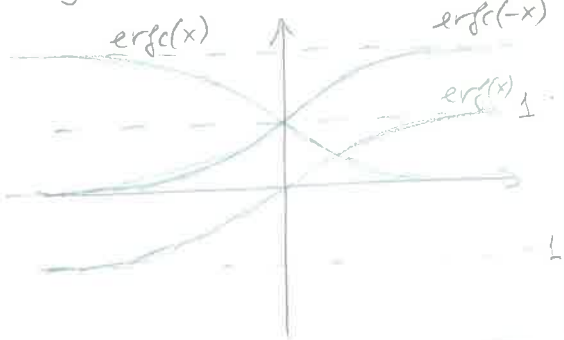
$$= \frac{1}{2} e^{kt-x} \operatorname{Erfc}\left[\frac{2kt-x}{2\sqrt{kt}}\right]$$

ha $x=0$

$$u(0,t) = e^{kt} \operatorname{Erfc}\left[\sqrt{kt}\right]$$

ha $t=0$

$$u(0,0) = e^{0} \operatorname{Erfc}[0] = 1$$



$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

PDE hőveze... csül.

Hővez. 3

$$y + \frac{1}{4kt}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{1}{4kt}\left(y^2 + 2(2kt - x)y + (2kt-x)^2 - 4k^2t^2 + 4ktx\right) =$$

$$4k^2t^2 - 4ktx + x^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4kt}\left(4kty + x^2 - 2xy + y^2\right) = \frac{(y + 2kt - x)^2}{4kt} - kt + x$$

$$= \left(\frac{y + 2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)^2 - (kt - x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{\cdots} dy + \int_{0}^{\infty} e^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy = (*)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{kt - x}\, e^{-\left(\frac{y + 2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)^2} dy = 2\sqrt{kt} \int_{z_0}^{\infty} e^{kt - x} e^{-z^2} dz =$$

$$\frac{y + 2kt - x}{2\sqrt{kt}} = z$$

$$dy = 2\sqrt{kt}\, dz$$

$$z_0 = \frac{2kt - x}{2\sqrt{kt}}$$

$$= 2\sqrt{kt}\, e^{kt - x} \int_{z_0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= 2\sqrt{kt}\, e^{kt-x} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 - \mathrm{Erfc}(z_0)\right)$$

$$= \sqrt{kt\pi}\, e^{kt - x}\left(1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

2017-ben

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \cdot \sqrt{kt\pi}\, e^{kt - x}\left(1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{Erf}\left(\frac{2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)\right) \cdot e^{kt - x}$$

$$= \frac{1}{2} e^{kt - x}\, \mathrm{Erfc}\left(\frac{2kt - x}{2\sqrt{kt}}\right)$$

$$\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \mathrm{Erf}(z)$$

$$\boxed{\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-x^2} dx \qquad \mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2} dx}$$

Normal eloszlással :

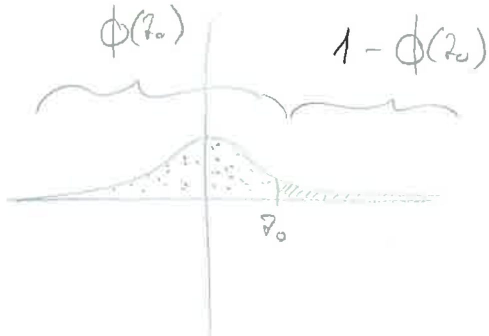
$$(*) = \int_0^{\infty} e^{kt-x} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y+2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)^2} dy =$$

legyen $z = \dfrac{y+2kt-x}{\sqrt{2kt}}$

$$dz = \frac{dy}{\sqrt{2kt}}$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{y_0+2kt-x}{\sqrt{2kt}} = \frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}} \qquad y_1 = \infty \Rightarrow z_1 = \infty$$

$$= \int_{z_0}^{\infty} e^{kt-x} \cdot \sqrt{2kt} \, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz =$$



$$= e^{kt-x} \cdot \sqrt{2kt} \cdot \sqrt{2\pi} \int_{z_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= e^{kt-x} \cdot 2\sqrt{kt\pi} \cdot \left(1 - \phi(z_0)\right)$$

$$= e^{kt-x} \cdot 2\sqrt{kt\pi} \cdot \left(1 - \phi\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = e^{kt-x}\left(1 - \phi\left(\frac{2kt-x}{\sqrt{2kt}}\right)\right)}$$

Hővezetés véges rúdban :

$$\boxed{\begin{aligned} &u'_t = u''_{xx} \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ &u(x,0) = g(x) \end{aligned}} \longrightarrow u(x,t) = \mathfrak{X}(x)\,\mathcal{T}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathfrak{X}(x)\,\mathcal{T}'(t) = \mathfrak{X}''(x)\,\mathcal{T}(t)$$

$$\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = \frac{\mathfrak{X}''}{\mathfrak{X}} = -s^2$$

I $\boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{X}'' = -s^2\mathfrak{X} \\ &\mathfrak{X}(0) = \mathfrak{X}(1) = 0 \end{aligned}}$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{X}(x) = A\cos sx + B\sin sx \\ &\mathfrak{X}(0) = \underline{A = 0} \\ &\mathfrak{X}(1) = B\sin s = 0 \Rightarrow s = k\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\mathfrak{X}(x) = B\sin(k\pi x)}$$

II $\boxed{\mathcal{T}' = -(k\pi)^2\mathcal{T}} \Rightarrow \underline{\mathcal{T}(t) = Ce^{-(k\pi)^2 t}}$

a k-adik alapmegoldás :

$$\underline{u_k(x,t) = A_k\,e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)}$$

általános megoldás
amire: $u(0,t) = u(1,t) = 0$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x) \equiv g(x) \Rightarrow A_k = 2\int_0^1 g(x)\sin(k\pi x)\,dx$$

→ ha $g(x) = \sin\pi x \Rightarrow A_1 = 1 \Rightarrow \boxed{u(x,t) = e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)}$

$$\left.\begin{aligned} &u'_t = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) \\ &u''_{xx} = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) \end{aligned}\right\} ✓$$

$u(x,0) = \sin(\pi x)$ ✓

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ ✓

speciális eset.

Hővezetés

Hőver G.

$$\boxed{\begin{aligned} &(4)\quad u'_t = u''_{xx} \quad t>0,\ x\in(0,1) \\ &u(x,0) = x^2 - x \\ &u'_x(0,t) = u'_x(1,t) = 0 \end{aligned}}$$

$u(x,t) = \xi(x)\,\tau(t)$

$\xi\tau' = \xi''\tau$

$$\boxed{\frac{\xi''}{\xi} = \frac{\tau'}{\tau} = -s^2}$$

$\xi'_x(0)\,\tau(t) = \xi'_x(1)\,\tau(t) = 0 \quad \forall t$

$\Downarrow$

$\xi'_x(0) = \xi'_x(1) = 0$

I $\quad \xi'' = -s^2\xi$

$\Downarrow$

$\xi = A\cos sx + B\sin sx$

$\xi' = -As\sin(sx) + Bs\cos(sx)$

$\xi'(0) = Bs = 0 \Rightarrow \underline{B=0}$

$\xi'(1) = -As\cdot\sin s = 0 \Rightarrow s = k\pi$

tehát $\boxed{\xi(x) = A\cos(k\pi x)}$

II $\quad \tau' = -(k\pi)^2\tau$

$$\boxed{\tau(t) = C\,e^{-(k\pi)^2 t}}$$

alapmegoldás:

$u_k(x,t) = \xi_k(x)\,\tau_k(t) = A_k\cos(k\pi x)\,e^{-(k\pi)^2 t}$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\cos(k\pi x)\,e^{-(k\pi)^2 t}} \leftarrow \text{ált. megold.}$$

$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k\cos(k\pi x) \equiv x^2 - x \Rightarrow A_k = 2\int_0^1 (x^2-x)\cos(k\pi x)\,dx$

cos trafó (köv. oldalon)

$$2A_k = \int_0^1 (x^2-x)\cos(k\pi x)\,dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^1 (x^2-x)(\sin k\pi x)'\,dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}(x^2-x)\sin(k\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{(k\pi)^2}\int_0^1 (2x-1)(\cos k\pi x)'\,dx =$$

$$= 0 - 0 + \frac{1}{(k\pi)^2}(2x-1)\cos(k\pi x)\Big|_0^1 - \frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^1 \cos k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}\Big(\cos(k\pi) - (-1)\cos 0\Big) - \frac{2}{(k\pi)^3}\sin(k\pi x)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi + 1) - \frac{2}{(k\pi)^3}\big(\sin(k\pi) - \cancel{\sin(0)}\big) =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi + 1) = \begin{cases} \dfrac{2}{k^2\pi^2} & \text{ha } k \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \Rightarrow A_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k^2\pi^2}, & k \text{ páros} \\ 0, & \dots \end{cases}$$

$$A_0 = 2\int_0^1 (x^2-x)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi x) + \frac{1}{16\pi^2}\cos(4\pi x) + \dots$$

$$= -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2}\cos(2k\pi x)$$

tehát $\boxed{u(x,t) = -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2}\cos(2k\pi x)\, e^{-4k^2\pi^2 t}}$

ell: $u(0,t) = -\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2} e^{-4k^2\pi^2 t}$

$\hookrightarrow$ Szoftverrel le kell ellenőrizni + ábra

+ZH feladatok mo-a

Analízis III. 13. heti feladatok

2016. december 16.

PDE 4. rész. Hővezetés, folytatás.

1. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel, a változók szétválasztásának módszerét alkalmazva:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx} \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= x^2 - x \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u'_x(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

2. Definiáljuk az előző feladathoz kapcsolódóan az *összes hőenergiát*:

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u^2(x,t)\,dt.$$

$$T'(t) = \int_0^1 2uu'_t\,dx = \int 2uu''_{xx}\,dx$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{T}(t)$ időben monoton fogyó, azaz

$$\mathcal{T}(t_1) \geq \mathcal{T}(t_2) \qquad \text{ha} \qquad t_1 < t_2.$$

3. Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az adott peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t) \qquad t>0,\ x\in(0,1) \\ u(x,0) &= \begin{cases} x, & x\in[0,1/2) \\ 1-x, & x\in[1/2,1] \end{cases} \\ u'_x(0,t) &= 0, \\ u(1,t) &= 0. \end{aligned}$$

$$(uu'_x)' = uu''_{xx} + u'_x u'_x$$

sorfejtése a

4. (a) Oldjuk meg a hővezetés egyenletét véges rúdban az alábbi peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = 0 \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = \sin(2\pi x), \qquad x\in[0,1]$$

(b) Oldjuk meg az INHOMOGÉN hővezetés egyenletét véges rúdban homogén peremfeltételekkel:

$$u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) = e^{-t}\sin(2\pi x) \qquad t>0,\ x\in(0,1)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x\in[0,1]$$

Hullámegyenlet.

5. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ahol c adott konstans. Keressük az egyenlet megoldását $F(x + ct) + G(x - ct)$ alakban, ha

(a) $u(x, 0) = f(x) \qquad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$ $\Rightarrow \begin{cases} F(x) + G(x) = f(x) \\ F'(x) - G'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = G(x) + C \end{cases}$

(b) $u(x, 0) = 0, \qquad u'_t(x, 0) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}.$

$\begin{cases} F(x) = \frac{f(x)+C}{2} \\ G(x) = \frac{f(x)-C}{2} \end{cases}$

6. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban az alábbi általános peremfeltételekkel:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Lássuk be, hogy a D'Alambert formula valóban megoldja a hullámegyenletet:

$$u(t, x) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$ deriválással könnyen!

7. Tekintsük a hullámmozgás egyenletét egydimenzióban, végtelen rúdban.

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ahol c adott konstans. Az kezdeti feltételek esetén oldjuk meg az egyenletet.

(a) $u(x, 0) = f(x) = 1$ ha $|x| \le 1$ egyébként 0, és $u'_t(x, 0) = g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $u(x, 0) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, és $u'_t(x, 0) = 1$ ha $|x| \le 1$ és egyébként 0.

(*) 8. Oldjuk meg a hullámegyenletet végtelen húr esetén az alábbi feltételekkel ($c = 1$ választással):

$$u''_{tt} = u''_{xx}, \qquad u(x, 0) = \begin{cases} x + 1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 - 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 0 & x < 0, \ x > 1/2 \end{cases}, \qquad u_t(x, 0) = 0$$

Rajzoljuk fel a megoldásfüggvényt (= a húr helyzetét) a $t = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ időpontokban. Mit látunk?

D11* Tekintsük a hővezetés egyenletét véges rúdban homogén *Neumann peremfeltétellel*:

$$u'_t(x, t) = u''_{xx} \qquad t > 0, \ x \in (0, 1), \qquad u(x, 0) = f(x),$$

$$u'_x(0, t) = u'_x(1, t) = 0, \qquad t > 0.$$

(Előadáson elhangzott fejt)

Igazoljuk, hogy a megoldásfüggvény konstanshoz tart:

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = \mathcal{T} = \int_0^1 f(x)dx, \qquad \forall x \in (0, 1).$$

$$T(t) = \int_0^1 u(x,t)dt \qquad \text{FIX}$$

(*) Spec hullám

$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$g = 0$

$f = 0$

$g = \begin{cases} 1 & \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Hővezetés egyenlete (energiamegmaradás)

$$\boxed{u'_t = u''_{xx}}$$ $t > 0$, $x \in (0, \ell)$ „ℓ hosszú rúd" homogén sűrűségű

b.c: $u(x,0) = g(x)$

b.c: $u'_x(0,t) = u'_x(\ell,t) = 0$ „a végeknél nincs hőmozgás => nincs hővezetés"

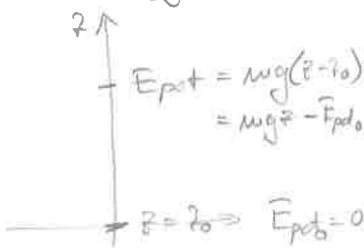
legyen $\boxed{T(t) = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx \ [K]}$ átlaghőmérséklet.

ha nem lenne homogén: $0 \ \vdash\!\!+\!\!+\!\!+\!\!+\!\!+\!\!\dashv \ \ell$ $T = \sum_i m_i T_i = \sum_i \sigma_i T_i \Delta x_i$

$$\boxed{T(t) = \frac{1}{m} \int_0^\ell \sigma(x)\, u(x,t)\, dx}$$

$\ell = \int_0^\ell dx$; $m = \int_0^\ell \sigma(x)\, dx$ $[\sigma(x)]_{SI} = \frac{kg}{m}$ „hossz menti sűrűség"

A hő(energia) pont úgy, mint a potenciális energia, függ attól, hogy hol definiálom a 0-potenciált.



$$\boxed{Q = c \cdot m \cdot \Delta T} = \underline{c \cdot m \cdot T - Q_0}$$

ΔT: Kelvinben adott.

Legyen Q_0: a $T = 0K$ (abszolút nulla fokos test hőenergiája)

vagy Legyen Q_0: ha $T = 273.15K = 0°C$

$[c]_{SI} = \frac{J}{kg \cdot K}$

$$Q(t) = c \cdot m \cdot T(t) - Q_0 = \frac{cm}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx - Q_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t) &= \frac{cm}{\ell} \int_0^\ell u(x,t)\, dx - Q_0 \quad &\text{(homogén test)} \\ Q(t) &= c \int_0^\ell \sigma(x)\, u(x,t)\, dx - Q_0 \quad &\text{(nemhomogén test)} \end{aligned}}$$

energia dimenziójú [Joule]

13. hét.

Hővezetés, PDE hőenergia.

Lényeg: $Q(t) \sim$ " $\mathcal{I}_1(t)$ "
hő(energia)

$\hookrightarrow \mathcal{I}_1(t) = \int_0^l u(x,t)\,dx$

Hőmennyiségváltozás az idő során a kiindulási hőhöz képest (*)

tfh. $\boxed{u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0}$

$$\mathcal{I}_1'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^l u(x,t)\,dx = \int_0^l u'_t(x,t)\,dx \overset{PDE}{=} \int_0^l u''_{xx}(x,t)\,dx =$$

$$= u'_x(x,t)\Big|_{x=0}^{l} = -u'_x(0,t) + u'_x(l,t) = 0$$

tehát $\mathcal{I}_1(t)$ időben NEM változik, vagyis a hőmennyiség állandó a homogén sűrűségű rúd mentén.

Legyen $\mathcal{I}_2(t) = \int_0^l u^2(x,t)\,dx \not\sim Q(t)$ (ez nem igazi energia)

$$\mathcal{I}_2'(t) = \int_0^l 2u\,u'_t\,dx \overset{PDE}{=} 2\int_0^l u\,u''_{xx}\,dx = 2u\,u'_x\Big|_0^l - 2\int_0^l (u'_x)^2\,dx =$$

$$= -2u(0,t)\underbrace{u'_x(0,t)}_{=0} + 2u(l,t)\underbrace{u'_x(l,t)}_{=0} - 2\int_0^l u'^2_x\,dx =$$

$$= -2\int_0^l u'^2_x\,dx < 0 \quad \text{mert } u'_x \not\equiv 0$$

(*) Ebben az esetben hasznos, ha
$Q_0 = \frac{cm}{l}\int_0^l u(x,0)\,dx = \frac{cm}{l}\int_0^l g(x)\,dx$

Inhomogén hővezetés egyenlet

$$\begin{cases} u'_t(x,t) = u''_{xx}(x,t) + \underbrace{e^{-t}\sin(2\pi x)}_{} = \underbrace{f(x,t)}_{\text{gerjesztés}} \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Megoldás : Duhamel's principle

legyen : $v(x,t,\tau)$: $\begin{cases} v'_t = v''_{xx} & t \geq \tau \\ v(x,0,\tau) = f(x,\tau) \end{cases} \qquad (2)$

Peremfelt : $u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t > 0$

$v(0,t,\tau) = v(1,t,\tau) = 0 \quad \forall t > \tau \Rightarrow f(0) = f(1) = 0$

$$v = \underbrace{f(x)g(t)}_{\tau \text{ is lesz benne ük valószínűleg}} \Rightarrow fg' = f''g \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{f''}{f} = -s^2$$

I $\quad f'' = -s^2 f$

$f(0) = f(1) = 0$

$\Downarrow$

$f(x) = A\sin sx + B\cos sx$

$f(0) = \underline{B = 0}$

$f(1) = A\sin s = 0 \Rightarrow \underline{s = k\pi}$

$\boxed{f(x) = A\sin(k\pi x)}$

II $\quad g' = -(k\pi)^2 g$

várhatóan $\lim_{t\to\infty} g(t) < \infty$

$g(t) = Ce^{-(k\pi)^2 t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ✓

alapmegold : $v(x,t,\tau) = f(x)g(t)$

$v_k(x,t,\tau) = A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)$

$v(x,t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 t}\sin(k\pi x)$

$\Big\downarrow t=\tau$

$v(x,\tau,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-(k\pi)^2 \tau}\sin(k\pi x) = f(x,\tau)$

$f(x,\tau)$-t szinuszosan sorbafejtem $\Rightarrow A_k = \ldots$

— folyt. hőv. old. —

13. hét

2016

PDE inhom hővezetés

$$v(x,\tau,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-(k\pi)^2\tau} \sin(k\pi x) = \underbrace{e^{-\tau}\sin(2\pi x)}_{= f(x,\tau)}$$

$$\Downarrow$$

$$A_2 = \frac{e^{-\tau}}{e^{-(2\pi)^2\tau}} \quad ; \quad A_{k\neq 2} = 0$$

tehát

$$\boxed{v(x,t,\tau) = e^{(4\pi^2-1)\tau}\, e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)}$$

Ez a homogén egyenlet megoldása (2)-nek

Ell: $v'_t = -4\pi^2 v$

$v'_x = 2\pi(\ \cos 2\pi x)$

$v''_{xx} = (-2\pi)(2\pi)v$

$v'_t = v''_{xx}$ ✓

$v(x=0|1, t, \tau) = 0$ ✓

$v(x,\tau,\tau) = e^{(4\pi^2-4\pi^2-1)\tau} \sin(2\pi x) = e^{-\tau}\sin(2\pi x) = f(x,\tau)$ ✓

Duhamel's princ:

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau = e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\int_0^t e^{(4\pi^2-1)\tau}\,d\tau =$$

$$= e^{-4\pi^2 t}\sin(2\pi x)\,\frac{1}{4\pi^2-1}\left(e^{(4\pi^2-1)t} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\underbrace{\left(e^{-t} - e^{-4\pi^2 t}\right)}}$$

Ez a megoldása az inhomogén egyenletnek! (1)-nek.

Ell: $u'_t = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(-e^{-t} + 4\pi^2 e^{-4\pi^2 t}\right)$

$-u'_{xx} = +4\pi^2 \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(e^{-t} - e^{-4\pi^2 t}\right)$

$(4\pi^2-1)\cdot\frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\, e^{-t}$ ✓

$u(x,0) = \frac{\sin(2\pi x)}{4\pi^2-1}\left(e^0 - e^0\right) = 0$ ✓

$u(x=0|1, t) = 0 \quad \forall t > 0$ ✓

Inhomogén hővezetés egyenlete

$$\begin{cases} u'_t - u''_{xx} = g(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\to \boxed{\begin{aligned} v'_t - v''_{xx} &= 0 \\ v(x,0) &= f(x) \end{aligned} \quad (2)}$$ homogén

$$\boxed{\begin{aligned} w'_t - w''_{xx} &= g(x,t) \\ w(x,0) &= 0 \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0 \end{aligned} \quad (3)}$$

legyen
$$\boxed{\begin{aligned} &\omega(x,t,\tau) \text{ u.h.} \\ &\omega'_t - \omega''_{xx} = 0 \\ &\omega(x,\tau,\tau) = g(x,\tau) \\ \text{és } &\omega(0,t,\tau) = \omega(1,t,\tau) = 0 \end{aligned} \quad (4)}$$

$$\boxed{\text{Állítás: (3) megoldása } w(x,t) = \int_0^t \omega(x,t,\tau)\,d\tau}$$

Biz
$$w'_t = \omega(x,t,t) + \int_0^t \omega'_t(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$w''_{xx} = \int_0^t \omega''_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau$$

$$w'_t - w''_{xx} = \underbrace{\omega(x,t,t)}_{\substack{g(x,t) \\ \text{(4.2) miatt}}} + \int_0^t \underbrace{(\omega'_t - \omega''_{xx})}_{=0 \text{ mert megoldása (4)-nek}}(x,t,\tau)\,d\tau$$

2017

VÁZLATOSAN

Inhomogén Hővezetés

Electromágneses hullám egyenletének levezetése a Maxwell egyenletekből (vákuumban)

A Maxwell egyenletek differenciális alakja:

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

vákuumban - nincs áram (nem folyik áram)
- nincs töltés

vagyis $J = 0$

$\rho = 0$

$$\Downarrow$$

$$\nabla E = 0$$

$$\nabla B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

Ismert összefüggés:

$$u \times v \times w = u\langle v, w\rangle - \langle u, v\rangle w$$

Így $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\cancel{\nabla E}) - (\nabla \cdot \nabla) E$

$= -\Delta E$

tehát $\Delta E = -\nabla \times (\nabla \times E) = +\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\frac{1}{c^2}} \; \boxed{\Delta E = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \frac{1}{c^2}}$$ ahol $\cancel{c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

$\varepsilon_0 \cong 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

$\mu_0 \cong 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.25 \cdot 10^{-6} \frac{H}{m}$

$$c = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 300.000 \frac{km}{s} = 3e8 \frac{m}{s}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}}$$

13. gyak.

PDE hullámeg...
Levezetés Maxwel...

1) Laplace (Elliptikus)
2) Hővezetés (Parabolikus)
3) Hullámegyenlet (Hiperbolikus)

$\Big\}$ ∀ másodrendű PDE visszavezethető ezek valamelyikére

Hullámegyenlet

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u'_t(x,0) = g(x)$$

ahol f, g abszolút integrálhatóak.
(bár erre nincs szükség)

legyen $\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ y = \frac{\xi-\eta}{2c} \end{cases}$

$$v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

$$v'_\xi = \frac{1}{2}u'_x + \frac{1}{2c}u'_t$$

$$v''_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u''_{xx} - \frac{1}{2c}u''_{tx}\right) + \frac{1}{2c}\left(u''_{tx}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2c}u''_{tt}\right) = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{u''_{xx} - \frac{1}{c^2}u''_{tt}}_{0}\Big) = 0$$

hullám egy.

ezért $v'_\xi(\xi,\eta) = F_0(\xi)$ (nem függ η-tól)

$$v(\xi,\eta) = \int F_0(\xi)\,d\xi = F(\xi) + G(\eta)$$

ezért $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

Formalizmus:

$L[u] = 0$ ahol $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$

tehát $L = L_1 \cdot L_2$

$L[u] \iff \begin{cases} L_1[u] = 0 \\ \text{vagy} \\ L_2[u] = 0 \end{cases}$ ← transzport egyenletek!

2017
Hullámegyenlet
∞ RÚDBAN

PDE 3

legyen $v(x,0) = f(x)$

$v'_t(x,0) = 0$

$$v(x,t) = F_1(x+ct) + G_1(x+ct)$$

$$w(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}$$

$w(x,0) = 0$

$w'_t(x,0) = g(x)$

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$$

Véges húrban

$u''_{tt} = u''_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

$u'_t(x,0) = g(x)$

$0 < x < 1$

Dirichlet feltétel:

$u(1,t) = u(0,t) = 0$

vagy:

Neumann felt:

$u'_x(1,t) = u'_x(0,t) = 0$

Hullámegyenlet véges rúdban

Neumann feltétel: $u'_x(0,t)=0$, $u'_x(\pi,t)=0$ → azaz a végeken elengedjük

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{c^2}u''_{tt} = u''_{xx} \\ &u(x,0)=f(x) \\ &u'_t(x,0)=g(x) \\ &u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{aligned}}$$

(*) az első két feltétel; $u(0,t)=u(\pi,t)=0$ → Dirichlet feltétel

legyen $u(x,t) = X(x)T(t)$

$u(x,0) = X(x)T(0) = f(x)$

$u'_t(x,0) = X(x)T'(0) = g(x)$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0$, $u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$ → $X(0)=X(\pi)=0$

Egyenlet: $\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -k^2$

I. $\boxed{X'' = -k^2 X, \quad X(0)=X(\pi)=0}$

II. $\boxed{T'' = -(kc)^2 T}$

$T(t) = C\cos(kct) + D\sin(kct)$

$X(x) = A\sin(kx)$

$$\boxed{u_k(x,t) = \cancel{A_k}\sin(kx)\left[A_k\cos(kct) + B_k\sin(kct)\right]}$$ alapmegoldás!

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left[A_k\cos(kct) + B_k\sin(kct)\right]$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin(kx) \overset{!}{=} f(x) \Longrightarrow \boxed{A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(kx)\,dx}$$

$$u'_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left[-kcA_k\sin(kct) + kcB_k\cos(kct)\right]$$

$$u'_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}k\cdot c\cdot B_k\sin(kx) \overset{!}{=} g(x) \Longrightarrow \boxed{B_k = \frac{1}{k\cdot c}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin(kx)\,dx}$$

(*) azért lehet két feltétel $(x,0)$-ra mert nincs peremfeltétel (x,∞)-re

2017

PDE hullámegy. véges rúdban

PDE3

3D-ban?

$$\frac{1}{c^2}u''_{tt} = u''_{xx} + u''_{yy}$$ legyen $u(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$

$$\frac{1}{c^2} X Y T'' = X'' Y T + X Y'' T$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X'' Y + X Y''}{XY} = -\alpha^2$$

általánosabb $u(x,y,t) = \varphi(x,y)\,T(t)$

$$\frac{1}{c^2}\varphi T'' = \varphi''_{xx} T + \varphi''_{yy} T$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy}}{\varphi} = -\alpha^2$$

$\underline{\mathrm{I}}$ $T'' = -(\alpha c)^2 T$

$\underline{\mathrm{II}}$ $\boxed{\varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} = -\alpha^2\varphi}$

$$\varphi(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

$$X'' Y + X Y'' = -\alpha^2 X Y$$

$$X'' Y + \alpha^2 X Y = -X Y''$$

$$\left[X'' + \alpha^2 X\right] Y = -X Y''$$

$$\frac{X'' + \alpha^2 X}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

$\underline{\mathrm{II}}.1$ $X'' + \alpha^2 X = \lambda X$

$\underline{\mathrm{II}}.2$ $Y'' = -\lambda Y$