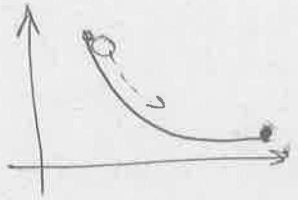
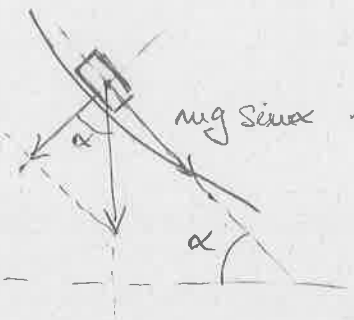
Variációszámítás — Courant John II/2 737 old-tól

Bernoulli feladat (1696) – lejtős dolog



dinamikai szempontból:



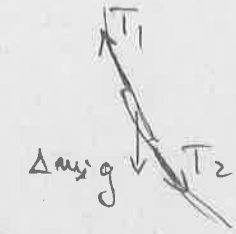
$mg \sin\alpha = mg \sin(-y'(t)) = m \cdot a$

$$T = \int_0 \int_0^{t} mg \sin(-y'(t))\, dt$$

(nem olyan egyszerű)

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-y_1}}\, dx} \Longrightarrow \text{cikloid}$$

Maximális felszínű forgástest:



$$\boxed{S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx} \Longrightarrow \text{láncgörbe}$$

↳ ennek fizikai levezetése érdekes lehet

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \quad \begin{matrix} \text{kétszer folyt diffható} \\ \phi(x_0) = y_0, \quad \phi(x_1) = y_1 \end{matrix} \right\}$$

↓

megengedhető függvények.

$\forall\, \phi \in \mathcal{C} \longmapsto I(\phi) \in \mathbb{R}$

$I : \mathcal{C} \mapsto \mathbb{R}$ funkcionál, speciális alakú

$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx \longrightarrow \min \quad \phi \in \mathcal{C}\text{-re}$

↓

jelöljük inkább kicsi $y(x)$-el!

Szükséges feltétel az I-re

Tfh $u \in \mathcal{C}$ -ben I minimumhelyes vagyis $I(u) \le I(\phi)$ $\forall \phi \in \mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_0 = \{ \eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}, \text{ kétszer folyt diff } \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \}$$

ekkor $\left.\begin{matrix}\forall \phi \in \mathcal{C} \\ \forall \eta \in \mathcal{C}_0\end{matrix}\right\}$-re : $\phi + \eta \in \mathcal{C}$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\quad u + \varepsilon \eta \in \mathcal{C}$

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta) \geq I(u) \quad \forall \varepsilon \neq 0$$

G diff. ezért $G'(0) = 0$

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x)\right) dx$$

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u(\cdot)\eta + F'_{u'}(\cdot)\eta' \right) dx$$

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u(x, u, u')\eta(x) + F'_{u'}(x, u, u')\eta'(x) \right) dx = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{C}_0\text{-ra igaz}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}(x, u, u')\eta'(x)\, dx = \underbrace{\left[F'_{u'}(x, u, u')\eta(x) \right]_{x_0}^{x_1}}_{=0 \text{ mert } \eta(x_0)\eta(x_1) = 0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u')\eta(x)$$

tehát:

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left(F'_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u') \right) dx$$

Lemma Tfh $\left.\int_a^b C(x)\eta(x)\,dx = 0 \quad \forall \eta(x) \text{ folyt fv. } \eta(a) = \eta(b) = 0\right\} \Longrightarrow C(x) \equiv 0$

(T) Tfh $u \in \mathcal{C}$ optimumhelyes 2x folyt. diff

ekkor $L[u] = F'_u - \dfrac{d}{dx} F'_{u'} = 0$ Euler–Lagrange

Anal 3
ea. 7-2-

Megengedett fv.-ek

$$\mathcal{C} = \{ \phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ \text{kétszer folyt differenciálható}\ \text{és}\ \phi(x_0) = y_0\ \ \phi(x_1) = y_1 \}$$

Funkcionál: $\phi \longmapsto I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx$

(T) HA $u \in \mathcal{C}$ szélsőérték, akkor

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \qquad \text{Euler egyenlet}$$

u: stacionárius megoldás

Biz: $G(\varepsilon) = I(\cancel{u} + \varepsilon\eta)$

$$G'(0) = 0 \iff L[u] = 0$$

$$\boxed{\delta I(u) \ \text{első variációja}}$$

előadáson δu szerepelt. Megnézni, melyik a jó!

Speciális esetek

1) $F(x, u, \cancel{u'}) \Rightarrow L[u] = \underbrace{F'_u = 0}_{\text{algebrai egyenlet}}$ ~~$\Rightarrow F_u(x,u) = C$~~

2) $F(x, u')$

ekkor:

$L[u] = -\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \Rightarrow F'_{u'} = C$ algebrai egyenlet u'-ra azután már csak $\int$ kell!

3) $F(\cancel{x}, u, u')$

$\underbrace{E = F - u' F'_{u'}} = C$

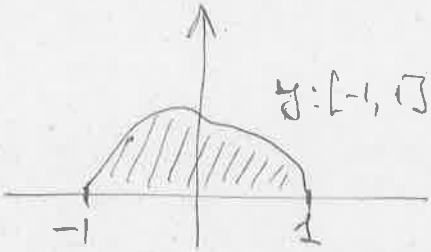
Figyelem ez nem elsővideus alak, hanem speciális eset.

A Hamilton egyenletek is csak egy speciális eset (talán)!

D'Alembert elv: minden rendszer az energia minimalizálására törekszik.

2017 b

Didó-probléma



$y : [-1, 1] \to \mathbb{R}_+$

$$\boxed{\text{max} \int_{-1}^{1} y(x)\,dx \quad \text{feltéve, hogy} \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = L}$$

Ált: max $I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi')\,dx$

$$+ \text{ feltéve: } J(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \phi, \phi')\,dx = L$$

Mo: Lagrange féle multiplikátor!

$I_\lambda(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} (F - \lambda G)\,dx$ → stacionárius függvényeit keressük

Didó megoldása:

$$F - \lambda G = y - \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$\cancel{F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} =}$$

$$E = y - \lambda\sqrt{1+y'^2} + y'\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = y - \frac{\lambda y'^2 + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \boxed{y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C}$$ szeparábilis DE

ennek megoldása: $(x+D)^2 + (y-C)^2 = \lambda^2$

Izoperimetrikus feladat: Adott kerületű síkidomok; területe mikor maximális

Gyakorlaton!

2017b

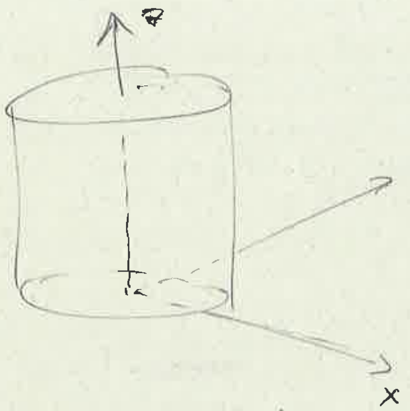
Anal 3
8. ea

Dudes Didó feladat: adott kerületű tartomány kerülete mikor minimális.

Feladat: henger felületén (S) két pont

$\Gamma \subset S \qquad \Gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in [a,b] \}$

$\min \ell(\Gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)| \, dt$



$x = \cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$y = \sin\theta \qquad z \in [0,1]$

$z = z$

Görbe megadás

$\theta = \theta(t)$

$z = z(t)$

feladat: min a görbe hosszát

Tehát van 2 db függvény

$\mathcal{C} = \{ \phi = (\phi_1, \phi_2) \mid \phi_j : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diff. perem felt. adottak $\}$

$I : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \qquad I(\phi_1, \phi_2) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi, \phi') \, dx \overset{jel}{=} I(\phi)$

$\min I(\phi)$

Szükséges felt: tfh $u_1, \dots, u_n$ optimum

azaz $I(u) \le I(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{C}$

perturbáció j-edik koordinátát perturbálom.

u_j helyett $u_j + \varepsilon\eta_j$

$G(\varepsilon) = I(u_1, \dots, u_j + \varepsilon\eta_j, \dots, u_n)$

$G(0) \le G(\varepsilon) \ \forall \varepsilon$-ra $\Longleftrightarrow G'(0) = 0$

(T) Szükséges feltétel: Tfh $u_1, \dots, u_n$ optimum ekkor:

$$\boxed{L_j[u] = F'_{u_j} - \frac{d}{dx} F'_{u_j'} = 0}$$

Pl: $\mathbb{R}^3$-ban két pont, legrövidebb út.

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $P_1(x_1, x_2, x_3)$ } + szélsőérték feltételek $\gamma(x)$-re P_0 és P_1 kapcsán

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} \quad x \in [x_0, x_1]$$

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}_{F(x, y, y', z, z')} \, dx$$

Euler egyenletek: $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C$

$$F'_z - \frac{d}{dx} F'_{z'} = 0 \Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = D$$

Speciális eset

ha F nem függ x-től: $F(\cancel{x}, u_j, u_j')$

Áll: $u = (u_1, .., u_n)$ optimum, akkor

$$\boxed{F - \sum_{j=1}^{n} u_j' F'_{u_j'} = C}$$

Fizikai háttér: $x \approx$ időt jelenti

Hamilton elv: adott állapotból

$q_1, .., q_n$ általánosított koordináták

pl. pontszerű test: $n=3$

2 pont: $n=5$

$$(q_1(t_0), .., q_n(t_0)) \longrightarrow (q_1(t_1), .., q_n(t_1))$$

+ Feltételek. $U(t)$ helyzeti energia

$T(t)$ mozgási energia

Legkisebb hatás elve

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt \to \min.$$

Konkrét eset.

$U(q_1 .., q_n)$

$T(\dot{q}_1, .., \dot{q}_n) = \dot{q}^T A \dot{q}$

Opt. m.o. esetén:

$U + T =$ konst

Brachistocrone

$$\min_{y} \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)-y_1}}}\, dx \qquad \text{gyak.}$$

$$F(x,u,u') = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u-y_1}}$$

$\longrightarrow$ hova év $y_1 := 0$

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$$

Térbeli Brachistocrone:

$y = y(x)$
$z = z(x)$

$$\min_{y,z} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}}{\sqrt{z(x)-z_1}}\, dx$$

$\longrightarrow$ legyen $z_1 := 0$

T Ha $\underbrace{(u_1(x), u_2(x))}_{:= u(x)}$ optimum

$L_1[u_1] = 0 \quad L[u_2] = 0$ akkor $L[u_1] = F'_{u_1} - \frac{d}{dx} F'_{u_1'}$

Geodetikus görbék

Adott $S \subseteq \mathbb{R}^3$ felület

$$S = \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \} \quad D \subset \mathbb{R}^2$$

$P_1, P_2 \in S$ Keressünk olyan görbét, amelynek hossza min.

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Felületen lévő görbét $u = u(t)$, $v = v(t)$

$$x(t) = x(u(t), v(t))$$

$$\dot{x}(t) = x'_u \dot{u} + x'_v \dot{v}$$
$$\dot{y}(t) = y'_u \dot{u} + y'_v \dot{v} \quad \text{u.e. } z\text{-re}$$

ekkor $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = \dot{u}^2\overbrace{\left(x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2\right)}^{P}$
$+\dot{v}^2\overbrace{\left(x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2\right)}^{Q}$
$+2\dot{u}\dot{v}\overbrace{\left(x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'\right)}^{R/2}$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot{u}^2P+\dot{v}^2Q+\dot{u}\dot{v}R}\,dt \overset{v=v(u)}{=\!=} \int_{u_0}^{u_1}\sqrt{P+v'Q+v'^2 R}\,du$$

$v = v(u) \quad |d$

$\dot{v} = v'\dot{u}$

$u(t_0) = u_0$

$u(t_1) = u_1$

legyen $f(x,y) = \sin(x+y)$

mi a min. út két p között.

legyen $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ f(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$

$x(t) = x$

ekkor $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ f(x,y(x)) \end{pmatrix}$ $\quad \gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ f_x' + f_y' y' \end{pmatrix}$

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+y'^2+f_x'^2+2f_x'f_y'y'+f_y'^2y'^2}$$

Korlátozás:

$$\min\ I(u) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,u,u')\,dx$$

$$\text{u. h. } J(u) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,u,u')\,dx = 0$$

$$K(u) = \int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)\,dx$$

Pl. legyen $u: D\to\mathbb{R}$ ahol $D\subset\mathbb{R}^2$

$$S = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x,y)\end{pmatrix} : (x,y)\in D\right\}$$

feladat: $A(S) = \iint_D \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\,d(x,y) \to \min$

u. h. $u(x,y) = u_0(x,y)$

ha $(x,y)\in\partial D$

Anal 3
e.a. 9

Megengedett fv. halmaza

$$\mathcal{C} = \{\phi : D \to \mathbb{R} \text{, kétszer folyt. diff. és } \phi(x,y) = u_0(x,y) \ \forall (x,y) \in \partial D\}$$

Adott $I(\phi)$ funkcionál

$$I(\phi) = \iint_D F(x, y, \phi(x,y), \phi'_x(x,y), \phi'_y(x,y))\, d(x,y)$$

Szükséges felt.: Tfh. $u(x,y)$ optimum.

legyen $\eta : D \to \mathbb{R}$ $\quad \eta|_{\partial D} \equiv 0$

$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta)$ egyváltozós $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

$G'(0) = 0$

$$G(\varepsilon) = \iint_D F(x, y, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta'_x, u' + \varepsilon\eta'_y)\, d(x,y)$$

$G'(\varepsilon) = \dots$

$$G'(0) = \iint_D \eta\, L[u]\, d(x,y) = 0 \quad \forall \eta$$

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_x} - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_y} = 0$$

Min. felszín: $A(S) = \iint_D \sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}\, d(x,y)$

$$F'_{u_x} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \qquad \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_x} = \dots$$

$$\int_0^T \int_0^\ell \left(\frac{m}{2\ell} u_t'^2 - \tau \sqrt{1 + u_x'^2}\right) dx\, dt$$

$D = [0,T] \times [0,\ell]$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{\ell} u'_t - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\tau u'_x}{\sqrt{1 + u_x'^2}} = 0$$

$u_x'^2 \approx 0$

ekkor $\frac{m}{\ell} u''_{tt} = \tau u''_{xx}$

hullám egyenlet

Húr mozgás $\quad$ L hosszú gumi szalag

mozgási energia: $K \approx \sum \frac{m_i v_i^2}{2}$ $\quad K = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell u_t'^2(t,x)\, dx$

potenciális energia: $U = \tau \int_0^\ell \left(\sqrt{1 + u_x'^2} - 1\right) dx$

Analízis III. 4. heti feladatok
2016. október 7.

Variációszámítás 1. rész

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgásfelszín felülete:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

. Igazoljuk a variációszámítás eszközeivel, hogy a síkon két pontot összekötő görbék közül az egyenesszakasz ívhossza minimális.
(Ez a feladat lesz jó az alapfeladat, és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlésére)

$$F - u' \frac{\partial F}{\partial u'} = C$$

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

$$2u + u'^2 + 2u' = C$$

HF$_1$ Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

4. (Minimális felszínű forgástest) Keressük az $f : [0; 1] \to R$ kétszer folytonosan differenciálható. A(0,1) és B(1,e) pontokat összekötő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.

HF$_2$ Írjuk fel a megfelelő $E(x)$ energiafüggvényt és számoljuk ki az összes stacionárius megoldást az $F(x, u, u') = \sqrt{u} \cdot \sqrt{1 + (u')^2}$ alapfüggvény esetén.

5. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását Bradistochrone (síkban)

D4* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

ahol $u(0) = 0$, $u(1) = 1$

Analízis III. 8. heti feladatok
2017. november 10.

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:
$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$
2. Adott a síkon két pont $A(a,\alpha)$ és $B(b,\beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat összekötő görbék közül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz.
(Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)
3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:
$$(a)\quad I(u) = \int_0^1 \left(2u + (u')^2\right)\mathrm{d}x, \qquad u(0)=0,\ u(1)=1$$
$$[\mathrm{HF}]\,(b)\quad I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((u')^2 - u^2\right)\mathrm{d}x, \quad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0$$
4. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet az alábbi funkcionálok esetén és számoljuk ki annak összes megoldását:
$$(a)\ \ I(u) = \int_0^1 (x + u + 3u')\mathrm{d}x \qquad\qquad (b)\ \ I(u) = \int_0^2 (u + xu')\mathrm{d}x$$
5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az alábbi alapfüggvények esetén:
$$(a)\ F(x,u,u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u\sin x \qquad [\mathrm{HF}]\,(b)\ \ F(x,u,u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$$

Állítás. Az alkalmazásokban leggyakoribb esetében, az alapfüggvény $F(x,u,u')$ nem függ közvetlenül x-től, azaz $F = F(u,u')$ alakú. Ekkor definiáljuk a következő energiafüggvényt:
$$E(x) = F\Big(u(x),u'(x)\Big) - u'(x)F'_{u'}\Big(u(x),u'(x)\Big), \qquad \text{avagy rövidebben: } E = F - u'F'_{u'} \tag{1}$$
Ekkor a stacionárius megoldások meghatározása végett elégséges megoldani az Euler-egyenlettel ekvivalens $E = F - u'F'_{u'} = C_1$ differenciálegyenletet, ahol $C_1 \in \mathbb{R}$ konstans.

6. (Minimális felszínű forgástest) Keressük az $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható,
$$f(0) = f(2) = \frac{e^2+1}{2e} \tag{2}$$
feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális.
7. Határozzuk meg a Bernoulli feladat megoldását: $T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_a^b \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{\frac{E_0}{mg} - y(x)}}\,\mathrm{d}x.$
8. (Elgondolkodtató) Adjuk meg azt az $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre $u(a) = u(b) = u_0$ és az $u(x)$ függvény alatti **előjeles** terület minimális, vagyis $\int_a^b u(x)\mathrm{d}x$ minimális. Adjuk meg a megfelelő Euler-egyenletet. Ha az energiafüggvényt alkalmazzuk látszólag ellentmondásba ütközünk, miért? Miért nincs ellentmondás?

D6* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ függvényt:
$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

Bioreactor Manuscript

$$E = F - u'F'_{u'}$$

$$\frac{d}{dx}E = F'_u\, u' + \cancel{F'_{u'}\, u''} - \cancel{u''F'_{u'}} = u'\left(F - \frac{d}{dx}F'_{u'}\right)$$

$$I(u) = \int_a^b u\, dx \qquad u(a) = u(b) = 1$$

$$E = F - u'F'_{u'} = \mu = \text{Konst.} \qquad u(x) = 1$$

$$F'_u = 1 \neq 0$$ nihil

Analízis III. ~~7~~ 4. heti feladatok

201~~5~~6. ~~november 6.~~ október 7

$x, f(x)$

Variációszámítás 1. rész.

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgásfelszín felülete:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

4 (+) Adott két pont $A(0,1)$ és $B(1,e)$: ~~ezeket~~ összekötő görbék közül minimális felületű forgatott? (?)

2. Igazoljuk a variációszámítás eszközeivel, hogy a síkon két pontot összekötő görbék közül az egyenesszakasz ívhossza minimális.
(Ez a feladat lesz jó az alapfeladat, és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlésére)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4. (HF) Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 1.$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$ alapfüggvény esetén.

6. (HF) Írjuk fel a megfelelő $E(x)$ energiafüggvényt és számoljuk ki az összes stacionárius megoldást az $F(x, u, u') = \sqrt{u} \cdot \sqrt{1 + (u')^2}$ alapfüggvény esetén.

7. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

5 + Határozzuk meg a Bernoulli feladatot is.

(?) D~~2~~3* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

ahol $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

~~(Megjegyzés: Az integrálban szereplő fv-t szakaszonként folyt. diff-ható,~~

$I(u) = \int F(x, u, u')\, dx$

Gyak 4.
Variációszám. I

(1) Adott (x_0, y_0) (x_1, y_1) ívet összekötő legrövidebb görbe

$f : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ u.h. $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$

min $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx \Rightarrow F(u') = \sqrt{1 + u'^2}$$

Euler egyenlet: $\cancel{F'_u} - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = const = C$$

$$u'^2 = C + Cu'^2$$

$$u'^2(1 - C) = C$$

$$u' = \sqrt{\frac{C}{1-C}} = D \quad \Big| \int dx$$

$$\int u'\, dx = Dx + C$$

$$u = Dx + C$$

vagy: $\displaystyle\int_{x_0}^{z} u'(x)\, dx = \int_{x_0}^{z} D\, dx \Rightarrow u(z) - u(x_0) = D(z - x_0)$

$$u(x) = y_0 + D(x - x_0)$$

$u(x_0) = y_0$ ✓

$$u(x_1) = y_0 + D(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow D = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\boxed{u(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$

(1) A – B legrövide...

(2) Forgástest min fe...

2006.10.7
Anal 3 gyak 4
Variációszámítás (...

(2') Átvezető feladat

Forgásfelület felülete: $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

Biz: legyen $s(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$ $\quad (x,\theta) \in [a,b]\times[0,2\pi) = D$

$$s'_x \times s'_\theta = \begin{pmatrix} 1 \\ f'_x \cos\theta \\ f'_x \sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x)\sin\theta \\ f(x)\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_x f\cos^2\theta + f'_x f \sin^2\theta \\ -f\cos\theta \\ -f\sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x f \\ -f\cos\theta \\ -f\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\| s'_x \times s'_\theta \| = \sqrt{f_x'^2 f^2 + f^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta} = f\sqrt{f_x'^2 + 1}$$

$$S = \iint_S dS = \iint_D \| s'_x \times s'_\theta \|\, d(x,\theta) = \iint_D f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, d(x,\theta) =$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, d\theta\, dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \int_0^{2\pi} 1\, d\theta =$$

$$= \boxed{2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

(2') Minimalizáljuk! : min $\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \Rightarrow F(u,u') = u\sqrt{1+u'^2}$

$$E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = u\sqrt{1+u'^2} - u'\cdot u \cdot \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1+u'^2 - u'^2\right) =$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = \text{konst} = C$$

$$u^2 = C^2(1+u'^2) \Rightarrow u'^2 = \frac{u^2}{c^2} - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{c}\sqrt{u^2-c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\int_a^z \frac{u'}{\sqrt{u^2-c^2}}\,dx = \int_a^z 1\,dx \Rightarrow \cancel{c}\ \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right)\Big|_a^z = \frac{z-a}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arch}\frac{u(z)}{c} - \operatorname{arch}\frac{y_0}{c} = \frac{z-a}{c}$$

$$\boxed{u(z) = C\cosh\left(\operatorname{arch}\frac{y_0}{c} + \frac{z-a}{c}\right)} \cancel{c\left(\frac{y_0}{c}\cosh\left(\frac{z-a}{c}\right)+\right.}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$

$$\operatorname{arcosh}(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - 1}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\right) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x$$

$$\operatorname{arsinh}(\cosh x) = \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \sqrt{\frac{e^{2x}+6+e^{-2x}}{4}}\right)$$

$$\boxed{u(x) = c\left[\frac{y_0}{c}\cosh\left(\frac{x-a}{c}\right) + \sinh\left(\operatorname{arcosh}\frac{y_0}{c}\right)\sinh\left(\frac{x-a}{c}\right)\right]}$$

$$\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \left[\frac{e^{+x}-e^{-x}}{2}\right]_{x=\operatorname{arcosh} x} =$$

$$= \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} - e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} = \frac{x+\sqrt{x^2+1} - x - \sqrt{x^2-1}}{2} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$\sinh\left(\operatorname{arcosh}\frac{y_0}{c}\right) = \frac{\sqrt{y_0^2+c^2} - \sqrt{y_0^2-c^2}}{2c}$$

$$\boxed{u(x) = y_0\cosh\left(\frac{x-a}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{y_0^2+c^2} - \sqrt{y_0^2-c^2}\right)\sinh\left(\frac{x-a}{c}\right)}$$

Úloha 3
Úloha 4

③ $I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx \qquad u(0)=0, \quad u(1)=1$

$F: 2u + u'^2$

$E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u + u'^2 - u' \cdot 2u' = 2u - u' = \text{konst} = C$

$u' = 2u + C \quad \Rightarrow \quad v' = 2v$

legyen $v = u + \frac{C}{2}$, $v' = u'$ $\Bigg| \int_0^z \frac{v'}{v}dx = \int_0^z 2dx \Rightarrow \ln|v|\Big|_0^z = 2z$

$\ln|v(z)| - \ln|v(1)| = 2z$

$\ln\left|u(x) + \frac{C}{2}\right| - \ln\left|u(1) + \frac{C}{2}\right| = 2x$

$\ln\left|u(x) + \frac{C}{2}\right| - \ln\left|\frac{C+2}{2}\right| = 2x$

$\ln\left|u(x) + \frac{C}{2}\right| = 2x + \ln\left|\frac{C+2}{2}\right|$

$\left|u(x) + \frac{C}{2}\right| = e^{2x} \cdot \left|\frac{C+2}{2}\right| \qquad$ tfh $C \geq 0$

$\left|u(x) + \frac{C}{2}\right| = e^{2x} \cdot \frac{C+2}{2}$

$u(x) = -\frac{C}{2} + \frac{C+2}{2} e^{2x}$

$u(0) = -\frac{C}{2} + \frac{C+2}{2} = 1$ Hibás!

③ $F = 2u + u'^2$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad (*)$$

Vagy:

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C \Rightarrow 2u + u'^2 - u'(2u') = C$$

$$2u - u'^2 = C$$

$$\underline{u' = \sqrt{2u + C}}$$

$$(*) \Rightarrow u'' = 1 \Rightarrow \underline{u = \frac{x^2}{2} + Cx + D}$$

$$I(u) = \int_0^1 (2u + u'^2)\, dx$$

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C \Rightarrow u'^2 - 2u = C \quad \Big| \frac{d}{dx} \Rightarrow$$

$$2u'u'' - 2u' = 2u'(\underbrace{u'' - 1}_{=0}) = 0$$

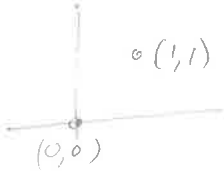
$$u'^2 = 2u + C$$

$$u' = \pm\sqrt{2u + C} \Rightarrow \pm\int \frac{u'}{\sqrt{2u + C}}\, dx = x + b \Rightarrow \pm\int \frac{du}{2\sqrt{u + D}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + b)$$

$$\sqrt{u + D} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + b)$$

$$u = \frac{(x + b)^2}{2} - D \Rightarrow u'' = 1 \quad (\text{Valóban!})$$

(3) $I(u) = \int_0^1 (2u + u'^2)\,dx$



Euler egyenlet: $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$

$$2 - \frac{d}{dx}\, 2\cdot u' = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}u' = 1 \Rightarrow \int_0^z \frac{d}{dx}u'(x)\,dx = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'(z) - u'(0) = z$$

$$\int_0^x u'(z)\,dz = \int_0^x (z + u'(0))\,dz \Rightarrow u(x) - \cancel{u(0)} = \frac{x^2}{2} + u'(0)\,x$$

$$u(x) = \frac{x^2}{2} + u'(0)\,x$$

$u(0) = 0$ ✓

$u(1) = \frac{1}{2} + u'(0) \Rightarrow u'(0) = +\frac{1}{2}$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)}$$

(3)

Energiával:

$$E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u + u'^2 - u'\cdot 2u' = 2u - u'^2 = C$$

$$u' = \sqrt{2u + C} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{u'\,dx}{\sqrt{u + C}} = \int 1\,dx$$

$$\sqrt{2}\int \frac{u'\,dx}{2\sqrt{u+C}} = x + D \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\sqrt{u+C} = x + D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = -C + \cancel{\tfrac{2}{2}}\,\frac{(x+D)^2}{2} = -C + \frac{x^2 + 2xD + D^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + xD + E$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) = 0 \Rightarrow E = 0 \\ u(1) = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow u(x) = \frac{x^2 + x}{2}$$

(5) $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u - 2\sin x - \frac{d}{dx}\left(4u'\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2u - 2\sin x - 4u'' = 0$$

$$2u'' - u = -\sin x \implies 2u'' - u + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow 2u'' + 2\sin x - u - \sin x = 0$$

$$2(u'' + \sin x) - u - \sin x = 0$$

legyen $u = v + \sin x$

$u' = v' + \cos x$

$u'' = v'' + \sin x$

$$2v'' + 2\sin x - v + \sin x - \sin x = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &2u'' + \tfrac{2}{3}\sin x - u - \tfrac{1}{3}\sin x = 0 \\ &2\left(u'' - \tfrac{1}{3}\sin x\right) - \left(u + \tfrac{1}{3}\sin x\right) = 0 \\ &\text{legyen } v = u + \tfrac{1}{3}\sin x \\ &v' = u' + \tfrac{1}{3}\cos x \\ &v'' = u'' - \tfrac{1}{3}\sin x \end{aligned}}$$

$$2v'' - v = 0$$

~~legyen $v^* = A\sin\omega x$~~

~~$v'' = -A\omega^2 \sin\omega x$~~

~~$-2A\omega^2 \sin\omega x - A\sin\omega x = 0$~~

~~$(-2A\omega^2 - A)\sin\omega x = 0 \quad \forall x$~~

~~$A(-2\omega^2 - 1) = 0$~~

$\omega^2 = -\frac{1}{2}$

$$2\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Ell: $v''(x) = \lambda_1^2 c_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2^2 c_2 e^{\lambda_2 x}$

$$2v''(x) - v(x) = (2\lambda_1^2 - 1)C_1 e^{\lambda_1 x} + (2\lambda_2^2 - 1)C_2 e^{\lambda_2 x}$$ ✓

$$u(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} - \frac{1}{3}\sin x$$

Legyen $\boxed{F = u^2 + 2u'^2 - 2u\sin x}$

$$F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'} = 2u - 2\sin x - 4u'' = 0$$

$$2u'' - u + \sin x = 0$$

$$2u'' + \frac{2}{3}\sin x - u + \frac{1}{3}\sin x = 0$$

$$\frac{2}{3}\left(3u'' + \sin x\right) - \frac{1}{3}\left(3u + \sin x\right) = 0$$

vagy:

$$2\left(u'' + \frac{1}{3}\sin x\right) - \left(u - \frac{1}{3}\sin x\right) = 0$$

legyen $v := u - \frac{1}{3}\sin x$

$$v' = u' - \frac{1}{3}\cos x$$

$$v'' = u'' + \frac{1}{3}\sin x$$

Ügyesebbekkel megoldva

tehát $2v'' - v = 0$

$$v'' = \frac{1}{2}v$$

ezért $v(x) = Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$

$$u(x) = \left(Ae^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right) + \frac{1}{3}\sin x$$

avagy $\underline{2u'' - u = -\sin x}$

homogén:

$2u'' = u \Rightarrow u_h = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x}$

állandók variálása:

~~[illegible]~~

próbafüggvény

$$u_{p} = u_h + C\sin x$$

$$u_p' = u_h' + C\cos x$$

$$u'' = u_h'' - C\sin x$$

$$2u'' - u = -\sin x$$

$$\cancel{2u_h''} - 2C\sin x - \cancel{u_h} - C\sin x = -\sin x$$

$$3C\sin x = \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$C = \frac{1}{3}$$

Minimális forgástest felszín

$$I[f] = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad f:[a,b]\to \mathbb{R}$$

↳ minim!

$$F(u,u') = u\sqrt{1+u'^2}$$

Általánosabban: $F(u,u') = g(u)\sqrt{1+u'^2} \Rightarrow 1 = \dfrac{u'}{\sqrt{\dfrac{g^2(u)}{c^2}-1}}$

$$x+b = \int \frac{du}{\pm\sqrt{\dfrac{g^2(u)}{c^2}+1}}$$

$$x-b = \boxed{\int \frac{du}{\sqrt{\dfrac{u^2}{c^2}-1}} = c\cdot \operatorname{acosh}\left(\frac{u}{c}\right)} = c\cdot \ln\left(\frac{u}{c}-\sqrt{\frac{u^2}{c^2}+1}\right)$$

$$\frac{x-b}{c} = \operatorname{acosh}\left(\frac{u}{c}\right) \Rightarrow \frac{u}{c} = \cosh\frac{x-b}{c}$$

$$\boxed{u = c\cdot\cosh\frac{x-b}{c}}$$ ← általános képlet

$$\begin{cases} u(0)=1 \\ u(1)=e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c\cdot\cosh\dfrac{-b}{c} = 1 \\ c\cdot\cosh\dfrac{1-b}{c} = e \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{b}{c}}+e^{\frac{b}{c}}}{2} = \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{e^{\frac{1-b}{c}}+e^{-\frac{1-b}{c}}}{2} = \dfrac{e}{c} \end{cases}$$

ha $c = 1$, $b = 0$

$$\boxed{u = \cosh x}$$

Minimális Forgástest felszíne

$$\frac{d}{dx}\frac{\mu'(x)}{\sqrt{1+\mu'(x)^2}} = 0 \quad \Big| \int_{x_0}^{z} dx$$

$$\int_{x_0}^{z}\left(\frac{\mu'(x)}{\sqrt{1+\mu'(x)^2}}\right)'_x dx = C$$

$$\frac{\mu'(z)}{\sqrt{1+\mu'(z)^2}} - \frac{\mu'(x_0)}{\sqrt{1+\mu'(x_0)^2}} = C \implies \frac{\mu'(z)}{\sqrt{1+\mu'(z)^2}} = D$$

$$\mu'^2(z) = D(1+\mu'(z)^2) \implies \mu'(z)^2 - D\mu'(z)^2 - D = 0$$

$$\mu'(z)^2(1-D) = D$$

$$\mu'(z) = \sqrt{\frac{D}{1-D}} = E$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\mu'(z)\,dz = \int_{x_0}^{x_1} E\,dx$$

$$\mu(x_1) - \mu(x_0) = E(x_1 - x_0)$$

$$\mu(x) = \mu(x_0) + E(x - x_0)$$

$$\mu(x_1) = \mu(x_0) + E(x_1 - x_0) = y_1 \implies E = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\mu(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

7 $F(x,u,u') = u'^2 + 2uu' - 16u^2$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 2u' - 32u - \frac{d}{dx}\left(2u' + 2u\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{2u'} + 32u - 2u'' - \cancel{2u'} = 0$$

$$u'' + 16u = 0$$

$$u_1 := A \sin \omega x \underset{\substack{A=1\\ \omega=4}}{=\!=} \sin 4x \qquad u_2 = \cos 4x$$

$$u_1'' = -16 \sin x$$

$$u(x) = c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x$$

Adott $\boxed{F = g(y)\sqrt{1+y'^2}}$ $F(y,y')$ $\int_{x_1}^{x_2} F\, dx = \text{min/max}$

$$F - u'\frac{\partial F}{\partial u'} = C$$

$$g(y)\sqrt{1+\cancel{y}'^2} - u'\frac{g(y)\,u'}{\sqrt{1+\cancel{y}'^2}} = C$$

$$\frac{g(y)\,(1+\cancel{y}'^2)}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{g(y)\,u'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = C$$

$$\frac{g(y)}{\sqrt{1+u'^2}} = C$$

Feladat: Brachistocrone (Bernoulli)

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-y_0}}\,dx$$

legyen $\bar{y} = y - y_0$

$\bar{y}' = y'$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+\bar{y}'^2}{\bar{y}}}\,dx$$

$$F(\bar{y},\bar{y}') = \sqrt{\frac{1}{\bar{y}}}\cdot\sqrt{1+\bar{y}'^2}$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}} \Rightarrow \int 1\,dx = \int\frac{u'}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x+b = \int\frac{du}{\sqrt{\frac{g(u)^2}{C^2}-1}}} \xrightarrow{\text{ha } g(u)=\frac{1}{\sqrt{u}},\ \frac{1}{C^2}=k} x+b = \int\frac{du}{\sqrt{\frac{k}{u}-1}}$$

$$x+b = \int\sqrt{\frac{u}{k-u}}\,du = k\int\sqrt{\frac{k\sin^2\frac{\theta}{2}}{k-k\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \left(= k\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)$$

legyen $u := k\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$

$du = \cancel{2}k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,d\theta$

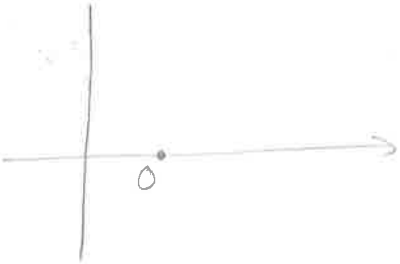
$$= k\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{k}{2}\int(1-\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= +b + \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta) \\ u &= \frac{k}{2}(1-\sin\theta)\end{aligned}}$$

Anal 3 2016. 10. 5

4. gyakorlat

-1- Brachistocrone



$$x = b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

$$y = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

$t = 0$, $\quad x(\theta_0) = b + \frac{k}{2}(\theta_0 - \sin\theta_0) = 0$

$\quad y(0) =$

Brachistocrone : $t = \frac{\text{distance}}{v}$

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{v}\, dl$$ → Ebből indulunk ki

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$ (itt történt a csalás)

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}}\, dl$$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in [x_1, x_2] \right\}$$

$$t_{1,2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2gy}} \|\dot\gamma(x)\|\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Hivatalosan:

$$E_k + E_{pot} = E_0 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = E_0 - mgy$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2gy}$$

Brachistocrone Bernoulli!

Hivatalosan úgy lenne, hogy:

$$t_{1,2} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2gy}}\, dl = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}}\, dx$$

Megoldva!

legyen $z = \frac{E_0}{mg} - y$, $z' = -y'$ $|^2$, $z'^2 = y'^2$

$$x = b + \frac{k}{2}(\theta + \sin\theta)$$

$$z = \frac{k}{2}(1 - \cos\theta)$$

nem szerencsés elhanyagolni! [illegible] ha $y_0 = \frac{E_0}{mg}$

$$x = b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \underset{=}{\overset{(b := 0)}{}} \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

$$y = \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1 - \cos\theta) = y_0 - \frac{k}{2} + \frac{k}{2}\cos\theta$$ (valóban $y(0) = y_0$)

Ha $t = 0$-ban $v(0) = 0$, $E_0 = mgy_0$

legyen $\theta_0 = 0$, $\theta_1 = ?$

legyen $k > \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

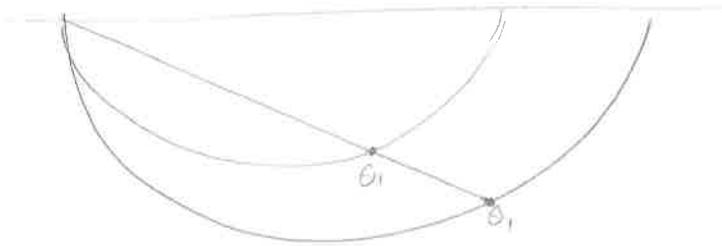
$$x(\theta_1) = \frac{k}{2}(\theta_1 - \sin\theta_1) = x_1$$

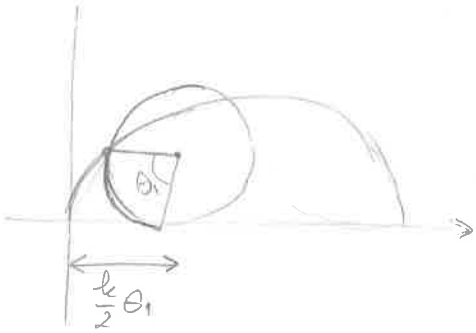
$$y(\theta_1) = y_0 - \frac{k}{2}(1 - \cos\theta_1) = y_1 \Rightarrow \cos\theta_1 = 1 + \frac{2(y_1 - y_0)}{k} \Rightarrow \theta_1 = \arccos\left(1 + \frac{2(y_1 - y_0)}{k}\right)$$

2016.10.5. Brachistocrone

$$\begin{cases} \frac{k}{2}(\theta_1 - \sin\theta_1) = x_1 \\ \frac{k}{2}(1-\cos\theta_1) = y_0 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 - \sin\theta_1 = \frac{2x_1}{k} \\ 1-\cos\theta_1 = \frac{2(y_0-y_1)}{k} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \theta_1 - \sin\theta_1 = \bar{x}_1 \\ 1-\cos\theta_1 = -\bar{y}_1 \end{cases}$$

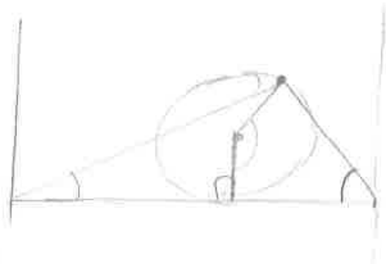
$$x(2\pi) = k\pi$$





$$\frac{\theta_1 - \sin\theta_1}{1-\cos\theta_1} = \frac{x_1}{y_0 - y_1}$$

$$\underbrace{\theta_1 - \sin\theta_1 = m - m\cos\theta_1}$$



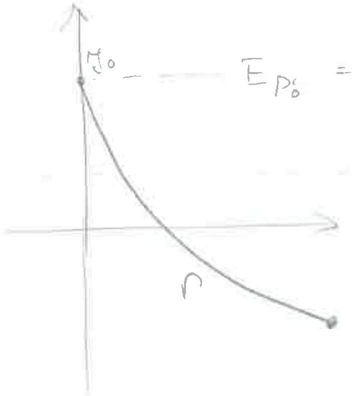
$$\theta_1 = \mathrm{fsolve}\left(\theta_1 - \sin\theta_1 - \frac{x_1}{y_0-y_1}(1-\cos\theta_1), \pi\right)$$

$$k = \frac{2x_1}{\theta_1 - \sin\theta_1}$$

Brachistochrone   TISZTA

Adott egy anyagi pont $(0, y_0)$ pontban, adott egy görbe lejtő: vége (x_1, y_0).

Az anyagi pont $(0, y_0)$-ban $\frac{m v_0^2}{2}$ kinetikus energiával rendelkezik



$$E_{p_0} = m g y_0 \; ; \; E_{k_0} = \frac{m v_0^2}{2} \Rightarrow E_0 = m g y_0 + \frac{m v_0^2}{2}$$

$$\to y \; : \; E_k + E_p = E_0 \Rightarrow \frac{m v^2}{2} + m g y = E_0$$

$$E_p = m g y_1$$

$$\frac{m v^2}{2} = E_0 - m g y$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - 2 g y}$$

$$v = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}$$

$$T = \text{„}\frac{\text{dist}}{v}\text{''} = \int_r \frac{dl}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}} \, dx$$

legyen $\boxed{u = \frac{E_0}{mg} - y}$

$$u' = -y' \quad |^2$$

$$u'^2 = y'^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} \, dx} \longrightarrow \min!$$

Jelöljünk egy általánosabb feladatot: $\int_{x_0}^{x_1} g(u)\sqrt{1+u'^2}\, dx \to \min$

$$F(x, u, u') = F(u, u')$$

↳ ez nincs!

$$\Downarrow$$

$$F(u,u') - u' \frac{\partial F}{\partial u'}(u,u') = C$$

$$C = g(u)\sqrt{1+u'^2} - u' \underbrace{g(u)\frac{2u'}{2\sqrt{1+u'^2}}}_{\frac{\partial F}{\partial u'}} \Longleftarrow$$

$$C = \frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1 + u'^2 - u'^2\right)$$

Tehát:

$$\boxed{\frac{g(u)}{\sqrt{1+u'^2}} = C} \Longrightarrow 1 + u'^2 = \frac{g^2(u)}{C^2} \nearrow$$

$$u' = \pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{C^2} - 1} \Longrightarrow \frac{u'}{\pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{C^2} - 1}} = 1$$

Ennek jelentősége lesz.

Brachistochrone
Levezetés ①
Anal 3

$$\frac{u'}{\pm\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}} = 1 \quad \Big| \int dx \implies \pm\int \frac{u'}{\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}}\,dx = x-b$$

$$\boxed{du(x) = u'(x)\,dx}$$
röviden:
$$du = u'dx$$

$$\boxed{x-b = \pm\int \frac{du}{\sqrt{\frac{g^2(u)}{c^2}-1}}}$$

→ Ezt kell majd megoldani

Brachistocrone: $g(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} \xRightarrow{\text{ellenőr.}} F = g(u)\sqrt{1+u'^2} = \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}}$ ✓

$$x-b = \pm\int \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{c^2 u}-1}} \overset{k:=\frac{1}{c^2}}{=} \pm\int \frac{du}{\sqrt{\frac{k-u}{u}}} = \pm\int \sqrt{\frac{u}{k-u}}\,du$$

Ha $\theta \in [0,\pi) \Rightarrow$ legyen +
Ha $\theta \in (\pi, 2\pi] \Rightarrow$ legyen −

Legyen $u = k\sin^2\frac{\theta}{2}$ (*)
(változócsere)

láncszabály alapján

$$du = \frac{\partial u}{\partial \theta}\,d\theta = 2k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2}\,d\theta$$

$\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} \geq 0$

$$du = k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$x-b = \pm\int\sqrt{\frac{k\sin^2\frac{\theta}{2}}{k-k\sin^2\frac{\theta}{2}}}\;k\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \pm k\int\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta =$$

$$= k\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\int\frac{1-\cos\theta}{2}\,d\theta = \frac{k}{2}(\theta-\sin\theta)$$

Tehát:

$$x = b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta)$$

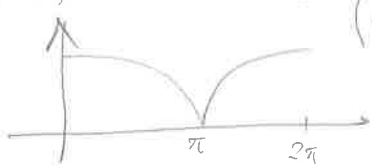
vált. csere

$$(*) \implies u = \frac{k}{2}(1-\cos\theta)$$

$$u = \frac{E_0}{mg} - y$$

$$\implies \boxed{\begin{aligned} x &= b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

Megj: ha fordítva veszem fel az előjeleket, akkor ez jött volna ki: (valami hasonló)



$$\boxed{\begin{aligned} x &= b + \frac{k}{2}(\theta - \sin\theta) \\ y &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

$\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$\left.\begin{aligned} x(\theta_1) &= x(t=0) = 0 \\ y(\theta_1) &= y(t=0) = y_0 \\ x(\theta_2) &= x(t=T) = x_1 \\ y(\theta_2) &= y(t=T) = y_1 \end{aligned}\right\} \text{ Ezeket tudjuk!}$$

Kérdés: $\theta_1, \theta_2, k, b = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} y(\theta_1) &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1-\cos\theta_1) = y_0 \\ x(\theta_1) &= b + \frac{k}{2}(\theta_1 - \sin\theta_1) = 0 \\ y(\theta_2) &= \frac{E_0}{mg} - \frac{k}{2}(1-\cos\theta_2) = y_1 \\ x(\theta_1) &= b + \frac{k}{2}(\theta_2 - \sin\theta_2) = x_1 \end{aligned}}$$

$$\frac{k}{2}(1-\cos\theta_1) = 0 \Rightarrow \underline{\theta_1 = 0}$$

$\theta_1 = 0$: $\underline{b = 0}$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{k}{2}(1-\cos\theta_2) &= y_1 - y_0 \\ \frac{k}{2}(\theta_2 - \sin\theta_2) &= x_1 \end{aligned}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

Tfh $v_0 = 0 \Rightarrow E_0 = mgy_0$

$$\underline{\frac{E_0}{mg} = y_0}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad \frac{1-\cos\theta_2}{\theta_2 - \sin\theta_2} = \frac{y_0 - y_1}{x_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{fsolve}\Big(x_1(1-\cos\theta_2) - (y_0 - y_1)(\theta_2 - \sin\theta_2)\Big) \Rightarrow \underline{\theta_2}$$

$$\underline{k = \frac{2x_1}{\theta_2 - \sin\theta_2}}$$

Az fsolve ezt is meg tudja oldani!

Brachistochron Levezetés (2) Anal 3

2047b levezetés

$$I(u) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}}\, dx \leftarrow \min.$$

$$E = F - u' F'_{u'} = \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}} \Big|^2$$ mivel $\sqrt{u}\sqrt{1+u'^2}$ mindig pozitív

$$\frac{1}{u(1+u'^2)} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{C}{u} - 1 = u'^2 \implies u' = \sqrt{\frac{C-u}{u}} \implies \frac{u'}{\sqrt{\frac{C-u}{u}}} = 1$$

vagyis $\int \sqrt{\frac{u}{C-u}}\, u'\, dx = \int dx$

$$x - D = \int \sqrt{\frac{u}{C-u}}\, du = C \int \sqrt{\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

legyen $u = C \sin^2\frac{\theta}{2}$

$du = C \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$$= C \int \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\theta = \frac{C}{2} \int (1-\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta)$$

tehát
$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{C}{2}(\theta - \sin\theta) + D \\ u &= \frac{C}{2}(1-\cos\theta) \end{aligned}}$$

Brachistochrone (térben)

$$T(y,z) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z_1 - z}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}\, dx$$

Euler egyenletek:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \Rightarrow \frac{1}{z}\frac{y'}{\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}} = C_1$$

$$\boxed{\frac{y'}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1} \quad (1)$$

$$F - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C_2$$

$$\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}} - z'\frac{\frac{1}{z}\cdot z'}{\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{z}}} = C_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{1+y'^2+z'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} - \frac{z'^2}{\sqrt{z}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_2$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{z}}\frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_2} \quad (2)$$

$$\frac{y'}{1+y'^2} = \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow y' = C_3$$

$$\boxed{y = C_3 x + C_4}$$

(1)-be behelyettesítem $y = C_3 x + C_4$-et

$$\frac{C_3}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+C_3^2+z'^2}} = C_1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_4^2+z'^2}} = C_5}$$

$$z C_4^2 + z z'^2 = C_5^2$$

$$\sqrt{z}\, z' = \sqrt{C_5^2 - z C_4^2}$$

$$\boxed{z' = \sqrt{\frac{C_5^2 - zC_4^2}{z}}} \rightarrow \text{Ciklois}$$

Brachistoch
TÉRBEN

Analízis III. 8. heti feladatok
2015. november 13.

Variációszámítás 2. rész.

1. (Minimalis felszínű forgástest) Keressük az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, $f(0) = 1$ és $f(1) = e$ feltételeket kielégítő függvények közül azt, melyre a görbe által meghatározott forgástest felszíne minimális. (A forgástest felszíne $\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx$.) Múlt hét

4

2. Határozzuk meg a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (A függvény gráfja alatti terület ~~legkisebb~~.) legnagyobb jövő hét

5

3. Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám.* jövő hét

4. (HF) Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ intervallumon, melyre a görbe alatti terület maximális, azaz jövő hét

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(t)\,dt \quad \to \quad \max$$

2

5. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

(NS) 1 a)

6. (HF) Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket osszekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, z sík origó közepű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az y tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, y).)

b) $(1,0,0)$ $(-1,1,0)$ konkrétan

7. Az 1. feladatban leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

(Térbeli Brachistochrone)

3 Adott a térben két pont. $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=0,1$, melyeket egy huzallal összekötnek, és egy golyót indítunk egy huzallal összekötnek, Felteszzük, hogy a gravitáció az y tengely mentén hat. Milyen görbe mentén lesz az idő minimális

$$T = \int^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2(x)+z'^2(x)}{y(x)-y_0}}\,dx$$

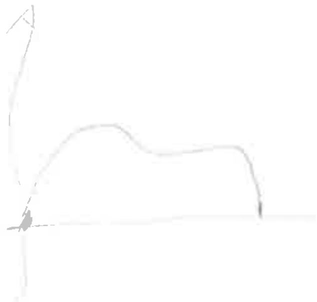
Varsedu 2
Gyak 5

$\boxed{\text{INS}}$

Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja a (x,y) síkbeli egységkör. Adott két pont $(1,0,0)$ és $(-1,0,1)$. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston

2) $y(0)=0$ $\quad$ $y(1)=0$

$y(x) \geq 0$



A) Tfh fv gráf hossza fix $L > 1$

Miker lesz a fv gráf alatti terület maximális

(3) B) Tfh a fv alatti terület fix.

Mikor lesz a fv gráf hossza minimális?

~~(Didó királynő feladata)~~

egyenes ált: $I(y,z)=\int_{x_0}^{x_1} \underbrace{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}_{F(x,y,z,y',z')}\,dx$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C_1 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1 \quad \Big|^2 = \frac{y'^2}{(1+y'^2+z'^2)} = C_2$$

$$\Rightarrow y'^2 = \pm C_1^2 (1+y'^2+z'^2)$$

$$y'^2 = C_2(1+y'^2+z'^2)$$

$$y'^2(1-C_2) = C_2(1+z'^2)$$

$$y' = \sqrt{\frac{C_2}{1-C_2}} \cdot \sqrt{1+z'^2}$$

$$\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_3 \Rightarrow \frac{z'^2}{1+y'^2+z'^2} = C_4$$

$$\Downarrow$$

$$z'^2+y'^2 = C_5(1+y'^2+z'^2)$$

$$(z'^2+y'^2)(1-C_5) = C_5$$

$$\underbrace{z'^2+y'^2 = C_6}$$

ez még nem elég

Hamilton elv

→ időben változó mechanikai rend

legtöbb hatás elve

least action principle

$$\min \int_{t_1}^{t_2} T - U \, dt$$

T → kinetikus

U → potenciális

$$U = U(q_1, .., q_n)$$

$$T = T(\dot q_1, .., \dot q_n) = \dot q^T P \cdot \dot q$$

$$P = P^T$$

természetes trajektória

$$T - U - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \dot q_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}} = C_1$$

$$\langle \nabla T, \dot q \rangle = 2T$$

$$U + T = C_2$$

d'Alembert elv

Mechanikai rendszer stabil állapotban van (minimum magas) $\Longrightarrow$

$\Rightarrow$ Helyzeti energia minimális

Alapfeladat: keressük u függvényt $u: [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer diffható

$$u(x_0) = u_0$$
$$u(x_1) = u_1$$
$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u')\, dx \to \text{extrémum}$$

ez egy funkcionál!

$$L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = \delta I(u) \quad \text{első variáció}$$

(M) elégséges feltétel minimumra: az ú.n. Lagrange kritérium

ha $F''_{u'u'}(x, u(x), u'(x)) \geq 0 \Rightarrow$ valóban minimum

„Hesse mátrix pozitív definit"

Általános esetek:

legyen egy $\gamma(t) = (x, y, z)$ → két pontot összekötő legrövidebb görbe

$$I(x,y,z) = \int_\Gamma dt = \int_0^1 \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = 0$$

ált: $\boxed{\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = 0}$

ha $F(x, q, \dot{q}) = F(q, \dot{q}) \Rightarrow F - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j F'_{\dot{q}_j} = C$

$$\boxed{F - \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = C}$$

Adott egy anyagi pont : $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Akkor ennek mozgási energiája : $T = E_k = W_k = \dfrac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$

Hat rá egy $\vec{F}_k(r)$ konzervatív erőtér

$\Downarrow$

$\exists\, V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ u.h. $\vec{F}_k(r) = -\nabla V(r)$ ~~Potenciális energia!~~

$\downarrow$

potenciális energia!

Hat rá egy $\vec{F}_{ext}(t)$ külső erő!

Ekkor $L(t, r, \dot{r}) = T - \mathcal{U} + \langle r, F_{ext}(t) \rangle$

$= T - \mathcal{U} + r^T F_{ext}(t)$

$$H(t, r, \dot{r}) = L - \dot{r}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \quad (\text{Hamiltonian}) \neq \text{konst}$$

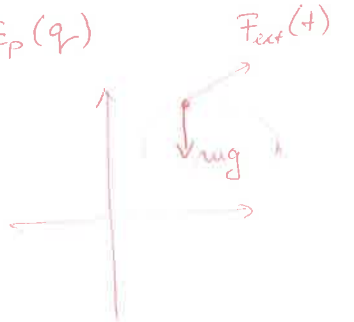
Röviditve : q általánosított koordinátavektor → ennek dimenziója függ a dlf. paraméterek dimenziójától.

$$\boxed{L(t, q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q) + q^T \cdot F_{ext}(t)}$$

→ külső erő hatása

→ konzervatív erő hatása $\vec{F}_{con}(q) = -\nabla E_p(q)$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$



Konkrét példa : $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ legyen $F_{ext}(t)$

$E_k(q, \dot{q}) = E_k(\dot{q}) = \dfrac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$

Legyen gravitációs mező : $\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \Rightarrow V_G = mgz$

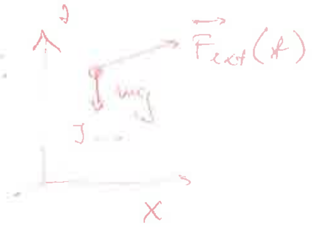
$$q^T \cdot F_{ext}(t) = x F_1(t) + y F_2(t) + z F_3(t)$$

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - mgz + \underbrace{q^T F_{ext}(t)}_{\text{hagyományos skalárszor.}}$$

Ext force

Másik gyakorlás
Variációs szt.
Lagrange...

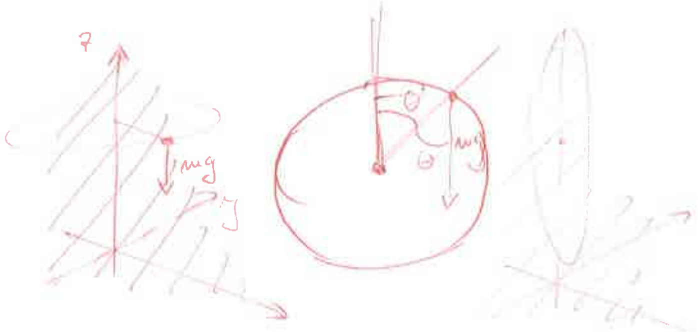
① Anyagi pont :

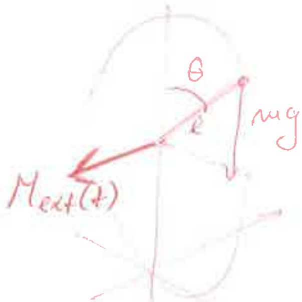


$$\boxed{L = \underbrace{\frac{m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{2}}_{E_k} - \underbrace{mgz}_{E_p} + q^T F_{ext}(t)}$$

megj : $-\nabla E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

②





Kingaspil :

$$\boxed{L = \underbrace{\frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2}_{E_k} - \underbrace{mgl\cos\theta}_{E_p} + \theta \cdot M_{ext}(t)}$$

megj : $\cancel{-\nabla E_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ +mgl\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ l\cos\theta \\ l\cos\theta \end{pmatrix}}$

$$-\nabla E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\sin\theta = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l\sin\theta \\ 0 \\ l\cos\theta \end{pmatrix} \right\| = \underbrace{\|\vec{G} \times \vec{l}\|}_{\text{Forgató nyomaték}}$$

③ Két DB anyagi pont :

$$L = \underbrace{\underbrace{\frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2)}_{E_{k_1}} + \underbrace{\frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2)}_{E_{k_2}}}_{E_k = T} + \underbrace{m_1 g z_1 + m_2 g z_2}_{E_p} + r_1^T F_{1ext}(t) + r_2^T F_{2ext}$$

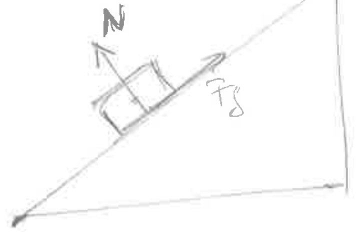
$$= E_{k_1} + E_{k_2} + E_{p_1} + E_{p_2} + q^T \cdot \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}$$

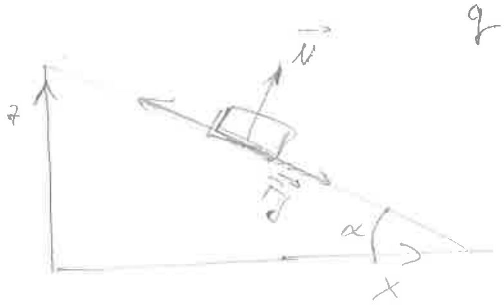
Ext. force

Ind3 gyakorlat
Variációs
Lagrangian

$V_G = mgz$

$q = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$





$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ α

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot R_\alpha F_J}$

$R_\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{N} = \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\sin\alpha \\ N\cos\alpha \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{F_J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F_J \\ 0 \end{pmatrix} = F_J \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ +\sin\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{N} + \vec{F_J} = N \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} + F_J \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ +\sin\alpha \end{pmatrix}$

$L = T - U + q^T \left(\vec{N} + \vec{F_J} \right) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - mgz \ldots$

$= T - U + x(N\sin\alpha - F_J\cos\alpha) + z(N\cos\alpha + F_J\sin\alpha)$

$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \underbrace{-m\ddot{x}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}} + \underbrace{N\sin\alpha - F_J\cos\alpha}_{\frac{\partial L}{\partial x}} = 0$

$\cancel{\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} + N\sin\alpha + F_J\cos\alpha = 0}$

$\cancel{\partial L}$

! ACHTUNG! (Pistazie) -3-

Ext force

erhalt gyhrw.

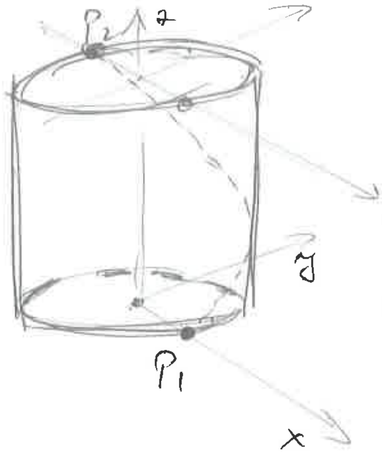
Variationsm.

Lagrangian

©2016 de

(1) $P_1 = (1, 0, 0)$

$P_2 = (-1, 0, 1)$



$$S(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$ henger paraméteres megadása!

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \int_\gamma d\ell = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\dot{\theta}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\boxed{q := \begin{pmatrix} \theta \\ z \end{pmatrix} \quad \text{általánosított koordináták}}$$

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}\, dt \Rightarrow F(q, \dot{q}) = \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

$$1: \quad \cancel{\frac{\partial F}{\partial \theta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}} = C_1 \Rightarrow \dot{\theta} = C_2 \Rightarrow \theta = C_2 t + C_3$$

Egyenlet rendszer! Figyelem!

$$2: \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = C_4 \Rightarrow \dot{z} = C_5 \Rightarrow z = C_5 t + C_6$$

Legyen $t \in [0, 1]$

$$z(0) = C_6 = 0$$

$$z(1) = C_5 + C_6 = 1 \Rightarrow C_5 = 1$$

$$x(0) = \cos(\cancel{C_2 t} + C_3) = 1 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$x(1) = \cos(C_2 + C_3) = -1 \Rightarrow C_2 = \pi$$

tehát $$\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \pi t \\ \sin \pi t \\ t \end{pmatrix}}$$

Végeredmény

(1.) fel

Anal3 gyakorlat Variációszámítás 5. gyak 1/

2016 ok

Lagrange multiplikatorral:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1 \sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\, dt \\ + \text{feltétel: } G(x,y,z)=0\end{array}\right\} \Rightarrow H = \|\dot\gamma(t)\| - \lambda(t)\, G(x,y,z)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot x} = 0 \Rightarrow G'_x = \frac{d}{dt}\frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} \perp \text{felület}}$$

$$t = f(u)$$
$$dt = f'(u)\, du$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t) \\ t = x^2 \\ dt = 2x\,dx\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d}{2x\,dx}\sin(x^2) \stackrel{?}{=} \cos(x^2)$$

valóban:

$$\frac{d}{dt}\sin(x^2) = 2x\cos(x^2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x\left\langle \nabla\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix}\right\rangle + \frac{\dot x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -x\frac{1}{2}\frac{x\cdot\dot x+y\dot y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{\dot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{2}\frac{x^2\dot x+xy\dot y}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{\dot x x^2+\dot x y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} =$$

Legyen: $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = 2x\dot x+2y\dot y$

$$\begin{array}{l|l} t = f(u) & \frac{d}{f'(u)\,du}\left(x(f(u))^2+y(f(u))^2\right) = 2x(f(u))\,x'(f(u)) + 2y(f(u))\,y'(f(u)) \\ dt = df(u) & \\ dt = f'(u)\,du & \frac{d}{du}\left(x(f(u))^2+y(f(u))^2\right) = f'(u)\,\cdot\cdot\cdot \end{array}$$

$$x(t)^2+y(t)^2 = 0$$
$$\sin(t)+\cos(t) = 0$$

Geodetikus probléma

$$t := \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$dt = d\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + z^2}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt} x$$

$$F(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = \sqrt{\dot{v}^2 + \dot{u}^2 \sin^2 v}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \frac{(\sin^2 v) \cdot \dot{u}}{\sqrt{\dot{v}^2 + \dot{u}^2 \sin^2 v}}$$

Alt :

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{a^2+b^2} \\ a \cdot \frac{\partial F}{\partial a} &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b \cdot \frac{\partial F}{\partial b} &= \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = a \cdot \frac{\partial F}{\partial a} + b \frac{\partial F}{\partial b}$$

$$F = \nabla F \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\frac{\dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi}} = C_1$$

$$\frac{\dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{d}{dt} \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi}} = 0$$

$$E[\Theta] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\sqrt{1 + \Theta'^2 \sin^2\varphi}\right]^2 d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(1 + \Theta'^2 \sin^2\varphi\right) d\varphi$$

$$\frac{\partial F^E}{\partial \Theta'} = 2C \Rightarrow \Theta = D + C \int \frac{1}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = D - C \cdot \operatorname{ctg}(\varphi)$$

$$\Theta = D - C \cdot \operatorname{ctg}\varphi$$

$$X(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\Theta(\varphi)) \\ \sin(\varphi)\sin(\Theta(\varphi)) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$E[\varphi, \Theta] = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\dot\varphi^2 + \dot\Theta^2 \sin^2\varphi\right)}_{F(\varphi, \dot\Theta, \dot\varphi)} dt$$

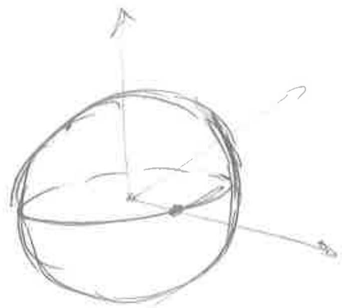
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \dot\Theta} = 2C_1 \\ F - \dot\varphi \dfrac{\partial F}{\partial \dot\varphi} = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot\Theta = \dfrac{C_1}{\sin^2\varphi} \\ \dot\varphi^2 + \dot\Theta^2 \sin^2\varphi - 2\dot\varphi^2 = C_2 \Rightarrow \dfrac{C_1^2}{\sin^2\varphi} - \dot\varphi^2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot\Theta = \dfrac{C_1}{\sin^2\varphi} \\ \dot\varphi = \sqrt{\dfrac{C_1^2}{\sin^2\varphi} - C_2} \end{cases}$$

Ezt a gondolat menetet sem ártana folytatni

(2)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi(t)\ \cos\theta(t) \\ \sin\varphi(t)\ \sin\theta(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$



$$\dot\gamma_1(t) = \cancel{\dot\varphi\cos\varphi\cos\theta} = \dot\varphi\cos\varphi\cos\theta - \dot\theta\sin\varphi\sin\theta$$

$$\dot\gamma_2(t) = \dot\varphi\cos\varphi\sin\theta + \dot\theta\sin\varphi\cos\theta$$

$$\dot\gamma_3(t) = -\dot\varphi\sin\varphi$$

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot\varphi^2(\cos\varphi)^2(\cos\theta)^2 - 2\dot\varphi\dot\theta(\sin\varphi)(\sin\theta)(\cos\varphi)(\cos\theta) + \dot\theta^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$
$$+ \dot\varphi^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2\dot\varphi\dot\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\sin\theta + \dot\theta^2\sin^2\varphi\cos^2\theta$$
$$+ \dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$= \dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\theta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$= \dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi$$

$\boxed{\text{Matlabbal ellenőrizve}}$

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}}_{F(q,\dot q)}\,dt$$

$\boxed{q := \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \text{ ált. koordináták}}$

Euler egyenletek: $\dfrac{\partial F}{\partial \dot q_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \dot\theta} = C_1 \Rightarrow \dfrac{\dot\theta}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}} = C_1$

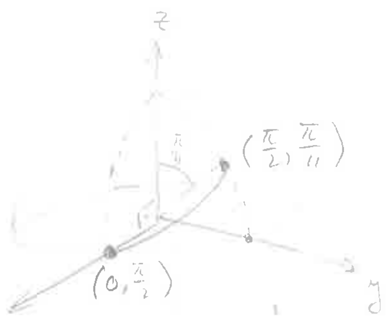
$$\frac{\partial F}{\partial q_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot q_2} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot\varphi} = \frac{\dot\theta\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}} - \frac{d}{dt}\frac{\dot\varphi}{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}}$$

= Nagyon undorító lesz! (Matlab)

Anal3 - Variációsz
GEODESICS-gömb

② Geodesic curves (az egységgömbön)

Legrövidebb út $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ és $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ között



$$\ell = \int_\Gamma d\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)\cos\theta(t)\,\sin\varphi(t) \\ r(t)\sin\theta(t)\,\sin\varphi(t) \\ r(t)\cos\varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Megszorítás: $r(t) = 1$

$$\dot\gamma_1(t) = -\dot\theta\sin\theta\sin\varphi + \dot\varphi\cos\theta\cos\varphi$$
$$\dot\gamma_2(t) = \dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi$$
$$\dot\gamma_3(t) = -\dot\varphi\sin\varphi$$

$$[\dot\gamma_1(t)]^2 = \dot\theta^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\cos^2\theta\cos^2\varphi - 2\dot\varphi\dot\theta\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$[\dot\gamma_2(t)]^2 = \dot\theta^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + 2\dot\theta\dot\varphi\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$$
$$[\dot\gamma_3(t)]^2 = \dot\varphi^2\sin^2\varphi$$

$$\|\dot\gamma(t)\|^2 = \dot\theta\sin^2\varphi + \dot\varphi^2\cos^2\varphi + \dot\varphi^2\sin^2\varphi = \dot\theta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2$$

tehát $\ell = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot\gamma(t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\sin^2\varphi}}_{F(t,\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)}\, dt$, ahol $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

tehát keresünk egy 2D-s $\xi(t) = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \varphi(t)\end{bmatrix}$ paraméteres görbét.

Technikailag $F(t,\varphi,\theta,\dot\varphi,\dot\theta)$ Euler egyenleteket NEHÉZ megoldani.

Azonban egy 2D paraméteres „szép" görbe explicit függvénnyel is megadható. Tfh $u = \varphi(t)$-nek $\exists$ inverze: $\begin{cases} t := \varphi^{-1}(u) \\ u = \varphi(t)\end{cases}$

Ekkor: $dt = \frac{d}{du}\varphi^{-1}(u)\cdot du$ tudniillik: $\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}$

$$\boxed{dt = \frac{1}{\dot\varphi(t)}\, du}$$

$$\theta(t) = \theta(\varphi^{-1}(u)) =: \vartheta(u)$$

$$\frac{d\vartheta(u)}{du} = \frac{d\theta(\varphi^{-1}(u))}{du} = \frac{d\theta}{dt}(\varphi^{-1}(u))\cdot\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \dot\theta(t)\cdot\frac{1}{\dot\varphi(t)}$$

$$\Rightarrow \ell = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1+\vartheta'^2\sin^2 u}\, d$$

Ind 3 – Variációszámítás II
GEODESICS – gömb
↳ Nincs megoldva

~~Tehát~~ ~~legyen~~

Más jelölésekkel: $\begin{cases} \varphi = f(t) \\ \theta = g(t) \end{cases}$ $\quad \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} f(t)$

$\dot{\theta} = \frac{d}{dt} g(t)$

Tfh $\exists f^{-1}$ és ~~legyen~~

Ekkor $t = f^{-1}(\varphi)$

$$dt = \frac{d f^{-1}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi \Rightarrow dt = \frac{1}{\frac{d f(t)}{dt}} d\varphi \Rightarrow \boxed{dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}}$$

$$\theta = g(t) = g(f^{-1}(\varphi))$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{dg(t)}{d\varphi} = \frac{d\left(g(f^{-1}(\varphi))\right)}{d\varphi} = \frac{\left[\frac{dg(t)}{dt}\right]_{t = f^{-1}(\varphi)}}{\frac{d f(t)}{dt}} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2\varphi}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left[\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\right]^2 \sin^2\varphi}\, \frac{dt}{\dot{\varphi}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \theta'(t)^2 \sin^2\varphi(t)}\, dt \overset{\text{átírás}}{=} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2 \sin^2 f(x)}\, dx = (*)$$

Változócsere: legyen $y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)\, dx$

$$\frac{d}{dy} \overbrace{g(f^{-1}(y))}^{\bar{g}(\theta)} = \left[\frac{d g(x)}{dx}\right]_{x = f^{-1}(y)} \cdot \frac{d f^{-1}(y)}{dy} = \frac{\left[g'(x)\right]_{x = f^{-1}(y)}}{\left[f'(x)\right]_{x = f^{-1}(y)}}$$

$$(*) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left[\frac{g'(x)}{f'(x)}\right]^2 \sin^2 f(x)} \cdot f'(x)\, dx \quad \underline{\underline{\text{áttérés } y\text{-ra}}}$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1 + (\bar{g}'(y))^2 \sin^2 y}\, dy$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\theta}^2(t)\sin^2\varphi(t)}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \underbrace{\left[\frac{\dot\theta(t)}{\dot\varphi(t)}\right]^2}_{\bar\theta'(u)} \sin^2\varphi(t)}\ \underbrace{\dot\varphi(t)\, dt}_{du} = (*)$$

legyen $u = \varphi(t) \Rightarrow du = \dot\varphi(t)\, dt$

$\exists\ t = \varphi^{-1}(u) \Rightarrow$ $\boxed{\frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{\left[\dot\varphi(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}}$

legyen $\bar\theta(u) = \theta(\varphi^{-1}(u))$

$$\frac{d\bar\theta(u)}{du} = \frac{d\theta(\varphi^{-1}(u))}{du} = \left[\dot\theta(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)} \cdot \frac{d\varphi^{-1}(u)}{du} = \frac{\left[\dot\theta(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}{\left[\dot\varphi(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(u)}}$$

$u_1 = \varphi(t_1)$

$u_2 = \varphi(t_2)$

$$(*) = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + \bar\theta'(u)^2 \sin^2 u}\, du \underset{\text{átírás}}{=} \boxed{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}\, d\varphi} = I[\theta]$$

$$F(\varphi, \theta, \theta') = \sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}$$

Euler-Lagrange: $\cancel{\frac{\partial F}{\partial \theta}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial\theta'} = C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\theta'(\varphi)\sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi}} = C_1 \Rightarrow \theta'(\varphi)^2\sin^4\varphi = C_1^2 + C_1^2\theta'(\varphi)^2\sin^2\varphi$$

$$\theta'(\varphi)^2\left[\sin^4\varphi - C_1^2\sin^2\varphi\right] = C_1^2 \Rightarrow \theta'(\varphi)^2 = \frac{C_1^2}{\sin^4\varphi - C_1^2\sin^2\varphi}$$

$$\theta'(\varphi) = \frac{C_1}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - C_1^2}} \Rightarrow \theta(\varphi) = C_1^2 \int \frac{1}{\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - C_1^2}}\, d\varphi + C_2$$

ha $C_1 \geq 1$ akkor $\sqrt{\sin^2\varphi - C_1^2}$ nem értelmes.

$\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\varphi \in \left[\frac{\sqrt2}{2}, 1\right] \Rightarrow \sin^2\varphi \in \left[\frac12, 1\right] \Rightarrow C_1^2 < \frac12$

általános esetben $C_1 = 0$!

Vajon? GEODESICS

Hamilton fv

$$-H = F - \theta' \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi} - \frac{\theta'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} \Rightarrow H = \frac{-1}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}}$$

$$H = -\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi} + \theta' p$$

$$\dot p = \cancel{-\frac{\dot\theta \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}} + p} \quad ① \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta'} = c_1$$

$$\dot q = \dot\theta = \theta'$$

olvasább lebteln!

---

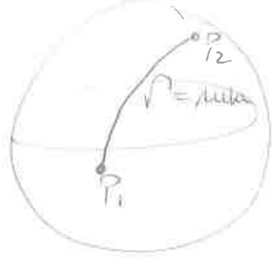
ha $\varphi = \varphi(\theta) \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi}\, dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}\, d\theta$

$$\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi} - \frac{\varphi'^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}} = C$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{\varphi'^2 + \sin^2\varphi}} = C \Big|^2 \Rightarrow \sin^4\varphi = C^2\varphi'^2 + C^2\sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow \sin^2\varphi\underbrace{(\sin^2\varphi - C^2)}_{\geq 0\ \forall\varphi \text{ ha } C=0} = C^2\varphi'^2$$

Geodesics on a sphere :



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$S(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta \\ a \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi(t) \cos\theta(t) \\ a \sin\varphi(t) \sin\theta(t) \\ a \cos\varphi(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{a^2\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 \sin^2\varphi\right)}$$

tfh $\varphi \mapsto \theta(\varphi)$

$$\|\gamma(\varphi)\| = a\sqrt{1 + \theta'(\varphi)^2 \sin^2\varphi} = F(\varphi, \cancel{\theta}, \theta') \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \theta'} = C_1$$

$$\frac{\theta' \sin^2\varphi}{\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{c_1}{a} \Big|^2 \Rightarrow \theta'^2 \sin^4\varphi = \frac{c_1^2}{a^2} + \frac{c_1^2}{a^2}\theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\cancel{\theta'^2 \sin^4\varphi = \frac{c_1^2}{a^2}\left(1 + \theta'^2 \sin^2\varphi\right)}$$

$$\cancel{\theta'^2 \sin^4\varphi\left(1 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{c_1^2}{a^2}}$$

$$\cancel{\theta'^2 = \frac{c_1^2}{a^2} \frac{1}{\sin^4\varphi\left(1 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right)}}$$

$$\frac{a^2}{c_1^2}\theta'^2 \sin^4\varphi - \theta'^2 \sin^2\varphi = 1$$

$$\theta'^2 \sin^4\varphi\left[\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right] = 1$$

$$\boxed{\theta'^2 = \frac{1}{\sin^4\varphi\left[\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right]}}$$

$$\theta = D + \int \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\frac{a^2}{c_1^2} - \frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}}}\, d\varphi = D + \int \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{a^2}{c_1^2} - 1\right)}_{b^2} + \mathrm{ctg}^2\varphi}}\, d\varphi =$$

$$= D + \int \frac{(\mathrm{ctg}\,\varphi)'\, d\varphi}{\sqrt{b^2 + (\mathrm{ctg}\,\varphi)^2}} = D + \int \frac{dv}{\sqrt{b^2 + v^2}} = D + \arcsin\frac{v}{b} =$$

$$= D + \arcsin\frac{c_1 \mathrm{ctg}\,\varphi}{\sqrt{a^2 - c_1^2}}$$

Courant–John : vol II / 764 pg.

Robert Weinstock : Calculus of Var with Apps

↳ 27old (35)

↳ ebben találtam ezt annak

„As a particular case we consider."

Anal 3 – Variációs.

GEODESICS

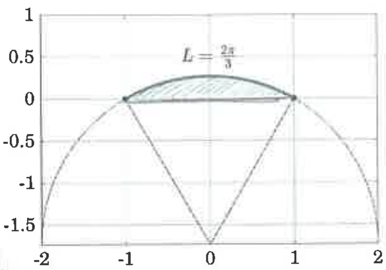
Gömb.

Analízis III. 9. heti feladatok

2017. november 16.

Variációszámítás 2. rész.

✓1. Határozzuk meg a $P_0(-1,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat az $y \geq 0$ félsíkban összekötő *adott L hosszúságú* vonalak közül azt, amelyik integrálja maximális. (Az $y = y(x)$ függvény gráfja alatti terület legnagyobb.) Adjuk meg $y(x)$ függvényt $L = \pi$, majd $L = \frac{2\pi}{3}$ esetén.
Extra kérdés: Milyen L esetén van megoldása a feladatnak?*



[HF$_1$] Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(1,0)$ pontokat összekötő von alak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti *terület adott A szám. Extra kérdés*: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

[HF$_2$] Egyenes henger felületén adott két pont. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a henger felszínén. (Legyen a henger alapja az x, y sík origó középű egységköre. A henger palástja ekkor párhuzamos az z tengellyel. A pontok paraméterezése: (θ, z).) Mi lesz a görbe egyenlete abban a konkrét esetben, amikor a két pont: $P_1(1,0,0)$, $P_2(-1,0,1)$.

2. Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. (Ezek a gömbfelszín geodetikus görbéi.)

3. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest fel színén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

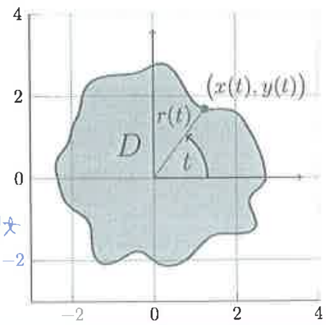
E-L
$F(x, u')$
típusú
$F'_{u'} = C$

4. Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy $L > 2x_1$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális? Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differneciálható függvényt, melyre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és

$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x = L \tag{1}$$

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy a belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t < 2\pi$, ahol t jelölia pontot és az origót egyenes szakasz szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. A görbe hossza:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t. \tag{2}$$



(a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} r\,dr\,d\theta \qquad T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

(b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot. $\int_0^{2\pi} (x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})\,dt$

(c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans. $E = x^2+y^2$

6. (Síkinga mozgásegyenlete) Egy elhanyagolható tömegű l hosszú fonál egyik végét egy stabil ponthoz rögzítjük, a másik végére pedig egy m tömegű pontszerű testet helyezünk. Az így kapott ingát adott kezdeti szögből indítva szabadon engedjük az (x, z) síkban. Adjuk meg az inga mozgási és helyzeti energiáját, majd a legkisebb hatás elvét követve vezessük le az inga mozgásegyneletét.

→ majd legyen az inga egy mozgó kocsira kötve

$$E = \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$$
$$= \frac{(M+m)\dot{x}^2}{2} + ml\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$$

$\vec{v} = l\dot{\theta} + \dot{x}$

$\|\vec{v}\|^2 = l^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta$

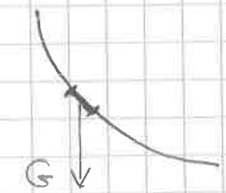
$l\dot{\theta}$ $\dot{x}$

$$\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\mathcal{L}'_\theta - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} = -mgl\sin\theta - ml^2\ddot\theta = 0$$

tehát az egyenlet: $\boxed{l\ddot\theta + g\sin\theta = 0}$

Adott egy lánc:



$$E_{pot,i} = mgh_i = mg\,y(x_i)$$

$$m_i = l_i\,\sigma \qquad E_{pot} \cong \sum_i E_{pot,i} = \sum_i mg\,y(x_i)$$

$$E_{pot} = \int_\Gamma g\sigma y\,dl = g\sigma\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad \cancel{E_{pot} = \int_a^b mg}$$

$$\min \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad \text{u.h.} \quad \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = L$$

$$\int_a^b (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$E = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} =$$

$$= \frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C \Rightarrow \frac{(y+\lambda)^2}{C^2} = 1+y'^2$$

$$y' = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2-C^2}{C^2}}$$

$$\int \frac{|C|\,y'\,dy}{\pm\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2}} = x+D$$

$$\pm C\ln\left(y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2}\right) = x+D$$

I $\quad y+\lambda+\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2} = e^{\frac{x+D}{C}} \Rightarrow (y+\lambda)^2 - C^2 = e^{2\frac{x+D}{C}} - 2e^{\frac{x+D}{C}}(y+\lambda) + (y+\lambda)^2$

$$(y+\lambda) = \frac{e^{2\frac{x+D}{C}} + C^2}{2e^{\frac{x+D}{C}}} = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2}$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2+\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{e+e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{e}$$

Geodézis, gömb:

Keresem $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ görbét : $\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a,b] \quad \begin{matrix} \gamma(a) = P_1 \\ \gamma(b) = P_2 \end{matrix} \right\}$

amely az a-sugarú gömb része: $\Gamma \subset S$

$$S(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta \\ a \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Hogyan tudnánk úgy megadni egy $\gamma(t)$ görbét, hogy kapásból rajta legyen a gömbön, mi legyen a független változó?

legyen φ a független változó

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} a \sin\varphi \cos\theta(\varphi) \\ a \sin\varphi \sin\theta(\varphi) \\ a \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} a \cos\varphi \cos\theta - a\theta' \sin\varphi \sin\theta \\ a \cos\varphi \sin\theta + a\theta' \sin\varphi \cos\theta \\ -a \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(\varphi)\|^2 = a^2 \cos^2\varphi + a^2 \theta'^2 \sin^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi$$

$$= a^2 + a^2 \theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\|\gamma'(\varphi)\| = a \sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2\varphi}$$

$$\text{Hossz}_\Gamma = \int_\Gamma dl = a \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \underbrace{\sqrt{1+\theta'^2 \sin^2\varphi}}_{F(\varphi,\theta,\theta')} \, d\varphi$$

Energia fv:

$$E = F - \theta' F'_{\theta'} = \sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi} - \frac{\theta'^2 \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}} \neq C$$

mert F függ φ-től is!

$$\cancel{F'_\theta} - \frac{d}{d\varphi} F'_{\theta'} = 0 \Rightarrow F'_{\theta'} = C \quad \text{azaz} \quad \frac{\theta' \sin^2\varphi}{\sqrt{1+\theta'^2\sin^2\varphi}} = C \quad \Big|^2$$

$$\theta'^2 \sin^4\varphi = C^2 + C^2\theta'^2 \sin^2\varphi$$

$$\theta'^2 = \frac{C^2}{\sin^4\varphi - C^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\frac{1}{C^2}\sin^4\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{\sin^4\varphi}}{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}}$$

$$\theta' = \frac{\frac{1}{\sin^2\varphi}}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2\varphi}}}$$

2017 b

Varsoda 2.

Anal3 gyak

Geodézisek gömb

20186 Gömb geodetikus (a lehető legegyszerűbben)

Adott $M \doteq \left\{ s(\varphi,\theta) = \text{Gömb param} \;\middle|\; \begin{matrix}\varphi \in [0,\pi] \\ \theta \in [0,2\pi)\end{matrix} \right\}$

Adott $A, B \in M$ pont és $\Gamma : A \longmapsto B$ görbe

u.h. $\Gamma \subset M$

Hogy tudnánk paraméteresen megadni egy sokaságon futó görbét?

Megoldás: Az M sokaság lokális paraméterei: φ és θ

Ezért ezeket teszük időfüggővé!

Vagyis $\varphi(t)$, $\theta(t)$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin\varphi(t)\cos\theta(t) \\ R\cdot\sin\varphi(t)\sin\theta(t) \\ R\cdot\cos\varphi(t) \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [a,b] \right\}$$

Tfh létezik Γ-nak olyan paraméterezése, hogy $\varphi(t) = t$

Ekkor arra redukálódik, hogy:

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} R\sin t\cos\theta(t) \\ R\sin t\sin\theta(t) \\ R\cos t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in [a,b] \right\}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t\cos\theta - R\dot\theta\sin t\sin\theta \\ R\cos t\sin\theta + R\dot\theta\sin t\cos\theta \\ -R\sin t \end{pmatrix}$$

$$\|\dot\gamma(t)\| = R^2\cos^2 t + R^2\dot\theta^2\sin^2 t + R^2\sin^2 t = R^2(1+\dot\theta^2\sin^2 t)$$

amit min. kell: $R\int_a^b \sqrt{1+\dot\theta^2\sin^2 t}\,dt$

$\nwarrow F(t,\cancel{\theta},\dot\theta)$

$$E\text{-}L: \quad F'_\theta - \frac{d}{dt}F'_{\dot\theta} = 0 \implies F'_{\dot\theta} = C$$

$$F'_{\dot\theta} = \frac{\dot\theta \sin^2 t}{\sqrt{1+\dot\theta^2 \sin^2 t}} = C \quad \Big|^2$$

$$\dot\theta^2 \sin^4 t = C^2 \left(1 + \dot\theta^2 \sin^2 t\right)$$

$$\dot\theta^2 = \frac{C^2}{\sin^4 t - C^2 \sin^2 t} \implies \dot\theta = \sqrt{\frac{C^2}{\sin^4 t - C^2 \sin^2 t}}$$

$$\dot\theta = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{C^2}\sin^4 t - \sin^2 t}} = \frac{1}{\sin^2 t \sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{1}{\sin^2 t}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}} = \frac{-(\operatorname{ctg} t)'}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) + \operatorname{ctg}^2 t}}$$

$$\theta(t) = -\int \frac{(\operatorname{ctg} t)' \, dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) + \operatorname{ctg}^2 t}} \underset{\text{vált. cs.}}{=} -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{C^2} - 1\right) + u^2}} = -\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - 1}}\right)$$

$$\theta(t) = -\arcsin\left(\frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - 1}}\right)$$

Forgásfelület felszínén!

$$S(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$$ legyen θ az x függvénye $$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt = \int_{x_1}^{x_2} \|\gamma'(x)\|\, dx$$

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x)\cos\theta(x) - f(x)\theta'(x)\sin\theta(x) \\ f'(x)\sin\theta(x) + f(x)\theta'(x)\cos\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2\cos^2\theta + f^2\theta'^2\sin^2\theta - \bigcirc$$
$$+ f'^2\sin^2\theta + f^2\theta'^2\cos^2\theta + \bigcirc =$$

$$= 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

$$J[\theta] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + f'^2(x) + f^2(x)\theta'^2(x)}}_{F(x,\theta')}\, dx$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = C \Rightarrow \frac{f^2(x)\theta'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x) + f^2(x)\theta'^2(x)}} = C \quad \Big|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^4\theta'^2 = C^2 + C^2 f'^2 + C^2 f^2\theta'^2$$

$$f^2\theta'^2(f^2 - C^2) = C^2(1 + f'^2)$$

$$\theta'^2 = C^2 \frac{1 + f'^2}{f^2(f^2 - C^2)} \Rightarrow \theta + D = C\int \frac{\sqrt{1+f'^2}}{f\sqrt{f^2 - C^2}}\, dx$$

pld: legyen $f(x) = x$, $x \in [1,2]$ $\Rightarrow \theta + D = C\sqrt{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - C^2}}$

3. hét – Variációszámítás II
GEODESICS – forgásfelület

Minimalizálom $\int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\|^2\, dt \cdot t \longrightarrow$ Nem tudom, hogy jó megoldást adna!

$$= \int_{t_1}^{t_2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\, dt = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{(1 + f'^2 + f^2\theta'^2)}_{F(t,\theta,\theta')}\, dx =$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 2C \Rightarrow 2\theta' f^2 = 2C$$

$$\theta' = \frac{C}{f^2} \Rightarrow \theta = D + C\int \frac{1}{f^2(x)}\, dx$$

(ilyet is várunk el)

$1: \; f(x) \equiv 1 \Rightarrow \theta = D + Cx$ ✓

$2: \; f(x) = x \Rightarrow \theta = D + C\ln x$

tehát $\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ x\cos(D + C\ln x) \\ x\sin(D + C\ln x) \end{pmatrix}$

próba: $\|\gamma'(x)\| = 1 + \left[\cos(D + C\ln x) - x \cdot \frac{C}{x}\sin(D + C\ln x)\right]^2$

$$+ \left[\sin(D + C\ln x) + x\frac{C}{x}\cos(D + C\ln x)\right]^2 =$$

$$= 1 + \cos^2 + C^2\sin^2 \cancel{- 2C\cos\sin}$$

$$+ \sin^2 + C^2\cos^2 \cancel{+ 2C\sin\cos} = 2 + C^2$$

Valóban: $\|\gamma'(x)\| = \text{konst}.$

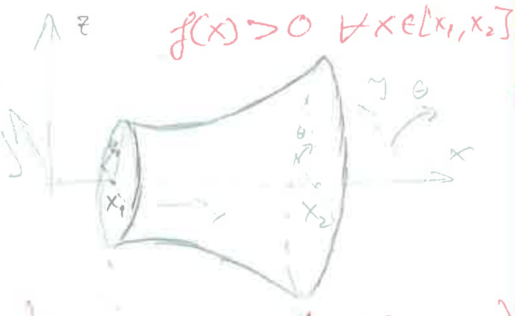
$$\theta + D = C\sqrt{2}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - c^2}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2 - c^2}\right)$$

$$\theta = -D + \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2 - c^2}\right)$$

legyen $x_1 = 1$-re $\theta_1 = 0 \Rightarrow D = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{1 - c^2}\right)$ $|C| \leq 1$

$x_2 = 2$-re $\theta_1 = \pi \Rightarrow D + \pi = \frac{\sqrt{2}}{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{4 - c^2}\right)$

Geodesic (minimális út) forgástesten



$f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$

Adott
$$S(x,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta \\ f(x)\sin\theta \end{pmatrix}$$

Legyen
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{korlátozást figyelembe véve}]{S \text{ szerinti}} \begin{pmatrix} x(t) \\ f(x(t))\cos(\theta(t)) \\ f(x(t))\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \xrightarrow[x \mapsto \theta(x)]{\text{legyen}} \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$L^\gamma[\theta] = \int_\gamma \|\dot\gamma(x)\|\, d\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+f'(x)^2+f(x)^2\theta'(x)^2}\, dx$$

$$\gamma'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'\cos\theta - f\theta'\sin\theta \\ f'\sin\theta + f\theta'\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2\cos^2\theta + f^2\theta'^2\sin^2\theta - 2\ldots + f'^2\sin^2\theta + f^2\theta'^2\cos^2\theta + 2\ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\gamma'(x)\|^2 = 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

Euler-Lagrange egyenlet: $\frac{\partial F}{\partial \theta'} = C \Rightarrow \frac{\theta'(x) f(x)^2}{\sqrt{1+f'(x)^2+f(x)^2\theta'(x)^2}} = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(x) = D + C\int \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{f(x)\sqrt{f(x)^2-C^2}}\, dx}$$

(elég csúnya egy integrál)!

$$\theta'^2 f^4 = C^2(1+f'^2) + C^2 f^2\theta'^2 \Rightarrow \theta'^2 f^2(f^2-C^2) = C^2(1+f'^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta' = C\,\frac{\sqrt{1+f'^2}}{f\sqrt{f^2-C^2}}$$

Számoljuk ki: $E^\gamma[\theta] = \int_\gamma \|\gamma'(x)\|^2\, d\ell = \int_{x_1}^{x_2} \left(1+f'(x)^2+f(x)^2\theta'(x)^2\right) dx$

Euler-Lagrange egy.:

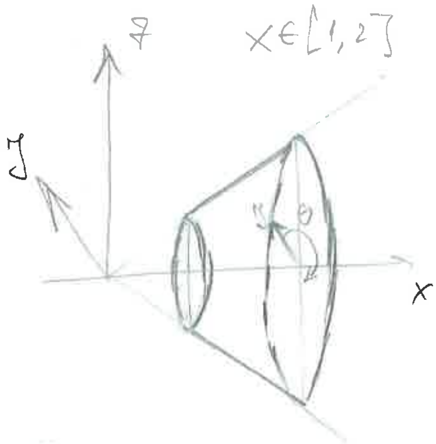
$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = 2C \Rightarrow f(x)^2\theta'(x) = C \Rightarrow \boxed{\theta = D + C\int \frac{dx}{f(x)^2}}$$

NEM HISZEM, HOGY ÍGY JÓ!!

Anal 3 – Variációsz...
GEODESICS – forgás...

Gyönyörű ...

Legyen $f(x) = x$ $\Longrightarrow f'(x) = 1$



$x \longmapsto \theta(x)$

$$\theta = D + C\int \frac{\sqrt{1+f'(x)}}{f(x)\sqrt{f^2(x)-c^2}}\,dx =$$

$$= D + C\int\frac{\sqrt{1+1}}{x\sqrt{x^2-c^2}}\,dx = D+\sqrt{2}\cdot C\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}}$$

próbálkozzunk:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right) = \frac{1}{1+\frac{x^2-c^2}{c^2}}\cdot\frac{1}{c}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{1}{\frac{x^2}{c^2}}\cdot\frac{1}{c}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} =$$

$$= C\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-c^2}}$$

tehát $\boxed{C\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right) + K}$

$\boxed{\theta = D + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right)}$ $\dashrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\theta(1) = 0\\ \theta(2) = \frac{\pi}{2}\end{array}\right\}$ [illegible] megoldani!

Változócserével magyarázva;

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \int\frac{1}{\sqrt{u^2+c^2}\cdot u}\,\frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}\,du = \int\frac{du}{\sqrt{u^2+c^2}^{\,2}} =$$

legyen $u = \sqrt{x^2-c^2}$

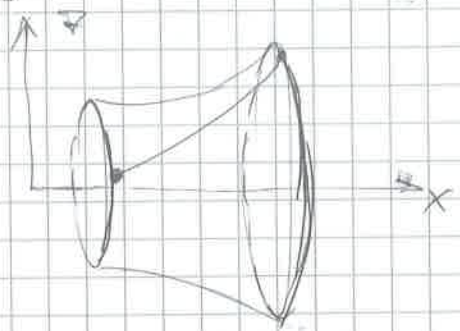
$x = \sqrt{u^2+c^2}$

$dx = \frac{u}{\sqrt{u^2+c^2}}\,du$

$$= \int\frac{du}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{c}\int\frac{du}{\left(\frac{u}{c}\right)^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{c}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{c} = \frac{1}{c}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{c}\sqrt{x^2-c^2}\right)$$

Forgástest felszínén



Paraméterezés:

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\theta(x) \\ f(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}$$

$$\|\gamma'(x)\|^2 = 1 + \left(f'\cos\theta - f\theta'\sin\theta\right)^2 + \left(f'\sin\theta + f\theta'\cos\theta\right)^2$$
$$= 1 + f'^2 + f^2\theta'^2$$

$$\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}$$

$$L = \int_\gamma dl = \int_a^b \sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}\,dx \to F(x,\theta')$$ nem függ θ-tól

$$F'_{\theta'} = \frac{f^2\theta'}{\sqrt{1+f'^2+f^2\theta'^2}} = C \quad \Big|^2$$

$$\frac{f^4\theta'^2}{C^2} = 1+f'^2+f^2\theta'^2 \implies \cancel{\frac{f^4\theta'^2 - C^2(1+f'^2)}{C^2 f^2}} = \theta'^2 C^2 f^2$$

$$\theta'^2\left(f^4 - C^2 f^2\right) = C^2\left(1+f'^2\right)$$

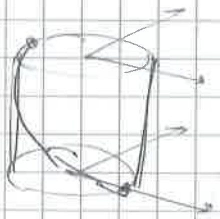
$$\theta' = \sqrt{\frac{C^2(1+f'^2)}{f^2(f^2-C^2)}}$$ ezért $$\theta + D = C\int_a \sqrt{\frac{1+f'^2}{f^2(f^2-C^2)}}\,dx$$

legyen $f(x) = x$ ekkor: $$\theta + D = C\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{x\sqrt{x^2-C^2}}$$

$$\theta = -D + C\sqrt{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-C^2}}$$

2017b

Geodetikus



$$S = \left\{ s(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi),\; z \in [0,1] \right\}$$

$\boxed{\mathrm{I}}$ Paraméterezés: $(x(t), y(t), z(t))$

$$x(t) = \cos\theta(t)$$
$$y(t) = \sin\theta(t) \qquad \text{tehát} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$$z(t) = z(t)$$

ekkor $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\dot\theta \sin\theta \\ \dot\theta \cos\theta \\ \dot z \end{pmatrix}$ $\qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{\dot\theta^2 + \dot z^2}$

$$\int_\Gamma d\ell = \int_a^b \sqrt{\dot\theta^2 + \dot z^2}\, dt$$

$\underline{\mathrm{II}}$ Paraméterezés legyen θ független változó

ergo $\theta(t) = \theta$ avagy $t = \theta$

ekkor $z(\theta)$ lesz

ezért $\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z(\theta) \end{pmatrix}$ $\qquad \gamma'(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ z'(\theta) \end{pmatrix}$ $\qquad \|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{1 + z'^2}$

$$L = \int_0^\pi \underbrace{\sqrt{1 + z'^2}}_{F(\theta, z, z')}\, d\theta \qquad \text{ahol } z(0) = 0 \quad z(\pi) = 1$$

Szépen le van vezetve

$$F_z' - \frac{d}{d\theta} F_{z'}' = -\frac{d}{d\theta} \frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = 0 \implies z' = C$$

$$z = C\theta + D$$

$$z(0) = D = 0$$

$$z(\pi) = C\pi = 1$$

$$C = \frac{1}{\pi}$$

tehát $\boxed{z(\theta) = \frac{\theta}{\pi}}$ $\Leftarrow t$

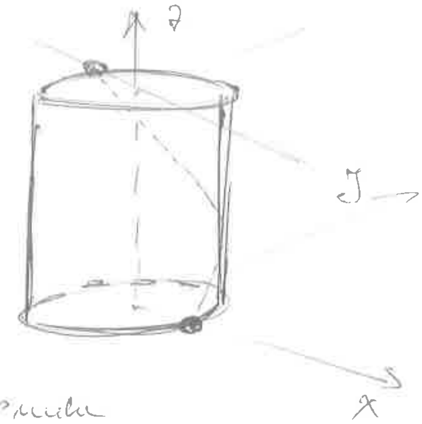
ezért $\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t) \\ \sin(\pi t) \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]}$

2017 b

Aufg 3
HENGER
Geodetikus

Varázslum 2

① $G \subset \mathbb{R}^3$ henger



legrövidebb görbe a hengeren.

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{1+x'(z)^2+y'(z)^2}\,dz$$

$$\boxed{L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F(r,\dot r)\,dt} \to \text{min}$$

u.h. $r(t)=\begin{pmatrix}\cos\theta(t)\\ \sin\theta(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$

$$\cancel{S(\theta,z)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow L=\int_{t_0}^{t_1}} \Rightarrow$$

$S(\theta,z)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ z\end{pmatrix}$ → ezen a felületen

$$L=\int_{t_0}^{t_1} F(r,\dot r)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\cos\theta(t))^{\cdot 2}+(\sin\theta(t))^{\cdot 2}+(z(t))^{\cdot 2}}\,dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\sqrt{1+\dot z(t)^2}}_{F(q,\dot q)}\,dt \qquad \Big\{ q:=\begin{pmatrix}\theta\\ z\end{pmatrix}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial z}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot z}=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \dot z}=C \Rightarrow \frac{\dot z(t)}{\sqrt{1+\dot z(t)^2}}=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot z^2 = C^2(1+\dot z^2) \Rightarrow \dot z^2=\frac{C^2}{1-C^2} \Rightarrow \dot z = D \Rightarrow z = Dx+E$$

$z(0)=0 \Rightarrow E=0$

$z(1)=1 \Rightarrow D=1$

---

hid 3

Legrövidebb görbe a hengeren

legyen $f(x)$ ← minimalizálandó

u.h. $g(x) = 0$

Lagrange multiplikátor magyarázata

legyen $S = \{ x \in R \mid g(x) = 0 \}$

S: részhalmaz amelyen optim.

R: alaphalmaz

legyen $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S, \ \forall \lambda \in R$

$$\ell(\lambda) := \inf_{x \in R} \big(f(x) + \lambda g(x) \big) \leq \inf_{x \in S} f(x)$$

Scherer 1.3.4 Duality in optimization 10 pg.

tehát $\ell(\lambda) \leq \inf_{x \in S} f(x) \quad \forall \lambda \in R$

ezért keressük $\ell(\lambda)$ supremumát.

tehát $f_{opt} = \sup_{\lambda \in R} \left(\inf_{x \in R} L(x,\lambda) \right)$

ezért szükséges felt.: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

A megkötések ilyen alakúak is lehetnek:

$G(x,u) = 0$

ennek következményeképpen: $\int_a^b \underline{\lambda(x)} \, G(x,u) \, dx = 0$

pld: $\tilde{J}(u,\lambda) = \int_a^b \big(F(x,u,u') + \lambda G(x,u) \big) \, dx$

$$\tilde{F}_u - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{u'} = 0$$

$$\tilde{F}_\lambda - \frac{d}{dx} \tilde{F}_{\lambda'} = 0 \Rightarrow G(x,u) = 0$$

ezt akkor, ha nullára van rendezve!

Lagrange multiplikátor

(1)

$$I[u] = \int_a^b F(x, u, u')\, dx \longrightarrow \min.$$

feltétel: $$\int_a^b G(x, u, u')\, dx = 0$$

tfh. $u = u_{opt} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ konstans

u.h. $\overline{F} = F - \lambda G$ kielégíti az Euler egyenletet.

(2)

$$S[x] = \int_0^1 L(t, x, \dot{x})\, dt$$

felt: $G(t, x, \dot{x}) = 0 \qquad G: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^k$

legyen $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^k$

$$\tilde{S}[x, \lambda] = \int_0^1 \underbrace{L(t, x, \dot{x}) - \lambda^T(t) \cdot G(t, x, \dot{x})}_{\tilde{L}}\, dt$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \lambda} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\lambda}} = 0 \Longrightarrow G(t, x, \dot{x}) = 0 \end{cases}$$

↳ ha $G = G(x)$:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \Longrightarrow L'_{x_i} - \lambda^T(t)\, G'_{x_i} - \frac{d}{dt} L'_{\dot{x}_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda^T \cdot \frac{\partial G}{\partial x_i}$$

Variációszá. Lagrange mu

CCS-ben LQR:

$$\mathcal{J}[x,u] = \int_0^T F(x,u,t)\,dt \to \text{min}$$

feltéve: $\dot{x} = f(x,u,t)$

$$\mathcal{J}[x,\dot{x},u] = \int_0^T \Big(F(x,u,t) - \lambda^T(t)\big[f(x,u,t) - \dot{x}\big] \Big)\,dt$$

$$= \int_0^T \Big(\underbrace{F - \lambda^T f}_{H} - \lambda^T \dot{x} \Big)\,dt$$

Valamilyen tüirdlegné problema^{-1}: legrövidebb kerítés, adott területű kerd.

(DIDO hercegnő)

(5)

$$\min \quad P[u] = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2}\, dx$$

feltéve, hogy $\int_0^1 u(x)\,dx = A \implies G[u] = \int_0^1 u(x)\,dx - A$

legyen $L[u,\lambda] = P[u] + \lambda G[u] =$ | $\lambda \in \mathbb{R}$: const.

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+u'^2} + \lambda u\right) dx - \cancel{\lambda} A$$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{E}$ szerinti deriváláskor ez lenne

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{d\cancel{x}}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \implies +\lambda - \frac{d}{d\cancel{x}}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = +\lambda x + C}$$

$$u'^2 = (C+\lambda x)^2 (1+u'^2)$$

$$\left[1-(C+\lambda x)^2\right] u'^2 = (C+\lambda x)^2$$

$$u' = \sqrt{\frac{(C+\lambda \cancel{x})^2}{1-(C+\lambda x)^2}} = \frac{C+\lambda x}{\sqrt{1-(C+\lambda x)^2}} \implies u = D + \int \frac{C+\lambda x}{\sqrt{1-(C+\lambda x)^2}}\, dx \implies$$

legyen $t = C + \lambda x$

$dt = +\lambda dx$

$$\implies u = D + \frac{1}{\lambda}\int \frac{t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} = D - \frac{1}{\lambda}\int \frac{-t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-t^2} = D + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(C-\lambda x)^2}$$

$$D := 0 \; ; \quad x = 0 \implies u(0) = 0 \implies \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-C^2} = 0 \implies C = 1$$

$$x = 1 \implies u(1) = 0 \implies \frac{1}{\lambda}\underbrace{\sqrt{1-(1-\lambda \cancel{x})^2}}_{=0} = 0$$

$$1 = (\cancel{1} - \lambda \cancel{x})^2$$

$$\lambda = 2$$

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}}$$

Anal 3 – Variáció V
Lagr. mult.
$\int = C$ tip. korl.

(4) Valamilyen kordlyné problémai: Adott L hosszúsággal vonal
Integrálja maximalás

$$\max: \int_0^1 u(x)\,dx$$

$$\text{m.f.} \quad \int_0^1 \sqrt{1+u'(x)^2}\,dx = \ell$$

$$L[u,\lambda] = \int_0^1 u(x) + \lambda\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx + \lambda \ell$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow 1 - \lambda \frac{d}{dx}\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \frac{1}{\lambda}x + C}$$

ugyanaz a diffegyenlet!

$$\Rightarrow \quad u = D + \int \frac{C+\frac{x}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(C+\frac{x}{\lambda}\right)^2}}\,dx$$

→ ennek megoldása szemtelen a félkör

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + \int t\left(\sqrt{1-t^2}\right)'dt =$$

$$= \arcsin t + t\sqrt{1-t^2} - \int \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\int \sqrt{1-t^2} = \frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]$$

SZÉP Integrál

$$\int_0^1 D + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda t+c)^2}\,dt = Dt\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\Big[\arcsin(\lambda t+c) + (\lambda t+c)\sqrt{1-(\lambda t+c)^2}\Big]_0^1 =$$

$$= D + \arcsin C + C\sqrt{1-C^2} - \arcsin(\lambda+C) - C\sqrt{1-(\lambda+C)^2} =$$

$$= D + \arcsin C + \cancel{C\sqrt{1-C^2}} - \arcsin(-C) \cancel{- C\sqrt{1-(-C)^2}} =$$

$$= D + 2\arcsin C = T$$

$$D - \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2} = 0$$

$$\Big\} \quad 2\arcsin C + \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2} = T$$

$\Downarrow$ fsdve

$C =$ függvénye T-nek.

$\Downarrow$

$$D = \frac{1}{2C}\sqrt{1-C^2}$$

⑤ Valamilyen tördelgmi problema — legnagyobb terület, adott kerülettel kerít.

$$\min \; J(u) = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2}\,dx$$

feltéve, hogy: $I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = T$ konstans!

Lagrange multiplikátor: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ u.h. $\min J(u) + \lambda I(u)$

$$\min \; J^*(u) = \int_0^1 \left[\sqrt{1+u'^2} + \lambda u\right] dx$$

$$\frac{\partial F^*(u)}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial u'} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \left[\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}}\right]_x}$$ → megoldandó diffegyenlet

vagyis $\dfrac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} = \lambda x + C$

$$\Downarrow$$

$$u' = \frac{(\lambda x + C)}{\sqrt{1-(\lambda x + C)^2}} \Rightarrow u = D + \int \frac{\lambda x + C}{\sqrt{1-(\lambda x+C)^2}}\,dx$$

$$\boxed{u = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x + C)^2}}$$

$$T = \int_0^1 u\,dx = \int_0^1 D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x+C)^2}\,dx \; \underset{dt = \lambda dx}{\overset{t = \lambda x + C}{=}} \; D - \frac{1}{\lambda^2}\int_C^{\lambda+C} \sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= D - \frac{1}{2\lambda^2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right]_C^{\lambda+C} =$$

$$= D - \frac{1}{2\lambda^2}\left[\arcsin(\lambda+C) + (\lambda+C)\sqrt{1-(\lambda+C)^2} - \arcsin C + C\sqrt{1-C^2}\right] = T$$

$$u(0) = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-C^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -2C}$$

$$u(1) = D - \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda+C)^2} = 0$$

(analitikusan nem megoldható)

Anal 3 – Variációszá...
Lagrange-mult...
I = C típusú kort...

Energiafüggvény : $F(x,y,y') = \sqrt{1+f(x)^2+f(x)^2 G'(x)^2}$ $\rightarrow$ nem erre gondolt tan...

DiDO Probléma :

$\max \int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx$

s.t. $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \pi$ (adott)

$[x_1, x_2] = [0, 2]$

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y(x) + \lambda\sqrt{1+y'(x)^2}}_{F(x,y,y')}\,dx$$

Energia : $\boxed{y(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = C_1}$ $\Longrightarrow$ $y(x) = C_1 + \sqrt{\lambda^2-(x+C_2)^2}$

$C_2 \in \mathbb{R}$ (lehet negatív is)

Megoldás, $C_1, C_2, \lambda = ?$

$$\frac{\lambda^2}{1+y'^2} = (C_1-y)^2$$

$$y'^2 = \frac{\lambda^2}{(C_1-y)^2} - 1$$

$$y'^2 = \frac{\lambda^2-(C_1-y)^2}{(C_1-y)^2} \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$y' = \frac{\pm\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2}}{C_1-y}$$

$$\int \frac{-(C_1-y)}{\mp\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2}}\,dy = x + C_2$$

$$\mp\sqrt{\lambda^2-(C_1-y)^2} = x + C_2 \quad \Big|^2$$

$$\lambda^2-(C_1-y)^2 = (x+C_2)^2$$

$$\lambda^2-(x+C_2)^2 = (C_1-y)^2 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$\pm\sqrt{\lambda^2-(x+C_2)^2} = C_1 - y$$

$$\boxed{y = C_1 + \sqrt{\lambda^2-(x+C_2)^2}}$$

$y(0) = 0$; $\int_0^2 \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \pi$ (egységkör félkerülete)

$y(2) = 0$

Vagyis :

$0 = C_1 + \sqrt{\lambda^2 - C_2^2}$

$0 = C_1 + \sqrt{\lambda^2-(2+C_2)^2}$

$\Rightarrow C_2 = \pm(2+C_2)$

$C_2 = 0$

$\boxed{C_2 = -1}$

$\Downarrow$

$-C_1 = \sqrt{\lambda^2 - C_2^2} \Rightarrow \boxed{C_1 \le 0}$

$C_1^2 = \lambda^2 - C_2^2$

$\lambda = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

Próba szerencse : $\boxed{C_1 := 0} \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$y(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{1-x^2+2x-1} \Rightarrow$

$\boxed{y(x) = \sqrt{2x-x^2}}$

y : az egység sugarú kör $(1,0)$-ba tolva : $\sqrt{1-(x-1)^2}$; a kör kerülete $= 2\pi$

Lagrange mult...

DiDO Problém...

Láncgörbe

Potenciális energia $= \sum_i m_i g y_i = \sum_i \sigma l_i g y_i = \sigma g \int_\Gamma y \, dl = \sigma g \int_{-x_1}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\, dx$

$$\boxed{E_{pot} = \sigma g \int_{-x_1}^{x_1} y \sqrt{1+y'^2}\, dx \to \min}$$

$$\boxed{\text{s.t.} \quad \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = L \quad \text{adott}}$$

Lagrange multi.: $J(y) = \int_{-x_1}^{x_1} \underbrace{(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}}_{F(x,y,y')}\, dx$

Energia fv.: $\underbrace{\frac{(y+\lambda)(1+y'^2)}{\sqrt{1+y'^2}}}_{F(x,y,y')} - \underbrace{(y+\lambda)\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}}_{y' F'_{y'}(x,y,y')} = C_1$

$$\boxed{\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1} \Longrightarrow \boxed{y' = \pm \frac{1}{C_1}\sqrt{\lambda^2 - C_1^2 + 2\lambda y + y^2}}$$

$y^2 + 2y\lambda + \lambda^2 = C_1^2 + C_1^2 y'^2 \Rightarrow y'^2 = \frac{1}{C_1^2}\left(\lambda^2 - C_1^2 + 2\lambda y + y^2\right)$

$$C_1 \int \frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - C_1^2}} = x + C_2$$

$$C_1 \int \frac{\frac{1}{C_1}dy}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C_1}\right)^2 - 1}} = x + C_2 \Longrightarrow C_1 \operatorname{arccosh} \frac{y+\lambda}{C_1} = x + C_2$$

$$\frac{y+\lambda}{C_1} = \cosh \frac{x+C_2}{C_1}$$

$$\left[\operatorname{arccosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{y = -\lambda + C_1 \cosh \frac{x+C_2}{C_1}}$$

20/A

Variációszámítás 3
Láncgörbe!

Tehát kijött:

$$\boxed{y = -\lambda + C_1 \cosh \frac{x + C_2}{C_1}}$$

$$\left.\begin{aligned} & y(-x_1) = y(x_1) = y_1 \\ & \int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = L \end{aligned}\right\} \Longrightarrow C_1, C_2, \lambda$$

$$c \operatorname{arch}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = x + D$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = \cosh\left(\frac{x+D}{c}\right)$$

egyik megoldás

$$\int \frac{y'\,dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \int \frac{1}{c} \frac{y'\,dx}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}} = \int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u^2-1}} =$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = u \qquad \frac{y'}{c} = u'$$

$$= \operatorname{arch} u = \operatorname{arch}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = x$$

$$\frac{y+\lambda}{c} = \operatorname{ch} x \Rightarrow \underline{y = C \cdot \operatorname{ch} x - \lambda}$$

avagy:

$$\int \frac{u'\,dx}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) = \ln\left(\frac{y+\lambda}{c} + \sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{c}\right)^2 - 1}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{c} + \ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}\right)$$

$$\ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) = x$$

$$u + \sqrt{u^2-1} = e^x$$

$$\sqrt{u^2-1} = e^x - u \quad \Big|^2$$

$$u^2 - 1 = e^{2x} - 2e^x u + u^2$$

$$2e^x u = e^{2x} + 1$$

$$u = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{y+\lambda}{c} \Rightarrow \underline{y = C \operatorname{ch} x - \lambda}$$

avagy

$$\ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}\right) = x + D$$

$$y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2} = e^{x+D}$$

$$\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2} = e^{x+D} - (y+\lambda) \quad \Big|^2$$

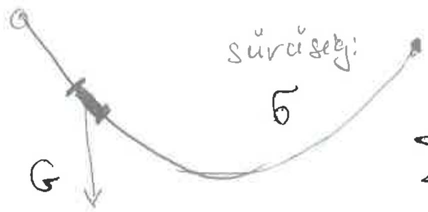
$$(y+\lambda)^2 - c^2 = e^{2(x+D)} - 2e^{x+D}(y+\lambda) + (y+\lambda)^2$$

$$2e^{x+D}(y+\lambda) = e^{2(x+D)} + c^2 \Rightarrow y + \lambda = \frac{e^{x+D} + c^2 e^{-(x+D)}}{2}$$

20476

Láncgörbe

Láncgörbe levezetés



$$E_i = \Delta m_i g h_i = \Delta l_i \cdot \sigma g\, y_i$$

$$\sum_i E_i = \sum_i \sigma \cdot g \cdot y_i\, \Delta l_i \longrightarrow \int_\Gamma \sigma g\, y\, dl$$

tehát $E_{pot} = \sigma g \int_\Gamma y\, dl = \sigma g \underline{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\, dx}$

feltétel $\underline{L = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx}$

Fizikai levezetés

$$F = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$$

$$E = F - y'F'_{y'} = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{(y+\lambda)y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \underline{\frac{y+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C}$$

$$\frac{(y+\lambda)^2}{C^2} = 1 + y'^2 \Rightarrow \boxed{y' = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2 - C^2}{C^2}}}$$

$$\pm|C|\int \frac{y'\,dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2}} = \int \cancel{1}\, dx$$

Euler–Lagrange levezetés

$$\pm C \ln\left(y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2}\right) = x + D$$

$$y + \lambda + \sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2} = e^{\frac{x+D}{C}} \quad \Big|^2 \Rightarrow \cancel{(y+\lambda)^2} - C^2 = e^{2\frac{x+D}{C}} - 2e^{\frac{x+D}{2}}(y+\lambda) + \cancel{(y+\lambda)^2}$$

$$2e^{\frac{x+D}{C}}(y+\lambda) = e^{2\frac{x+D}{C}} + C^2$$

$$y + \lambda = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2}$$

így is jó!

$$\boxed{y = \frac{e^{\frac{x+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{x+D}{C}}}{2} - \lambda}$$

Feltétel ~~y(-x) = ...~~ $y(a) = y(-a) = y_A$

$$e^{\frac{a+D}{C}} + C^2 e^{-\frac{a+D}{C}} - e^{\frac{-a+D}{C}} - C^2 e^{-\frac{-a+D}{C}} = 0$$

$$y(a) - y(-a) = 0 \Rightarrow e^{\frac{a+D}{C}} + C^2 e^{\frac{-a-D}{2}} - e^{\frac{-a+D}{C}} - C^2 e^{\frac{+a-D}{C}} = 0$$

Láncgörbe

Legyen $\Delta = -\ln\frac{1}{C} = \ln C$

ekkor $\dfrac{e^{x+\ln C} + C^2 e^{-x-\ln C}}{2} = \dfrac{C e^{x} + C e^{-x}}{2}$

Vázlatosan:

$$F = (y+\lambda)\sqrt{1+y'^2} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{(y+\lambda)^2-C^2}{C^2}}$$

vagyis $\pm C\displaystyle\int\frac{y'\,dx}{\sqrt{(y+\lambda)^2-C^2}} = \int 1\,dx$ — csak a + os verziót tekintjük

egyszerűbb megoldás:

$$C\int\frac{\frac{1}{C}y'\,dx}{\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2-1}} = C\int\frac{u'\,dx}{\sqrt{u^2-1}} = C\,\mathrm{arch}(u) = x+\Delta$$

legyen $\dfrac{y+\lambda}{C} = u$, $\dfrac{y'}{C} = u'$

$\mathrm{arch}(u) = \dfrac{x+\Delta}{C}$

$\boxed{u = ch\left(\frac{x+\Delta}{C}\right)} \Rightarrow y = C\cdot ch\left(\frac{x+\Delta}{C}\right) - \lambda$

~~$u(x_1) = u(-x_1) = y_1$ ekkor $ch\left(\frac{x_1+\Delta}{C}\right) = ch\left(\frac{-x_1+\Delta}{C}\right)$~~

~~ezért legyen $\Delta = 0$~~

$y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ ekkor $C\cdot ch\left(\frac{+x_1+\Delta}{C}\right) = C\cdot ch\left(\frac{-x_1+\Delta}{C}\right)$

ezért legyen $\Delta = 0$

tehát $y = C\cdot ch\left(\frac{x}{C}\right) - \lambda$

$$\left.\begin{array}{l} y(x_1) = y_1 \\ \int_{-x_1}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx = L \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = \dots \\ C = \dots \end{array}$$

2017b

Láncgörbe

-3-

Varsány2

Analízis III. 6. heti feladatok
2016. október 21.

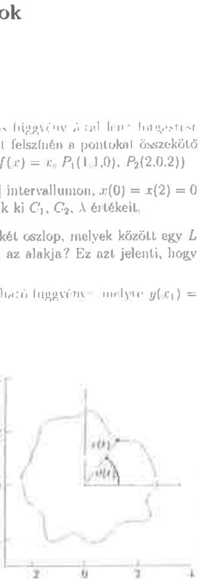
Variációszámítás 3. rész

1. Egy $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két $P_1, P_2\in\mathbb{R}^3$ pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet. (Speciális esetben: $f:[1,2]\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x$, $P_1(1,1,0)$, $P_2(2,0,2)$)

2. (Ismétlés) Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t\in[0,2]$ intervallumon, $x(0)=x(2)=0$ feltétel mellett, melyre a görbe alatti terület maximális. Számoljuk ki C_1, C_2, λ értékeit.

3. (*Előadáson szereplő példa újra.*) Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy L $(>2x_1)$ hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális?

   Tekintsük azon $y:[-x_1,x_1]\to\mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényt, melyre $y(x_1)=$ $=y(-x_1)=y_1$ adott érték, és
$$\int_{-x_1}^{x_1}\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=L$$



[HF$_1$] (Előkészület az *izoperimetrikus feladat* megoldásához.) Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon, mely belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t),y(t))$, $0\le t\le 2\pi$, ahol t jelöli az adott pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. Igazoljuk, hogy a görbe általa közrezárt terület így számolható:
$$T=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(x^2(t)+y^2(t))\,dt$$

[HF$_2$] $D\subset\mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\varphi: D\to\mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:
$$I(\varphi)=\iint_D|\operatorname{grad}\varphi(x,y)|^2\,d(x,y)$$

4. (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x,t)$ függvény írja le, ahol $0\le x\le\ell$. (Tehát $u:[0,\ell]\times[t_1,t_2]\to\mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:
$$K(t)=\frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell}u_t'^2(x,t)\,dx,\qquad V(t)=\tau\int_0^{\ell}\left(\sqrt{1+u_x'^2(x,t)}-1\right)dx,$$
ahol $\tau>0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1,t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:
$$\int_{t_1}^{t_2}(K(t)-V(t))\,dt$$
Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}''=k^2u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

Forgástest felü. geodet / pl $f(x)=x$

$y=f(x)$ forg.

Analízis III. 6. heti feladatok
2016. október 21.

$\pi/6$

Variációszámítás 3. rész.

$2r\pi =$

1. Keressük meg azt a π hosszúságú $x(t)$ görbét a $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$ intervallumon, $x(0) = x(\frac{\pi}{3}) = 0$ feltétel mellett, melyre a görbe alatti terület maximális. Formálisan:

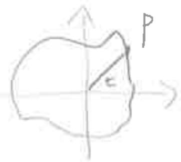
$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(t)\, dt \quad \to \quad \max \quad (= T)$$

⊛

2. (*Előadáson szereplő példa újra.*) Adott egymástól $2x_1$ távolságra két oszlop, melyek között egy L ($> 2x_1$) hosszú kábel van felfüggesztve. Mi lesz ennek a kábelnek az alakja? Ez azt jelenti, hogy mikor lesz a kábel potenciális energiája minimális?

   Tekintsük azon $y : [-x_1, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvényeket, melyekre $y(x_1) = y(-x_1) = y_1$ adott érték, és

$$\int_{-x_1}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = L$$



3. (Előkészület az *izoperimetrikus feladat* megoldásához.) HF Legyen adott egy egyszerű zárt görbe a síkon, mely belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, ahol t jelöli az adott pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva. Igazoljuk, hogy a görbe áltak közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

5. ~~4.~~ (*Előadáson szereplő példa újra*) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(x,t)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$. (Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$.) A húr mozgási ill. helyzeti energiája a t időpillanatban:

$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} u_t'^2(x,t)\, dx, \qquad V(t) = \tau \int_0^{\ell} \left(\sqrt{1 + u_x'^2(x,t)} - 1\right)\, dx,$$

ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttahtó. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} (K(t) - V(t))\, dt.$$

Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyeletet kapjuk.

⊛ HF Az a görbét, a fv alatti terület fix T, és fv grafja legrövidebb

Variációszám 3
6. gyak -1-

Kanonikus paraméterezés:

$\S$ $\Gamma_k = \{\gamma(\tau) : \tau \in [0, L]\}$

$$F(\ell) := \int_0^{\ell} \|\dot\gamma(\tau)\| \, d\tau = \ell \quad \Rightarrow \quad F'(\ell) = \boxed{\|\dot\gamma(\tau)\| = 1}$$

Kell ennél több?

Tehát $\forall$ görbe esetén $\exists$ kanonikus paraméterezés, amikor $\|\dot\gamma(t)\| = 1$.

dehát
$$\frac{d}{dt} \frac{\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}} = \frac{d}{dt} \frac{\dot x}{\|\dot\gamma(t)\|} = \boxed{\frac{d^2}{d\tau^2} x = G_x'}$$

4

~~5.~~ $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D |\operatorname{grad} \phi(x,y)|^2 \, d(x,y).$$

$$\min \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\|^2 \, dt}_{\text{Energia}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} = G_x' \qquad \frac{d^2}{ds^2} x = G_x'$$

$S =$ Kanonikus paraméterezés

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$$

$$s(\Gamma) = s = \{ \cancel{\gamma} \; \eta(\tau) : \tau \in [0,S]\}$$

Variációszámítás 3
6. gyak. – 2 –

Analízis III. 10. heti feladatok
2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

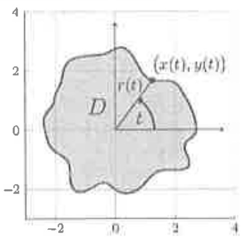
2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

F] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.

   Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen
   $$(x(t), y(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$
   ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.
   A görbe hossza
   $$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$



   (a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:
   $$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$
   (b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.
   (c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:
   $$I(\phi) = \iint_D \|\nabla\phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (***Előadáson szereplő példa újra***) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$, és $t_1 \le t \le t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

   A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:
   $$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^{\ell} {u'_t}^2(t, x)\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau \int_0^{\ell} \left(\sqrt{1 + {u'_x}^2(t, x)} - 1\right) \mathrm{d}x,$$
   ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:
   $$\int_{t_1}^{t_2} \Big(K(t) - V(t)\Big)\mathrm{d}t.$$
   Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u'_x|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$ hullámegyeletet kapjuk.

Analízis III. 10. heti feladatok
2017. november 23.

Variációszámítás 3. rész. Több függvényt keresünk.

1. Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ kétszer folytonosan differenciálható, korlátos függvény által leírt forgástest felszínén adott két pont. Határozzuk meg a forgástest felszínén a pontokat összekötő görbék közül a legrövidebbet.

2. (Folytatás) Speciális esetként mit ad a fenti számolás, ha az $f(x) = k$ konstans függvényt forgatjuk meg? Hogyan értelmezhetjük a kapott optimális megoldást?

[HF] 3. Egyenes körkúp felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét. Legyen a kúp tengelye a z koordinátatengely, melynek palástja θ szöget zár be a z tengellyel.

4. * Az egységgömb felszínén határozzuk meg két pontot összekötő legrövidebb görbét.

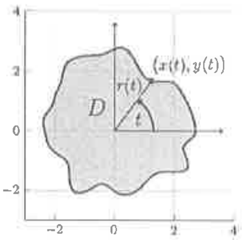
5. Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális.

Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen

$$(x(t), y(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.
A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$



(a) Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

(b) Írjuk fel a korlátozott variációszámítási feladatot.

(c) Írjuk fel az "energiafüggvény"-t, ami az optimális görbe mentén konstans.

Variációszámítás 4. rész. Kétváltozós függvényt keresünk.

6. $D \subset \mathbb{R}^2$ adott sima tartomány, ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius pontja az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D \|\nabla\phi(x, y)\|^2 \mathrm{d}(x, y).$$

7. (***Előadáson szereplő példa újra***) ℓ hosszúságú és m tömegű húr rezgőmozgást végez. A t időpontban a húr pontjainak kitérését az $u(t, x)$ függvény írja le, ahol $0 \le x \le \ell$, és $t_1 \le t \le t_2$. Tehát $u : [0, \ell] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$. Ezt a függvényt keressük.

A húr mozgási ill. helyzeti energiája valamely t időpillanatban:

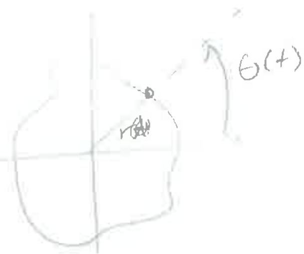
$$K(t) = \frac{m}{2\ell}\int_0^\ell u_t'^2(t, x)\mathrm{d}x, \qquad V(t) = \tau\int_0^\ell \left(\sqrt{1 + u_x'^2(t, x)} - 1\right)\mathrm{d}x,$$

ahol $\tau > 0$ ismert rugalmassági együttható. A Hamilton elv szerint egy $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgását leíró függvény minimalizálja az alábbi költségfüggvényt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big(K(t) - V(t)\Big)\mathrm{d}t.$$

Írjuk fel a megfelelő Euler egyenletet a stacionárius megoldásra. Lássuk be, hogy ha $|u_x'|$ "kicsi", akkor jó közelítésként valóban az $u_{tt}'' = k^2 u_{xx}''$ hullámegyenletet kapjuk.

6. hét HF$_1$



Terület $\int_\Gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \dot r(t) r(t) \sin t \cos t + r^2(t)\cos^2 t \, dt =$

$x = r(t)\cos(t)$

$y = r(t)\sin(t)$

$dy = \left(\dot r(t)\sin(t) + r(t)\cos(t)\right) dt$

$= \int_0^{2\pi} r^2(t) \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt$

Green T következménye

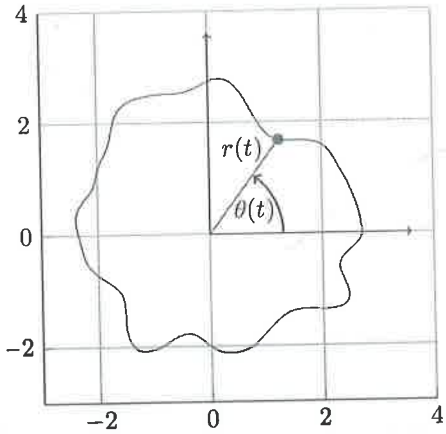
$\oint \langle F, n \rangle \, dl = \iint \nabla F \, dS$

$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_\Delta (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$

$\left.\begin{array}{l} P = -y \\ Q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\oint_C y\,dx = \iint_\Delta dx\,dy = 1$

$\left.\begin{array}{l} Q = x \\ P = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C x\,dy = \iint_\Delta dx\,dy = 1$

Green T területre vonatk.



Áttérés polárkoordinnáta alapján!

$x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ legyen $r = r(\theta)$

$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$

Ugy. ellapjuk:

$T \stackrel{?}{=} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 + y^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt$

Másik irányból:

$T = \iint_\Delta dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{r(\theta)} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 + y^2 \, d\theta$

áttérés polár koord.

Jacobi determináns!

$x := r\cos\theta$

$y := r\sin\theta$

Diffgeós levezetés

$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta$

$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$

$dx \wedge dy = r\cos^2\theta\,dr\wedge d\theta - r\sin^2\theta\,d\theta\wedge dr =$

$= r\,dr\wedge d\theta$

Levezetés

2016 b

Gyak 6

[HF$_1$]

$\boxed{6\ HF_2}$

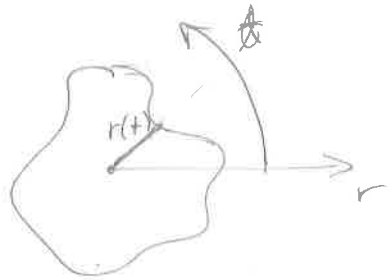
$$J(\Phi) = \iint_D \sqrt{\phi_x'^2 + \phi_y'^2}\, d(x,y)$$

$$E-L: \quad 2\phi_x'' + 2\phi_y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = 0$$

legyen $t \in [0, 2\pi]$

legyen $r(t) > 0$ függvény

$r(0) = r(2\pi)$



továbbá a görbe ívhossza adott!

$$L = \int_\Gamma dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(t) + \dot r^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot r^2}\, dt$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(t) \\ r(t)\sin(t) \end{pmatrix} \qquad \|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{r^2(t) + \dot r(t)^2}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} \dot r \cos t - r \sin t \\ \dot r \sin t + r \cos t \end{pmatrix}$$

$$T = \iint_D 1\, dS = \iint_D \overbrace{(Q'_x - P'_y)}^{1}\, dx\, dy = \int_\Gamma \underbrace{P}_{0}\, dx + \underbrace{Q}_{x}\, dy$$

$$= \int_\Gamma x\, dy = \int_0^{2\pi} r \cos t\, (\dot r \sin t + r \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r \dot r \cos t \sin t + r^2 \cos^2 t) + r^2 \sin^2 t - r^2 \sin^2 t \quad dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 + r \dot r \cos t \sin t - r^2 \sin^2 t \quad dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2 + r \sin t\, (\dot r \cos t - r \sin t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (r^2 + y \dot x)\, dt = \int_0^{2\pi} r^2\, dt - \left(-\int_0^{2\pi} y \dot x\, dt\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2\, dt - \underbrace{\left(-\int_\Gamma y\, dx\right)}_{T}$$

ekkor $2T = \int_0^{2\pi} r^2\, dt$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2\, dt$$

GreenT

2017b

Eleve érdemes lett volna $\frac{1}{2} \int_\Gamma x\, dy - y\, dx$ -et venni!

Anal 3

Max kerület amőba

Analízis III. 8. heti feladatok
2017. november 10.

Variációszámítás 1. rész.

Tavalyi ZH példák!

1. (Átvezető feladat, felszínszámítás) Adott az $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ függvény, és ennek gráfját forgassuk meg az x tengely körül. Igazoljuk, hogy az így kapott forgástest felszínének mértéke:

$$2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

2. Adott a síkon két pont $A(a, \alpha)$ és $B(b, \beta)$, ahol $a < b$. Határozzuk meg a pontokat összekötő görbék közül azt, amelynek ívhossza minimális. Igazoljuk, hogy ez egyenes szakasz.
(Az alapfeladat és a stacionáris megoldásra vonatkozó Euler-egyenlet átismétlése a cél.)

3. Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (2u + (u')^2)\, dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 1.$$

4. ~~(HF)~~ Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ((u')^2 - u^2)\, dx, \qquad u(-\pi/2) = u(\pi/2) = 0.$$

5. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = u^2 + 2(u')^2 - 2u \sin x$ alapfüggvény esetén.

6. Írjuk fel a megfelelő Euler-egyenletet és számoljuk ki annak összes megoldását az $F(x, u, u') = (u')^2 + 2uu' - 16u^2$ alapfüggvény esetén.

D4* Határozzuk meg az alábbi integrálhoz tartozó stacionárius függvényt:

$$I(u) = \int_0^1 (u')^2 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} \le x \le 1 \end{cases}.$$

ahol $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$

54 oldal

Áll: Ha $F(x, u, u') = F(u, u')$ esetben

u stac mo $\iff E = F - u' F'_{u'} \equiv$ konstans VAGY

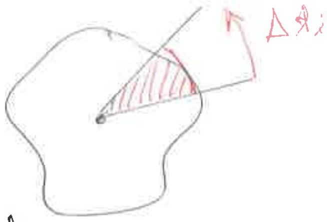
→ min forgástest

→ brachist

$$T = \iint_D (\underbrace{Q'_x - P'_y}_{=1})\,dx\,dy = \int_\Gamma \overset{-\frac{1}{2}y}{P}\,dx + \overset{\frac{1}{2}x}{Q}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -r\sin t(\dot r\cos t - r\sin t) + r\cos t(\dot r\sin t + r\cos t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt$$



másképp : határátmenet

$$T \cong \sum_i \pi r(t_i)^2 \cdot \frac{\Delta t_i}{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt$$

Feladat tehát:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,dt \quad \max \quad \text{u. h.} \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \dot r^2}\,dt$$

$$\tilde I = \int_0^{2\pi} r^2 + \lambda\sqrt{r^2+\dot r^2}\,dt$$

$$E = r^2 + \lambda\sqrt{r^2+\dot r^2} - \lambda\frac{\dot r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C$$

$$r^2 + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C \Rightarrow \frac{r^2}{\sqrt{r^2+\dot r^2}} = C - r^2 \quad \Big|^2$$

$$\frac{r^4}{r^2+\dot r^2} = (C-r^2)^2$$

$$\dot r^2 = \frac{r^4}{(C-r^2)^2} - \frac{(C-r^2)^2 r^2}{(C-r^2)^2}$$

szerintem ez egy nem vezet könnyen megoldásra!

2017b

GreenT

Anal 3
Max területű
amőba

Feladat x, y-ban:

$$\max \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2+y^2)\, dt \qquad \text{mig} \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot x^2+\dot y^2}\, dt = L$$

$$\tilde F = x^2+y^2 + \lambda\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}$$

$$\tilde F'_x - \frac{d}{dx}\tilde F'_{\dot x}$$ ← bonyolult helyette

Sokkal szebb (x, y)-ban

$$\dot x\, \tilde F'_{\dot x} = \frac{\lambda \dot x^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

$$E = x^2+y^2 + \lambda\sqrt{\dot x^2+\dot y^2} - \frac{\lambda \dot x^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} - \frac{\lambda \dot y^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}$$

$$= x^2+y^2 + \frac{\lambda \dot x^2+\lambda \dot y^2}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}} - \text{—''—} - \text{—''—} = x^2+y^2 = C$$

(2018-ban is)
2017b

Variáció 2 Megoldás

Anal 3
Max T-ű
AMŐBA

Variációszámítás

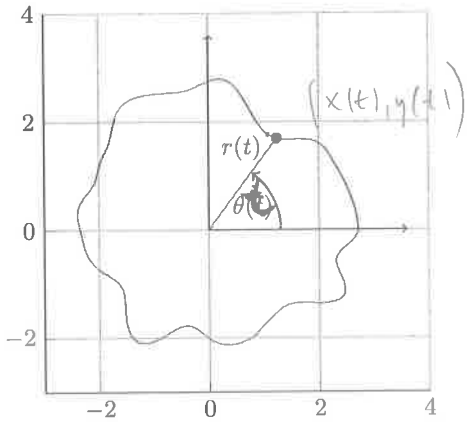
- Egy konkrét feladat -

2017. november 13.

Izoperimetrikus feladat

Feladat: Határozzuk meg, hogy adott kerületű görbe által közrezárt terület mikor maximális. Igazoljuk, hogy ez a görbe a körvonal.

Megoldás: *1. lépes.* Helyezzük el az egyszerű zárt görbét a síkon úgy, hogy belsejében tartalmazza az origót. A görbe pontjainak paraméterezése legyen $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, ahol t jelöli a pontot és origót összekötő egyenes szögét a pozitív x tengelyhez viszonyítva.



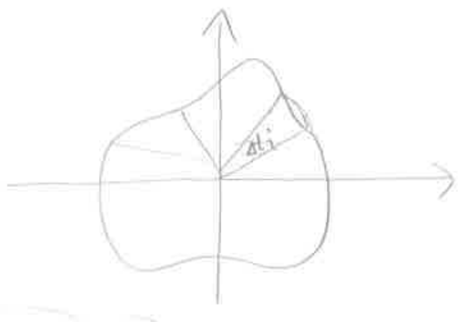
A görbe hossza

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

2. lépes. Igazoljuk, hogy a görbe által közrezárt terület így számolható:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2(t) + y^2(t))dt.$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)dt$$



(VISSZA)

3. lépes. Írjuk fel a megfelelő variációszámítási feladatot. A megengedhető függvények halmaza így adható meg:

$$\mathcal{C} = \{(x,y)\ :\ x,y : [0,2\pi] \to \mathbb{R},\ \text{kétszer folyt. diff-ható, },\ x(0) = x(2\pi),\ y(0) = y(2\pi) = 0\},$$

tehát két függvényt keresünk.

A funkcionál, amit maximalizálni szeretnénk:

$$I(x,y) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}(x^2(t) + y^2(t)) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right) dt, \tag{1}$$

ahol az integrál mögött λ tényezővel szorozva megjelent a korlátozó feltétel is.

A (1) integrálban szereplő függvény:

$$F(\cancel{t}, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

nem függ közvetlenül t-től, ezért optimális megoldás mentén az E energiafüggvény konstans.

4. lépes. Határozzuk meg az "energiafüggvény"-t:

$$E = F - \dot{x}F'_{dotx} - \dot{y}F'_{doty}$$

A parciális deriváltak:

$$F'_{\dot{x}} = \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \qquad F'_{\dot{y}} = \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Így ezeket visszahelyettesítve:

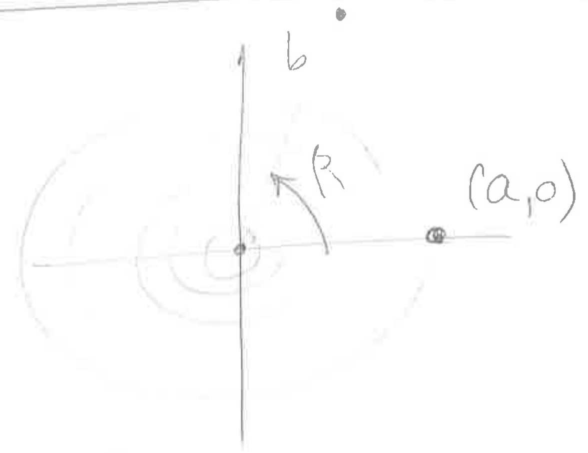
$$\begin{aligned} E &= F - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \dot{x}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - \dot{y}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \\ &= \dots = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Így azt kaptuk, hogy az optimális görbe mentén

$$E(t) = c \qquad \Longrightarrow \qquad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

tehát az optimális görbe egy kör.

2018b Varsrdm 3 szeuzeros pld



$$I = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot v \, dt = \int_0^T \sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{x^2+y^2}} \, dt$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$E = F - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = \sqrt{\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{x^2+y^2}} - \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Polárkoordinátákkal: ~~$v(t) = r(t) \cdot \theta(t)$~~

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2} = \sqrt{r'^2+r^2} \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \qquad \dot{r} = r'_\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$I = \int_0^T \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r}\dot{\theta}\, dt = \int_0^\beta \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r} dr$$

$$E = F - r'F'_{r'} = \frac{\sqrt{r'^2+r^2}}{r} - \frac{1}{r}\frac{r'^2}{\sqrt{r'^2+r^2}} = \frac{r'^2+r^2}{r\sqrt{}} - \frac{r'^2}{r\sqrt{}} = C$$

$$\frac{r}{\sqrt{r'^2+r^2}} = C \Big|^2 \Rightarrow r^2 - C^2r^2 = C^2r'^2 \Rightarrow r' = \frac{r}{C}\sqrt{1-C^2}$$

$$r(\theta) = A\, e^{\frac{\sqrt{1-C^2}}{C}\theta}$$

avagy: $r(\theta) = C_2\, e^{C_1\theta}$ (*)

Anal3 Varsrdm
2018b
Szeuzeros (U7)

(4) feladat – felület keresése

$$\phi : D \to \mathbb{R}$$

$$I(\phi) = \iint_D \underbrace{\| \operatorname{grad} \phi(x,y) \|^2}_{F(x,y,\phi,\phi'_x,\phi'_y)} \, d(x,y)$$

$$F = \phi'^2_x + \phi'^2_y \Rightarrow \text{E-L: } \frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \phi'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \phi'_y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\frac{\partial}{\partial x}\phi'_x + 2\frac{\partial}{\partial y}\phi'_y = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \phi(x,y) = 0}$$

(5) l hosszú (nyújtható) m tömegű húr rezgőmozgása.

$$u(x,t), \quad x \in [0, l]$$

$$T(t) = \frac{m}{2l} \int_0^l u'_t(x,t)^2 \, dt \qquad V(t) = \tau \int_0^l \left(\sqrt{1 + u'_x(x,t)^2} - 1 \right) dx$$

Hamilton elv:

$$\min \int_{t_1}^{t_2} T(t) - V(t) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \underbrace{\left(\frac{m}{2l} u'^2_t - \tau \sqrt{1 + u'^2_x} + \tau \right)}_{F(x,t,u,u'_x,u'_t)} dx \, dt$$

$$\text{E-L: } \boxed{\frac{\tau u''_{xx}}{(u'^2_x + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{l} u''_{tt} = 0}$$

Mathematica!
(következő lapon!)

ez nyilván elhanyagolható

$$\tau u''_{xx} = \frac{m}{l} u''_{tt} \Rightarrow \boxed{u''_{xx} = \frac{1}{\tau \frac{l}{m}} u''_{tt}}$$

$$F = \frac{m}{2\ell} u_t'^2 - \tau\sqrt{1+u_x'^2} + \tau$$

$$-\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x'} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial u_t'} = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\tau\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{m}{2\ell}2u_t' = 0$$

$u_x'^2 \ll 1$, és akkor máris megvagyunk.

$$-\tau\frac{u_{xx}''\sqrt{1+u_x'^2} - u_x'\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}}{1+u_x'^2} + \frac{m}{\ell}u_{tt}'' = 0$$

$$-\tau\frac{u_{xx}''\frac{1+u_x'^2}{\sqrt{1+u_x'^2}} - u_x'^2\frac{1}{\sqrt{1+u_x'^2}}}{1+u_x'^2} + \frac{m}{\ell}u_{tt}'' = 0$$

$$-\tau\frac{u_{xx}'' + u_{xx}''u_x'^2 - u_x'^2}{(1+u_x')^{\frac{3}{2}}} + \frac{m}{\ell}u_{tt}'' = 0$$

Felesleges!

$$f = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} = \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{H} =$$

$$\mathcal{A}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1+\|\nabla u\|^2}\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\Omega} \sqrt{1+u_{x_1}'^2 + \ldots + u_{x_n}'^2}\, dx_1 \ldots dx_n$$

$$E\text{-}L: \cancel{-F_u'} + \frac{\partial}{\partial x_1} F'_{u'_{x_1}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} F'_{u'_{x_n}} = 0$$

Min. fel. felsz...

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u'_{x_1}}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{u'_{x_n}}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \begin{pmatrix} u'_{x_1} \\ \vdots \\ u'_{x_n} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} = 0$$

$$\nabla \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} \right)$$

Pénzhozat

[illegible]

csütörtökre:
↳ ~~Példák~~: Trafóműbő
↳ Traf3D pld újra

$\mathcal{L}$ gyak + Pótlás

Mottós demók

$$\operatorname{grad}(c_1F_1 + c_2F_2 + c_3F_3) = \begin{bmatrix} c_1F'_{1x} + c_2F'_{2x} + c_3F'_{3x} \\ c_1F'_{1y} + c_2F'_{2y} + c_3F'_{3y} \\ c_1F'_{1z} + c_2F'_{2z} + c_3F'_{3z} \end{bmatrix}^T$$

1. Legyen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező, és $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabály"-t:

$$\operatorname{grad}(\underline{c}^T F) = \underline{c}^T DF.$$

$$(c_1\ c_2\ c_3)\begin{bmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2y} & F'_{2z} \\ F'_{3x} & F'_{3y} & F'_{3z} \end{bmatrix} = \left[c_1F'_{1x} + c_2F'_{1y} + c_3F'_{1z} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \dots \right]$$

2. Adott $F(x, y, z) = (x^2, x, z^2)$ vektormező. Legyen S egy $g : R \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény felülete, ahol $R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány. Az S felület határa $C = \partial S \subset \mathbb{R}^3$. Igazoljuk, hogy

$$\oint_C F(\underline{r})d\underline{r} = \mathrm{A}(R)$$

$$\nabla \times F = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 4pt$$

$$d\underline{S} = \begin{bmatrix} -g'_x \\ -g'_y \\ 1 \end{bmatrix} dx\,dy \quad 4pt$$

$$\underbrace{\oint_C \langle F, dl \rangle = \iint_S \langle \nabla \times F, dS \rangle}_{4pt} = \underbrace{\iint_R 1 \, dS = A(R)}_{2pt}$$

Anal 3 ZH1

Div: $\iiint_V \nabla F \, dV = \oiint F \cdot n \, dS$

$\iint_D (F_{1x}' + F_{2y}') \, dx\,dy = \iint_D \nabla F \, d(x,y) = \oint F \cdot n \, dl = \oint F_1 \, dy - F_2 \, dx$

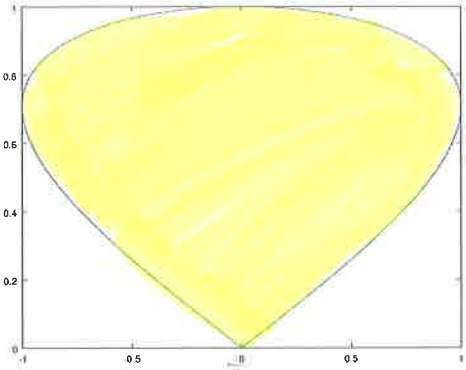
$\iint_D$

3. Határozza meg az sinusoid görbe által közrezárt terület nagyságát. A sinusoid paraméterezése:

$$x(t) = \sin(2t), \qquad y(t) = \sin(t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Green T:

$\iint_D (P_x' - Q_y') \, dx \wedge dy = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$



$\oint_\gamma x\,dy = \int_0^\pi \sin(2t)\, d(\sin t) = \int_0^\pi \sin 2t \cos t \, dt =$

$= -\int_0^\pi (-\sin t) \cdot 2\cos^2 t \, dt = -\frac{2}{3}\left[\cos^3 t\right]_0^\pi = -\frac{2}{3}\left[-1-1\right] = +\frac{4}{3}$

Anal 3 ZH 1

4. Írjuk fel az Euler egyenletet és határozzuk meg az alábbi funkcionálok lehetséges extremális függvényeit:

(a)

$$I(u) = \int_0^1 (x + u(x) + 3u'(x))dx$$

(b)

$$I(u) = \int_1^2 (u + xu'(x))dx$$

Euler egyenlet: $F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$

(a) $1 - \frac{d}{dx} 3 = 1 \neq 0 \quad \forall u \in C \Rightarrow$ nincs extr.

(b) $1 - \frac{d}{dx} x = 0 \quad \forall u \in C \Rightarrow$ minden f. extr.

Anal3 ZH 1

Szorgalmi feladatok azoknak, akik túl hamar végeztek a többivel.

+1 Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja a (x, y) síkbeli egységkör. Adott két pont $(0, 1, 0)$ és $(0, -1, 1)$. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston.

+2 Legyen M az a téglalap a térben, melynek csúcspontjai $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$. Legyen továbbá

$$F(x, y, z) = (yz, xz, xz).$$

Igazolja a Stokes tételt ebben az esetben.

Anal 3 ZH1

Lagrange függvény:

általánosított erő
külső erő
(nem potenc.)

$$L(t, q, \dot{q}) = \underbrace{T(q, \dot{q})}_{\text{általánosított sebesség}} - V(q) + \underbrace{q}_{\text{ált. koordináta}} \cdot F_{ext}$$

Gravitációs erő (potenciálos)

$$W_{pot}^{G} = mgz = -\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -r^{T} \cdot F_{G}$$

Elektromos tér ereje ponttöltés körül

$$V_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} = -\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \underbrace{\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]}_{E}$$

$$W_{pot}^{E} = q \cdot V_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r} = -\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Ebbe nem vagyok biztos

Tehát van egy Lagrangian:

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial q}}_{\text{gradiens}} - \frac{\partial V(q)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) = 0}$$

Általánosított impulzusmomentum $\Longrightarrow$ $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$L = T - V$ Lagrange fv. (Lagrangian)

Energiafv: $\boxed{H = -L + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$ = Összenergia

→ Hamiltonian

$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i}$ általánosított impulzusmomentum!

Pld. Anyagi pont mozgása gravitációs térben ⇒ $F_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ ⇒ $W_p^G = mgz$

$\boxed{F_G = -\nabla W_p^G}$

$W_k = \frac{m}{2} \|\dot{r}\|^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

$p_x = L'_{\dot{x}} = m\dot{x} = m v_x$

$p_y = L'_{\dot{y}} = m\dot{y} = m v_y$

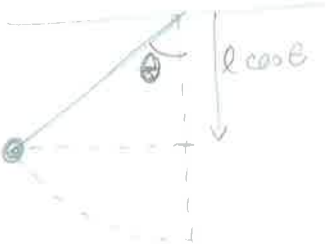
$p_z = L'_{\dot{z}} = m\dot{z} = m v_z$

$$\boxed{H(t, q, \dot{q}, p) = -L(t, q, \dot{q}) + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i}$$

Hamilton egyenletek:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}}$$

Inga:



$E_{pot} = mg(1-\cos\theta)\,l$

$E_{kin} = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = m\frac{l^2}{2}\dot{\theta}^2$

$$\boxed{\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)}$$

$$\mathcal{H} = -\mathcal{L} + \dot{\theta}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}}_{p} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl(1-\cos\theta) + \dot{\theta}p$$

$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ y = l\cos\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \dot{x} = (l\cos\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = (-l\sin\theta)\dot{\theta} \end{cases}$

1: $\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{\theta}$ –

2: $\boxed{\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = +mgl\sin\theta}$

3: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\cancel{\partial t}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\cancel{\partial t}}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = p \Rightarrow \cancel{2}ml^2\dot{\theta} = p \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$

Lagrangeiannel számolva:

Euler egy: $\mathcal{L}'_\theta - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot{\theta}} = 0 \Rightarrow -mgl\sin\theta - \frac{d}{dt}ml\dot{\theta} = 0$

$$\boxed{\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

$\boxed{\begin{matrix} x = l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{matrix}}$

$\boxed{\begin{matrix} \dot{x} = (l\cos\theta)\dot{\theta} \\ \dot{z} = (l\sin\theta)\dot{\theta} \end{matrix}}$

Legyen $\vec{F} = -D\cdot\vec{v} = -D\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = -D\cdot l\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\dot{\theta}$

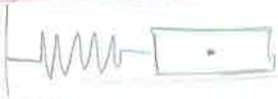
$\vec{r}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}^T\cdot(-D)\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = -Dl^2\,(\sin\theta \;\; \cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\dot{\theta}$

$= -Dl^2\dot{\theta}\,(\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta) = 0$ Jogos: $\vec{r}\perp\vec{F}$

máshogy: $\vec{M} = \vec{l}\times\vec{F} = \vec{l}\times\vec{v}\cdot(-D) = \begin{pmatrix}x\\ 0\\ z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot{x}\\ 0\\ \dot{z}\end{pmatrix}\cdot(-D) =$

$= \begin{pmatrix}0\\ z\dot{x} - x\dot{z}\\ 0\end{pmatrix}\cdot(-D) = -Dl^2\begin{pmatrix}0\\ -\cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\dot{\theta} = -Dl^2\dot{\theta}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

A SÚRLÓDÁSI ERŐ ~~ENERGIA~~ FORGATÓ NYOMATÉKA



$$\mathcal{L} = E_k - E_p = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} - \frac{k x^2}{2}$$

I Lagrangian

$$E\text{-}L: \; -kx - \frac{d}{dt} m\dot{x} = 0 \implies m\ddot{x} + kx = 0$$

legyen $F_s = -D\dot{x}$

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = E_k(q, \dot{q}) - E_p(q)$$

$$E\text{-}L: \; \mathcal{L}'_{q_i} - \frac{d}{dt} \mathcal{L}'_{\dot{q}_i} = -F_{i(ext)}(t)$$

$$E\text{-}L: \; -kx - \frac{d}{dt} m\dot{x} = -F_s$$

$$m\ddot{x} + kx = -D\dot{x}$$

$$\boxed{m\ddot{x} + D\dot{x} + kx = 0}$$

Hamiltonian

II

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}$$

Ez elmondható a gyakorlaton

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \implies \dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$\mathcal{H} = \dot{x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \mathcal{L} = \frac{p}{m} \cdot p - \frac{m p^2}{2m^2} + \frac{k x^2}{2} =$$

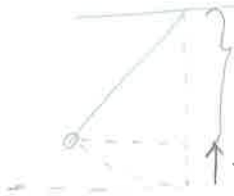
$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{k x^2}{2}$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}} \longrightarrow \boxed{\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -kx}$$

$$\xrightarrow{p = \dot{x} m} \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Inga (újra) : $\mathcal{L} = E_k - E_p = \dfrac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mgl(1-\cos\theta)$

$= \dfrac{m}{2}(\dot x^2 + \dot z^2) - mg(z+l)$



$z_0 = 0$

$l\cos\theta = -z$

$E_p = mg(z+l) = mg(l - l\cos\theta)$
$= mgl(1-\cos\theta)$

1. Lagrangian

E-L: $\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} - \mathcal{L}'_{\theta} = 0 \implies \boxed{m l^2 \ddot\theta + mgl\sin\theta = 0}$

E-L: $\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x} - \mathcal{L}'_{x} = 0 \implies m\ddot x = 0$

$\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot z} - \mathcal{L}'_{z} = 0 \implies m\ddot z + mgz = 0$

$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \dot x = (l\cos\theta)\dot\theta \\ \dot z = (l\sin\theta)\dot\theta \end{cases}$

$\begin{cases} \ddot x = \ddot\theta l\cos\theta - l(\sin\theta)\dot\theta^2 \\ \ddot z = \ddot\theta l\sin\theta + l(\cos\theta)\dot\theta^2 \end{cases}$

$\ddot\theta l\cos\theta - l\dot\theta^2\sin\theta = 0$

$\ddot\theta l\sin\theta + l(\cos\theta)\dot\theta^2 - gl\cos\theta = 0$

Ezt inkább hagyjuk!

EZ NEM ÍGY VAN

$\mathcal{L} = E_k - E_p \cancel{+ \theta M_s}$

$M_s = l F_s = -l\Delta v = -l\Delta l\omega = -l^2\Delta\dot\theta$

$\mathcal{L} = E_k - E_p + l^2\Delta\theta\dot\theta = \boxed{\dfrac{m l^2\dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta - l^2\Delta\theta\dot\theta}$

$\mathcal{L}'_{\dot\theta}$ $\quad$ $\mathcal{L}'_{\theta}$

E-L: $\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot\theta} - \mathcal{L}'_{\theta} = 0$

$m l^2\ddot\theta - l^2\Delta\dot\theta + mg\sin\theta + l^2\Delta\dot\theta = 0$

!ELLENPÉLDA!

Ez helyett volna tejesüljön:

$m l^2\ddot\theta + mg\sin\theta = \underbrace{-l^2\Delta\dot\theta}_{M_s}$

M_s – „súrlódási nyomaték"

Elsőt –3–
Fizika /Mat.Bsc. 2016. okt. 24.
INGA
Lagrange-függv.
Hamilton-függv.

Tehát $\boxed{\mathcal{L} = \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} + mg\cos\theta}$

$\mathcal{L} = E_k(q,\dot q) - E_p(q)$

②

Hamiltonian

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = m l^2 \dot\theta \Rightarrow \boxed{\dot\theta = \frac{p}{m l^2}}$$

$$\mathcal{H} = \dot\theta p - \frac{m l^2 \dot\theta^2}{2} - mg\cos\theta$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{p^2}{2 m l^2} - mg\cos\theta}$$

$\mathcal{H}(q,p) \leftarrow$ <u>másos benne deriválni!</u>

$$\begin{cases} \dot x = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m l^2} \\ \dot p = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot x &= \frac{p}{m l^2} \\ \dot p &= -mg\sin\theta \end{aligned}}$$

<u>A súrlódási erő forgató nyomatéka:</u>

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot x = l\dot\theta\cos\theta \\ \dot z = l\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{M}_f = \vec{l} \times \vec{F}_f = \vec{l} \times (-\Delta \cdot \vec{v}) = (-\Delta)\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot x \\ 0 \\ \dot z \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ z\dot x - x\dot z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_f)_y = -\Delta\left(-l\cos\theta \cdot l\dot\theta\cos\theta - l\sin\theta \cdot l\dot\theta\sin\theta\right) = -\Delta l^2 \dot\theta$$

Tehát $\boxed{\vec{M}_f = -\Delta l^2 \dot\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Egyszerűbben: $M_f = l \cdot F_f = -l \cdot \Delta \cdot v = -\Delta l \cdot (l\omega) = \underline{-\Delta l^2 \dot\theta}$

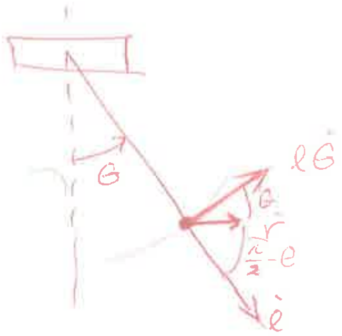
Amit még érdemes megmutatni:

See more: Csurgay fizika jegyzete HF1

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{m_1 \dot x_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot x_2^2}{2} - \frac{k(x_2 - x_1)^2}{2}}$$

$$\hookrightarrow \text{E-L: } \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x_1} - \mathcal{L}'_{x_1} = m_1 \ddot x_1 - k(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\dot x_2} - \mathcal{L}'_{x_2} = m_2 \ddot x_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$



$$v = \ell\dot\theta + \dot r + \dot\ell$$

$$v^2 = \ell^2\dot\theta^2 + \dot r^2 + \dot\ell^2 + 2\ell\dot\theta\dot r\cos\theta + 2\dot r\dot\ell\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$= \ell^2\dot\theta^2 + \dot r^2 + \dot\ell^2 + 2\ell\dot\theta\dot r\cos\theta + 2\dot r\dot\ell\sin\theta$$

Either:

$$L = \frac{m\ell^2\dot\theta^2}{2} + \frac{m\dot r^2}{2} + \frac{m\dot\ell^2}{2} + m\ell\dot\theta\dot r\cos\theta + m\dot r\dot\ell\sin\theta + \frac{M\dot r^2}{2} + \frac{J\dot\ell^2}{2s^2} - mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = -\frac{d}{dt}\Big((m+M)\dot r + m\ell\dot\theta\cos\theta + m\dot\ell\sin\theta\Big)$$

$$= -\Big((m+M)\ddot r + m\dot\ell\dot\theta\cos\theta + m\ell\ddot\theta\cos\theta + m\ell\dot\theta^2\sin\theta + m\ddot\ell\sin\theta + m\dot\ell\dot\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow (m+M)\ddot r + 2m\dot\ell\dot\theta\cos\theta + m\ell\ddot\theta\cos\theta + m\ddot\ell\sin\theta - m\ell\dot\theta^2\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\ell} = m\ell\dot\theta^2 + m\dot\theta\dot r\cos\theta - mg(1-\cos\theta)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(m\dot\ell + m\dot r\sin\theta + \frac{J\dot\ell}{\cancel{2}s^2}\right) = 0$$

$$0 = mg(1-\cos\theta) - m\ell\dot\theta^2 - m\dot\theta\dot r\cos\theta$$

$$+ m\ddot\ell + \frac{J\ddot\ell}{s^2} + m\ddot r\sin\theta + m\dot r\dot\theta\cos\theta$$

$$0 = mg(1-\cos\theta) - m\ell\dot\theta^2 + \ddot\ell\left(m + \frac{J}{s^2}\right) + m\ddot r\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = -m\ell\dot\theta\dot r\sin\theta + m\dot r\dot\ell\cos\theta + mg\ell(-\sin\theta)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\dot\theta + m\ell\dot r\cos\theta\right)$$

$$= -\cancel{m\ell\dot\theta\dot r\sin\theta} + \cancel{m\dot r\dot\ell\cos\theta} - mg\ell\sin\theta$$

$$-m\ell^2\ddot\theta - 2m\ell\dot\ell\dot\theta - \cancel{m\dot\ell\dot r\cos\theta} - m\ell\ddot r\cos\theta + \cancel{m\ell\dot r\dot\theta\sin\theta}$$

$$= -mg\ell\sin\theta - m\ell^2\ddot\theta - 2m\ell\dot\ell\dot\theta - m\ell\ddot r\cos\theta = 0$$

vaσγis $\quad mg\sin\theta + m\ell\ddot\theta + 2m\dot\ell\dot\theta + m\ddot r\cos\theta$

$$mg\sin\theta + m\ell\ddot\theta + 2m\dot\ell\dot\theta + m\ddot r\cos\theta = 0$$

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\tfrac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\tfrac{\pi}{2}\sin(-\theta) = \sin\theta$$

$$J = \int_0^R r\sigma\, dl = \int_0^R r \frac{m}{R}\, dl = \frac{m}{R}\int_0^R r\, dl = \frac{m}{R}\,\frac{R^2}{2} = \frac{mR}{2}$$

$$J = \iint_C r\sigma\, dS = \iint_C r\frac{m}{\pi R^2}\, dS = \frac{m}{\pi R^2}\iint_C r\, dS = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2\, d\theta\, dr =$$

$$= \frac{m}{\pi R^2}\cdot 2\pi\, \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{2mR}{3}$$

lehet, hogy tényleg:

$$J = \iiint_V r^2\varrho\, dV \text{ van?}$$

---

(1) $\ddot r(M+m) + \ddot l m\sin\theta + \ddot\theta m l\cos\theta + 2m\dot l\dot\theta\cos\theta + m\dot\theta^2 l\sin\theta = f$

$ml\dot\theta^2$

(2) $\ddot r m\sin\theta + \ddot l\left(m + \frac{J}{\varsigma^2}\right) + mg(1-\cos\theta) - Ml\dot\theta^2 = -\frac{\tau}{\varsigma}$

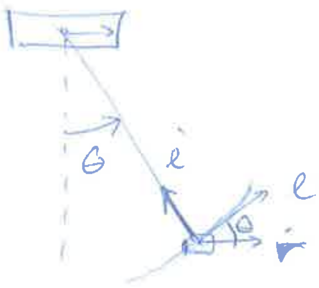
(3) $\ddot r m\cos\theta + \ddot\theta m l + 2m\dot l\dot\theta + mg\sin\theta = 0$

$$L = \frac{m\dot l^2}{2} + \frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + \frac{m\dot r^2}{2} - m\dot l\dot r\sin\theta + ml\dot\theta\dot r\cos\theta + \frac{M\dot r^2}{2} + \frac{J\dot l^2}{2\varsigma^2} + mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = -\frac{d}{dt}\left(m\dot r - m\dot l\sin\theta + ml\dot\theta\cos\theta + M\dot r\right) = 0$$

$$= (m+M)\ddot r - m\ddot l\sin\theta - m\dot l\dot\theta\cos\theta + m\dot l\dot\theta\cos\theta + ml\ddot\theta\cos\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta = 0$$

(szerintem) $= (m+M)\ddot r - m\ddot l\sin\theta + ml\ddot\theta\cos\theta - ml\dot\theta^2\sin\theta = 0$



$$\frac{m v^2}{2}$$

$$v = \dot{l} + l\dot{\theta} + \dot{r}$$

$$\langle v, v\rangle = \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 + 2\langle \dot{l}, l\dot{\theta}\rangle + 2\langle \dot{l}, \dot{r}\rangle + 2\langle l\dot{\theta}, \dot{r}\rangle$$

$$= \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 + 2\dot{l}\dot{r}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta$$

$$= \dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta$$

$$T_m = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta\right)$$

$$T_M = \frac{M\dot{r}^2}{2} = \left[\frac{kg\, m^2}{s^2}\right]$$

$$T_J = \frac{J\dot{l}^2}{2\rho^2} = \left[\frac{kg \cdot m \cdot m^2}{m^2 \cdot s^2}\right][J]_{SI} = \qquad J = \iiint_V r^2\rho\, dV = [m\, kg]$$

$$V_m = mgl(1-\cos\theta)$$

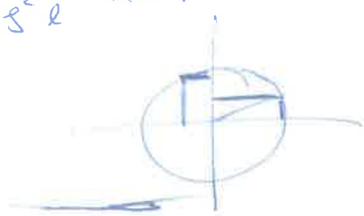
$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 - 2\dot{l}\dot{r}\sin\theta + 2l\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta\right) + \frac{M\dot{r}^2}{2} + \frac{J\dot{l}^2}{2\rho^2} - mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{r} - m\dot{l}\sin\theta + ml\dot{\theta}\cos\theta + M\dot{r}\right) = 0$$

$$(M+m)\ddot{r} = m\ddot{l}\sin\theta - m\dot{l}\dot{\theta}\cos\theta + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = 0 \Rightarrow ml\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta + mg(1-\cos\theta) - \frac{d}{dt}\left(m\dot{l} - m\dot{r}\sin\theta + \frac{J}{\rho^2}\dot{l}\right) = 0$$

$$\Rightarrow ml\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta + mg(1-\cos\theta) - m\ddot{l} + m\ddot{r}\sin\theta + m\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta - J\rho^2\ddot{l}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta = -\sin\theta$$

① $\ddot{r}(M+m) + \ddot{\ell}\, m \sin\theta + \ddot{\theta}\, m (L_0+\ell)\cos\theta +$

$+ \cancel{}\, 2m\,\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta\ \cancel{+m}\dot{\theta}^2 (L_0+\ell)\sin\theta = f$

② $\ddot{r}\, m\sin\theta + \ddot{\ell}\left(m + \frac{J}{\rho^2}\right) + \frac{\tau + \mu m g \rho}{\rho} - M(L_0+\ell)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta$

③ $\ddot{r}\, m\cos\theta + \ddot{\theta}\, m(L_0+\ell) + 2m\dot{\ell}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$

---

① $f - 2m\dot{\ell}\dot{\theta}\cos\theta - m\dot{\theta}^2(L_0+\ell)\sin\theta =$

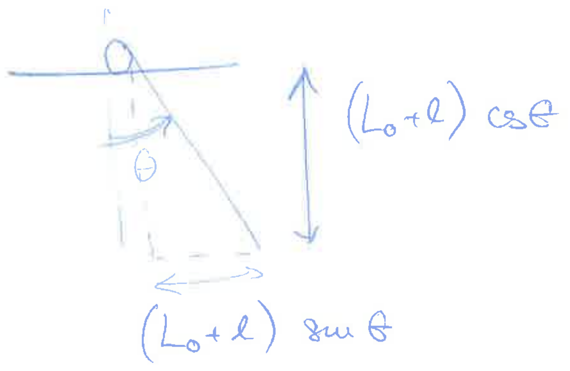
$\ddot{r}(M+m) + \ddot{\theta}\, m(L_0+\ell)\cos\theta + \ddot{\ell}\ m\sin\theta$

② $M(L_0+\ell)\dot{\theta}^2 - mg(1-\cos\theta) - \frac{\tau}{\rho} = \ddot{r}\ m\sin\theta + \ddot{\ell}\left(m+\frac{J}{\rho^2}\right)$

③ $-2m\dot{\ell}\dot{\theta} + mg\sin\theta = \ddot{r}\, m\cos\theta + \ddot{\theta}\ m(L_0+\ell)$

Linearize:

$\dot{x} = F(x,u) \simeq F(x_0, u_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial u}(u-u_0)$



$\ddot{\ell} = \frac{1}{m+\frac{J}{\rho^2}} \cdot \left(-\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{\rho^2}{m\rho^2+J}\left(-\frac{\tau}{\rho}\right) = \frac{-\rho\tau}{m\rho^2+J}$