Analízis III. 4. heti feladatok
2015. október 2.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1. (*Részben ismétlés, órai anyag volt.*) Lássuk be, hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság.
   (a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel.
   (b) Igazoljuk ezek kompatibilitását. $\phi_s^{-1}\ \phi_u \rightarrow$ diff-ható
   (c) Mi lesz a görbe implicit megadása?
   (d) Írjuk fel a $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret.

(+1)

2. Igazoljuk, hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban

$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

két-dimenziós sokaság. A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével. Mi lesz a sokaság implicit megadása?. Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret.

a) b)

3. (HF) Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon, melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú, másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú.

   Igazolja, hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon, használja mindkét definíciót. Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret.

4. (HF) Igazoljuk, hogy a valós projektív sík, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}/\sim$, egy-dimenziós sokaság. (Ez a p.143. 9. feladat $n = 1$ esetben.)

5. Igazoljuk, hogy a valós projektív tér, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}/\sim$, két-dimenziós sokaság. (Ez a p.143. 9. feladat $n = 2$ esetben.) jegyzet 4. pld (2. fej.)

TASK 6. (p. 143. 8 feladat) Igazoljuk, hogy a tórusz két-dimenziós sokaság.

D6* Igazolja, hogy

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \ : \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1, \ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$$

három-dimenziós sokaság – a négydimenziós térben.

Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia relációt.

hol 3 8 ogyda
DIFFGEOM

(+1) Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg, akkor mi lesz ennek parametrikus ill. implicit megadása?

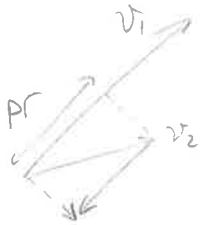
$P \in \mathbb{R}^3$, $P \notin S$ $P = (x_0, y_0, z_0)$. Mi lesz $T_p = ?$

$N_p = ?$

(Jegyzetben ✓)

$$\left(\begin{array}{c|c|} a & d \\ b & e \\ c & f \end{array}\right) \qquad \text{legyen} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$T = \left(v_1 \; v_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \cdots \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right.\right) \Rightarrow \begin{matrix} Te_1 = v_1 \\ Te_2 = v_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} e_1 = T^{-1} v_1 \\ e_2 = T^{-1} v_2 \end{matrix}$$



$$v_2 - \underbrace{\left\langle \frac{v_1}{\|v_1\|}, v_2 \right\rangle}_{pr} v_1$$

$$\sqrt{\det(A^T A)} = \sqrt{(\det A^T)(\det A)} = \det A$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$\overline{A} = RA$$

$$\overline{A}^T \overline{A} = (RA)^T RA = (A^T \underbrace{R^T R}_{I} A) = A^T A$$

Analízis III. 5. heti feladatok
2014. október 13.

Ismétlés: Sokaság irányítása = "érintőterek irányítása". 135. oldal, 6.5.3. fejezet.

1. Igazoljuk, hogy a vektortér irányítását definiáló reláció valóban ekvivalencia-reláció.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke.

2. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|.$$

3. (Részben az órai anyag folytatása. A 113. oldalon Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, illetve az őket tartalmazó mátrix:
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$
Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

4. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

5. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:
$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

6. (HF) Igazoljuk, hogy az 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus: ha $\tau, \omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\omega \wedge \tau = -\tau \wedge \omega$.

7. (HF) Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

8. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$ (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

9. Igazolja, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata asszociatív:
$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:
$$\omega = e^x \cos(y),$$
$$\omega = x dx + y dy,$$
$$\omega = xyz\ dx \wedge dz$$

$$(v_j) \xrightarrow{A} (w_j)$$

Anal 3 8. gy
Diffgeom.

$$A = [v_1 \quad v_2]$$

$$\sqrt{\cancel{\det}(A^T A)} \quad (-1)^{\varepsilon(\,)}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2+1}$$

Állítás:

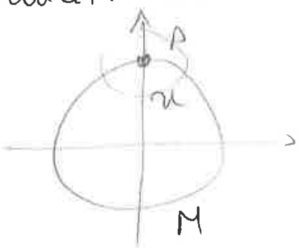
ha M: k dim. sokaság

akkor ∂M: $k-1$ dim. sokaság vagy $\emptyset$

és $\partial(\partial M) \equiv \emptyset$

— 8 hét —

Paraméterezésre pld: egységkörlap:



$$\Phi(u) = \left(u, \sqrt{1-u^2}\right)$$

$$\Phi : \underbrace{(-\alpha, \beta)}_{V} \to \mathbb{R}^2 \qquad 0 \leq \alpha, \beta < 1$$

$$\boxed{\Phi(V) = \mathcal{U} \cap M} \qquad D\Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}$$

Emlékeztető:

Def $D\Phi$ oszlopvektorai $\equiv T_p$ tangenstér

k dim. sokaság $\subset$? $\subset$ $\mathbb{R}^n$-ben

$$T_p = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Pld 2. egységgömbfelület.

$P = (1,0,0)$

$$\Phi(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right) \Rightarrow D\Phi = \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{\dots}} & -\frac{v}{\sqrt{\;}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

T_p k dimenziós

N_p $n-k$ dimenziós

$P = (1,0,0)$-ra:

$$T_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T_N = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

Általánosan:

$$T_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{u}{\sqrt{\;}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\frac{v}{\sqrt{\;}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \forall (u,v) \in (-1,1)$$

↑ De alapvetően ezt pontonként kell keresni

Differenciálgeom

8. hét -1-

Absztrakt sokaság

Nem feltétlenül : $M \subset \mathbb{R}^n$ → nincs távolság, nincs norma

Topológikus tér

Def: M n-dimenziós sokaság, ha

$$M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \quad \mathcal{U}_\alpha \text{ nyílt halmazok}$$

$$\left(\forall p \in M\text{-re } \exists \mathcal{U}_\alpha : p \in \mathcal{U}_\alpha \right)$$

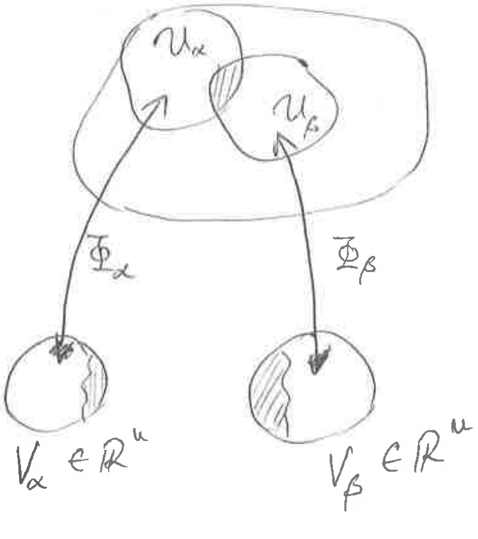
$\forall \mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists \Phi_\alpha$ u.h. $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^n \to M$; $\Phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$

nyílt gömb $V_\alpha \in \mathbb{R}^n$

egy-egy értelmű

$\forall p \in \mathcal{U}_\alpha$

$\Phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^n$ lesz koordinátái



Ha $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$

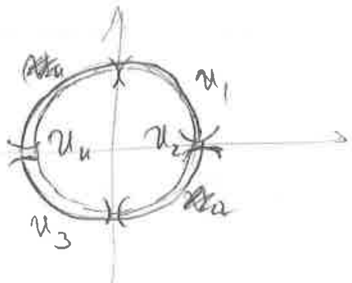
legyen $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{-1} \Phi_\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ÉT : $\Phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \subset \mathbb{R}^n$

$\Phi_{\alpha\beta}$ diffható, derivált teljes rangú

Def : $\{ (\mathcal{U}_\alpha, \Phi_\alpha) ; \alpha \in I \}$ Ez egy <u>atlasz</u>

Pld



$\Phi_1 : \underbrace{(-1, 1)}_{V_1} \to \mathcal{U}_1$

$\Phi_1(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$

egy-egy ért

$\Phi_2 : (-1, 1) \to \mathcal{U}_2$

$\Phi_2(u) = (\sqrt{1-u^2}, u)$

$\Phi_1^{-1}(\Phi_2(u)) = \Phi_1^{-1}(\sqrt{1-u^2}, u) = \sqrt{1-u^2}$

$\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$; $F(u) = \sqrt{1-u^2}$

$F'(u) = -\frac{u}{\sqrt{}}$ ✓ $u \in (0,1)$

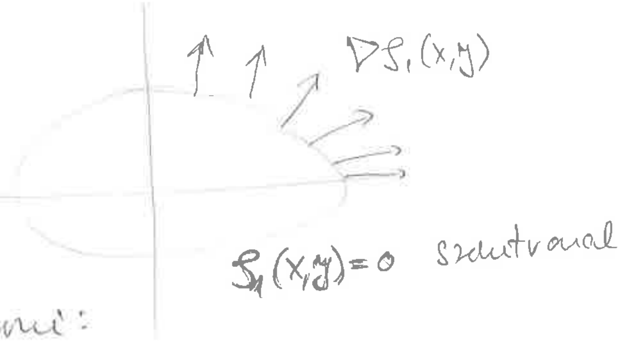
(b) (még mindig [HF_1])

Normál tér megadása (ez a könnyebbik)

$$S_1(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

„A gradiens mindig merőleges a szintvonalra" ($D7^*$)

$$\nabla S_1(x,y) = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)$$



ha $P = (x_0, y_0)$

akkor $N_P = \left\{ \alpha \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}\right) \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

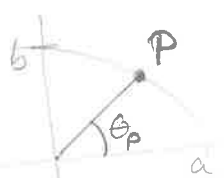
ha nagyon precíz szeretnék lenni:

$$N_P = \left\{ \alpha \cdot \left[\nabla S_1(x,y)\right]_{(x,y)=P} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Érintő- (tangens-) tér megadása (nehezebb)

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \; ; \; t \in V_P \subset (0, 2\pi + \underbrace{\varepsilon})$$

↳ hogy ez a pont is benne legyen és V_P legyen nyílt



$$\theta_P \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P$$

tehát $\boxed{\Phi^{-1}(P) = \theta_P}$

$$P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos\theta_P \\ b \sin\theta_P \end{pmatrix}$$

$$\dot\Phi(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot\Phi(\theta_P) = \begin{pmatrix} -a\sin\theta_P \\ b\cos\theta_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b}\overbrace{[b\sin\theta_P]}^{y_P} \\ \frac{b}{a}\underbrace{[a\cos\theta_P]}_{x_P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} y_P \\ \frac{b}{a} x_P \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T_P = \left\{ \beta \cdot \dot\Phi(\theta_P) = \beta \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} y_P \\ \frac{b}{a} x_P \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}}$$

Formálisabban (+ általánosabban) $\Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \; ; \; \Phi(u)$

$$T_P = \left\{ \left[D\Phi(u)\right]_{u = \Phi^{-1}(P)} \cdot \beta \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R}^k \right\}$$

Definíció 2.1.1

Paraméteresen megadott sokaság

[1] $\mathbb{R}^n$-ben

$M \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz

M k-dim diffható sokaság

Definíció 2.1.6.

[2] Topologikus térben

$M \subset \mathbb{R}^n$ nem feltétlenül!

$M \subset X$ topologikus tér részhalmaza

M k-dim sokaság, ha

$M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ (∃ nyílt lefedése)

$\forall U_\alpha$-hoz

∃ $\Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to X$ leképezés

∃ $V_\alpha \subset \mathbb{R}^k$ nyílt gömb

úgy hogy $\Phi_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha \cap X$

Φ_α egy-egy értelmű

V_α és $U_\alpha \cap X$ között.

+ kompatibilitás, Φ_α és Φ_β között, ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

vagyis

$v_1 = (a,b,c)$, $v_2 = (d,e,f)$ $\Big\} \Rightarrow T = \sqrt{\det(A^T A)}$

v_1, v_2 által kifeszített paralelogramma TERÜLETE

$$\boxed{T = \sqrt{\det(A^T A)}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|v_1\|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & \|v_2\|^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A^T A) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cos^2\theta$$
$$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2\theta)$$
$$= \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2\theta$$
$$= \|v_1\|^2 \big(\underbrace{\|v_2\| \sin\theta}_{h}\big)^2 = \|v_1\|^2 h^2 = T^2$$

(*) folyt a köv lapon

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$$\boxed{\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$$

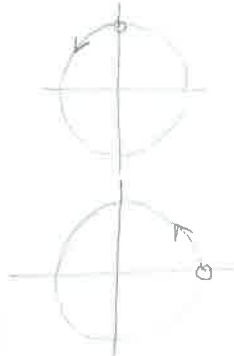
(1) (a) Síkbeli egységkör

ha $\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $\underbrace{t \in [0, 2\pi)}$ ez nem nyílt halmaz!

tehát

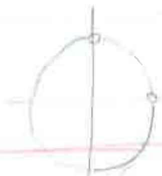
$\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $t \in (0, 2\pi)$ $\}$ V_1

$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $t \in (0, 2\pi)$ $\}$ V_2



vedd meg Φ_2^{-1}-et

$U_1 \cap U_2$:



$$t \xmapsto{\Phi_2} (\cos t, \sin t) = (-\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = \left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \pi + t\right), \cos\left(t - \tfrac{\pi}{2}\right)\right) \xmapsto{\Phi_1^{-1}} t - \tfrac{\pi}{2}$$

$f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1 \to V_2$

$\cos t = -\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$
$\sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$

másképp:

$\Phi_1(u) = (u, \sqrt{1-u^2})$ $\quad u \in (-1, 1) = V_1$ $\quad U_1$

$\Phi_2(u) = (\sqrt{1-u^2}, u)$ $\quad u \in (-1, 1) = V_2$ $\quad U_2$

$\Phi_3(u) = (u, -\sqrt{1-u^2})$ $\quad u \in (-1, 1) = V_3$ $\quad U_3$

$\Phi_4(u) = (-\sqrt{1-u^2}, u)$ $\quad u \in (-1, 1) = V_4$ $\quad U_4$

$U_3 \cap U_4$

1.(a)

Differenciálgeom I. Gyak 8

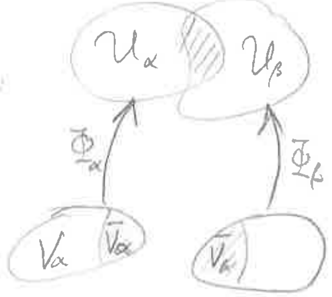
Egy általános topologikus térben adott sokaságról úgy ellenőrizzük, hogy valóban sokaság-e, hogy:

1. keressünk egy nyílt lefedését: $U_1 \cup U_2 \cup \dots$

2. keressünk (Φ_1, V_1) (Φ_2, V_2), ... úgy hogy:

$$\Phi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha \qquad V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$$

3. ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor Φ_α és Φ_β kompatibilis kell legyen, mégpedig úgy $\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha : \underbrace{\bar{V}_\alpha \longrightarrow \bar{V}_\beta}_{\text{nem ez a lényeg}}$ differenciálható! bijektív



Az összes metsző $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_j} \neq \emptyset$ kell venni

S_1 esetén $U_1, \dots U_4$ $\quad U_1 \cap U_2$, $U_2 \cap U_3$, $\underline{U_3 \cap U_4}$, $U_4 \cap U_1$

$$(\Phi_4^{-1} \circ \Phi_3)(x) =$$

$\Phi_4(u) = \left(-\sqrt{1-u^2}, u\right)$ $\Rightarrow$ Φ_4^{-1} következőképpen: $\left(-\sqrt{1-u^2}, u\right) \longmapsto u$

$\Phi_3 :$ $u \longmapsto \left(u, -\sqrt{1-u^2}\right) = \left(-\sqrt{1-t^2}, t\right) \longmapsto t = -\sqrt{1-u^2}$

$$t = -\sqrt{1-u^2}$$
$$-t = \sqrt{1-u^2}$$
$$t^2 = 1-u^2$$
$$u^2 = 1-t^2$$
$$u = \pm\sqrt{1-t^2}$$

$$\boxed{u \longmapsto -\sqrt{1-u^2}}$$

↳ differenciálható $\forall\, u \in (-1,1)$

(b) $\Phi_3(u) = \left(u, -\sqrt{1-u^2}\right)$

$\Phi_4(u) = \left(-\sqrt{1-u^2}, u\right)$ $\Bigg\}$ $\underbrace{\Phi_4^{-1}}_{???} \circ \Phi_3 = ?$

$$u \xmapsto{\Phi_3} \Big(u, \underbrace{-\sqrt{1-u^2}}_{t}\Big) = \left(-\sqrt{1-t^2}, t\right) \underset{\Phi_4}{\overset{\Phi_4^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad t = -\sqrt{1-u^2}$$

$t := -\sqrt{1-u^2}$

$t^2 = 1-u^2$

$u = \pm\sqrt{1-t^2}$

legyen $u = -\sqrt{1-t^2}$

$-\sqrt{1-(1-u^2)} = -\sqrt{u^2}$
$= -(\pm u)$

$$u \xmapsto{\Phi_3} \left(u, -\sqrt{1-u^2}\right) \xmapsto{\Phi_4^{-1}} -\sqrt{1-u^2}$$

$$\left(\Phi_4^{-1} \circ \Phi_3\right)(u) = -\sqrt{1-u^2} \longrightarrow \text{diffható, bijektív}$$

(c) görbe implicit megadása:

$g(x,y) = x^2+y^2-1$

(d) $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\Phi_1(u) = \left(u, \sqrt{1-u^2}\right) \Rightarrow \Phi_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow T_p = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{u_0}{\sqrt{1-u_0^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$T_p = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}$

ell: $(1\ \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} = 0$ ✓

② S^1-et az $\mathbb{R}^3$-ban adjuk meg, mi lesz a param. ill. impl.

$$\Phi_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi) \qquad \Rightarrow \Phi_0'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u \in (-1,1), \ldots, \Phi_4(u) = \cdot$$

Implicit: $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = (x_0, y_0, 0) \Rightarrow T_p = \left\{ \gamma \cdot \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N_p = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

③ $S^2 = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$

$\Phi_1(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \quad (u,v) \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{U}_1$ 

$\Phi_2(u,v) = \left(u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2}\right) \quad (u,v) \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{U}_2$ 

$\Phi_3(u,v) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v\right) \Rightarrow \mathcal{U}_3$ 

$$(u,v) \xmapsto{\Phi_3} \Big(u, \underbrace{\sqrt{1-u^2-v^2}}_{t}, v\Big) = \left(u, t, \sqrt{1-u^2-t^2}\right) \xmapsto{\Phi_1^{-1}} (u,t) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$t^2 = 1 - u^2 - v^2$

$v = \pm\sqrt{1-u^2-t^2}$

$$f(u,v) = \left(\Phi_1^{-1} \circ \Phi_3\right)(u,v) = \left(u, \sqrt{1-u^2-v^2}\right)$$

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{\ }} & -\frac{v}{\sqrt{\ }} \end{pmatrix}$$

Sima és bijektív!

Implicit megadás; $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

$P(x_0,y_0,z_0)$ -ban tfh $P \in S^2$

$$T_P \div D\Phi^*_{1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{\ }} & -\frac{v}{\sqrt{\ }} \end{pmatrix}\Bigg|_{x_0,y_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} & -\frac{y_0}{\sqrt{\ }} \end{pmatrix}$$

$x_0 = u \quad z_0 = \sqrt{1-x_0^2-y_0^2}$

$y_0 = v$

$$N_P : \nabla g|_P = 2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

ellenőrzés: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = x_0 - \frac{x_0 \cancel{z_0}}{\cancel{\sqrt{\ }}} = 0$ ✓

---

(4) Ekv reláció: reflexív: $a \sim a$

szim: $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$

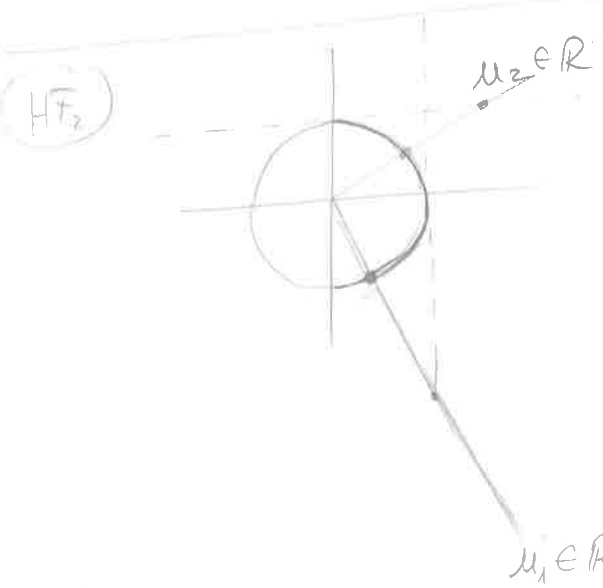
tranz: $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$

ekv. osztály: $[x] = \{ y \in \underbrace{\text{Alaphalmaz}}_{R^n_*} \mid x \sim y \}$

$R^n \setminus \{0\} / \sim$

legyen $v_1, v_2 \in R^n \setminus \{0\}$, $v_1 \sim v_2$ ha $\exists \lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ úgy. $v_1 = \lambda v$

HF2



$u \xrightarrow{\Phi_1} (u, 1) \in R^2 \Rightarrow \mathcal{U}_1$

$u \xrightarrow{\Phi_2} (1, u) \in R^2 \Rightarrow \mathcal{U}_2$

kompatibilis-e?

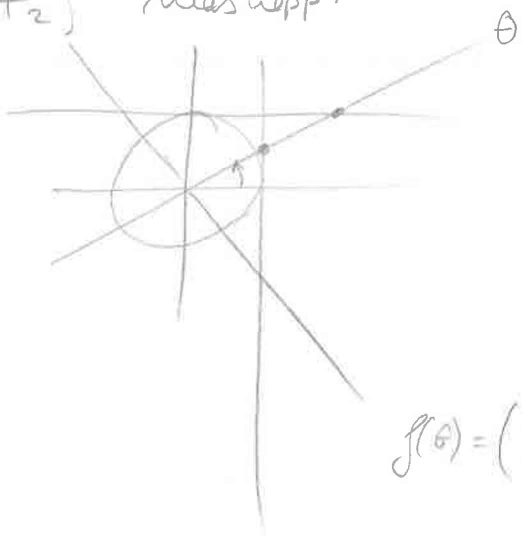
$u \xmapsto{\Phi_1} (u, 1) \sim (1, \frac{1}{u}) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$

$f(u) = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(u) = \frac{1}{u}$

$f'(u) = -\frac{1}{u^2}$

Diffgeom 1
Gyak 8

[HF$_2$] megoldás:



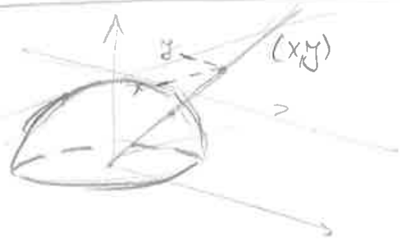
$\Phi_1(\theta) = (1, \operatorname{tg}\theta)$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Phi_2(\theta) = (\operatorname{ctg}\theta, 1)$, $\theta \in (0, \pi)$

$$\theta \xmapsto{\Phi_1} (1, \operatorname{tg}\theta) \sim \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}, 1\right) = (\operatorname{ctg}\theta, 1) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \theta$$

$f(\theta) = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(\theta) = \theta$ bijektív, sima

$f'(\theta) = 1$



$\Phi_1 : (x,y) \mapsto (x, y, 1) \Rightarrow \mathcal{U}_1$

$\Phi_2 : (x,y) \mapsto (x, 1, y) \Rightarrow \mathcal{U}_2$

$\Phi_3 : (x,y) \mapsto (1, x, y) \Rightarrow \mathcal{U}_3$

$$(x,y) \xmapsto{\Phi_1} (x, y, 1) \sim \left(\frac{x}{y}, 1, \frac{1}{y}\right) \xmapsto{\Phi_2^{-1}} \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

$f = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$; $f : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$ $f(x,y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{x}{y^2} & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{bijektív}$$

$\mathbb{P}^3$ számítógépes grafika:

$\mathbb{R}^3$-ban → forgatás mint $R\cdot v$ ✓

→ skálázás mint $R\cdot v$ ✓

→ transzláció mint $R\cdot v$ ✗

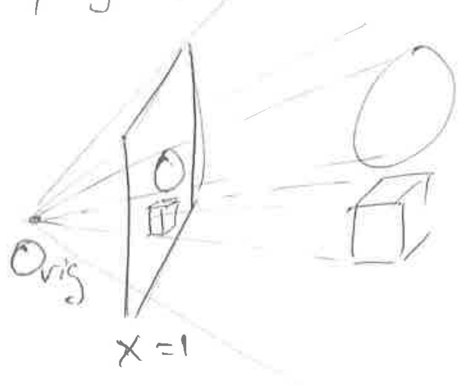
→ projektív leképezés $R\cdot v$ ✗

DE: $\mathbb{P}^3$-ban van ilyen:

$$(x,y,z) \longleftrightarrow (x,y,z,1) \sim (wx, wy, wz, w)$$

transzláció:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+a \\ z+a \\ 1 \end{pmatrix}$$

projektív leképezés:



egy $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ pontot le kell vetíteni az $x = 1$ síkra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ y/x \\ z/x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság, ha

$\forall p \in M$-hez $\exists\, \mathcal{U}$ környezet u.h.

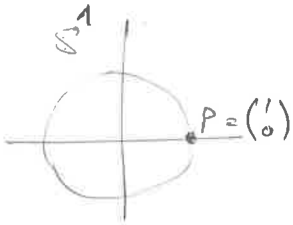
$\exists F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható és $F(V) = \mathcal{U} \cap M$

$V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz.

és DF teljes rangú
$\quad \hookrightarrow n \times k$

---

1 pld S^1



$F(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad DF(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$t \in (-\pi, \pi)$ $\quad k=1$- dim. sokaság az $\mathbb{R}^2$-ben

3 pld:

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ $\quad DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ teljes rangú

Sokaság lezárása (topológiai értelemben)

Def $\overline{M} = \{ x \in \mathbb{R}^n \;\; \exists (x_j) \subset M, \lim_{j \to \infty} x_j = x \}$

Def $\partial M = \overline{M} \setminus M$

A sokaság mindig nyílt halmaz (a határokon)

Áll ha M k-dim sokaság
akkor ∂M vagy $k-1$ dim. sokaság
vagy $\emptyset$

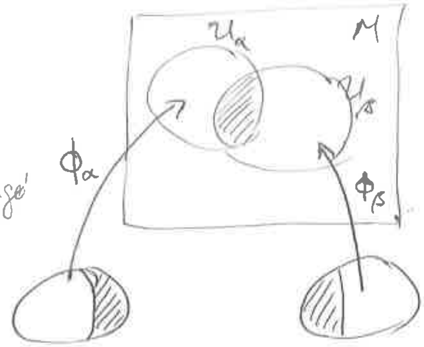
Def (kibővített def)

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság ha $\exists\, U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazok (lefedés)

u.h. $\forall p \in M$ $\exists\, U_\alpha$ u.h. $p \in U_\alpha$

$\forall \alpha$-hoz $\exists\, \Phi_\alpha$ $\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt u.h. Φ_α egy-egyértelmű, diffható

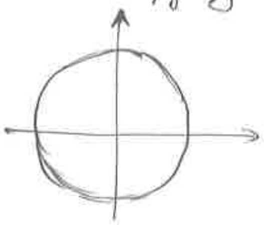
$\Phi_\beta^{-1}\Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ legyen diffható és Jac. teljes rangú



Def (U_α, Φ_α) lokális térkép

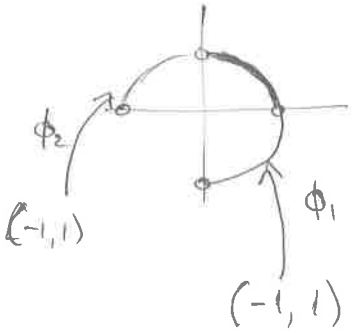
$\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ atlasz

Pld S^1 egység körvonal



U_1 :  $\Phi_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ $\Phi_1(u) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix}$

U_2 :  $\Phi_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ $\Phi_2(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}$



$U_1 \cap U_2$: 

$$\Phi_2^{-1}\Phi_1(u) = \Phi_2^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix} = \sqrt{1-u^2}$$

ősképek metszete: $(0,1)$

$$u \xmapsto{\Phi_2} \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2} \end{pmatrix}$$

legyen $u = \sqrt{1-v^2}$ akkor $\begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ \sqrt{1-\sqrt{1-v^2}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ v \end{pmatrix}$

$$\sqrt{1-v^2} \xmapsto{\Phi_2} \begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2} \\ v \end{pmatrix}$$

Def (implicit megadás)

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim diffható sokaság, ha $\exists\ f_1, \dots, f_{n-k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható fv-ek

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0 \}$$

továbbá ~~hogy~~ a gradiensek ldu függetlenek, azaz $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{pmatrix}$ Df teljes rangú.

Pld: $\{ f_1(x,y,z) = 0 \} \cap \{ f_2(x,y,z) = 0 \} \leftarrow$ görbe

2017b

Sokaságok | 4. ea tanal3

DIFFGEO 1 | −3

Analízis III. 5. heti feladatok
2017. október 12.

Sokaság. Explicit és implicit megadás $\mathbb{R}^n$-ben. Érintő tér. Normál tér.

1 (*Részben ismétlés, órai anyag volt*) Lássuk be hogy S^1 (a síkbeli az egységkör) egydimenziós sokaság

(a) Írjuk fel parametrikus megadását a megfelelő térképgyűjteménnyel

(b) Igazoljuk ezek kompatibilitását

(c) Mi lesz a görbe implicit megadása?

(d) Írjuk fel a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontbeli érintőteret illetve a normálteret

2 Ha S^1-t az $\mathbb{R}^3$ térben adjuk meg akkor mi lesz ennek a parametrikus illetve implicit megadása? Ha $p \in \mathbb{R}^3$ $p = (x_0, y_0, z_0)$ Mi lesz $T_p =$? $N_p =$?

3 Igazoljuk hogy az egységgömb felülete $\mathbb{R}^3$-ban két-dimenziós sokaság

$$S^2 = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

A sokaság paraméteres megadását mutassa meg megfelelő térképgyűjtemény segítségével Mi lesz a sokaság implicit megadása? Határozzuk meg a felület egy tetszőleges $p = (x_0, y_0, z_0)$ pontjában az N_p normál teret és a T_p érintő teret

|HF| 4 Legyen M az az origó középpontú ellipszis a síkon melynek egyik tengelye az x egyenesen 4 egység hosszú másik tengelye az y egyenesen egységnyi hosszú

(a) Igazolja hogy ez egy-dimenziós sokaság a síkon használja mindkét definíciót

(b) Adja meg egy tetszőleges pontjában a normál teret és a tangens teret

5 Igazoljuk hogy $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$-ban a $\sim$ reláció valóban ekvivalencia reláció

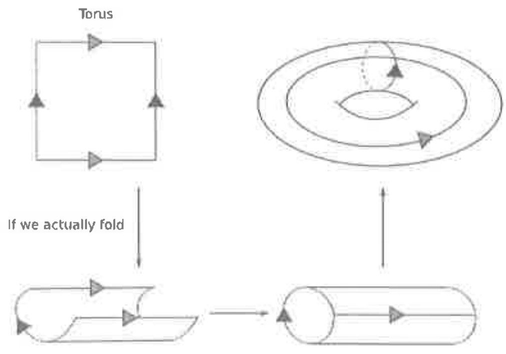
6 Igazoljuk hogy a valós projektív sík $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim$ egy-dimenziós sokaság (Ez a p 143 9 feladat $n = 1$ esetben)

7 Igazoljuk hogy a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

gyakorló 8 (p 113 Theorem 6 1 1 speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ illetve az őket tartalmazó mátrix $A = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ Lássuk be hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $T = \sqrt{\det (A^T A)}$

D5* (p 143 8 feladat) Igazoljuk hogy a tórusz két-dimenziós sokaság Adjuk meg egy lehetséges paraméterezését



Ennek meg tudjátok-e adni a paraméterezését!

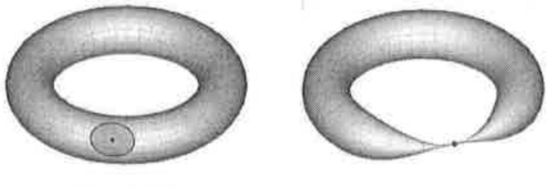


Figure 1 Sokaság definíciójának értelmezése ellenpélda

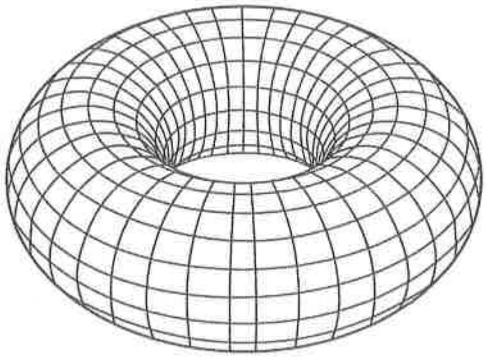


Figure 2 A tórusznak mint 2D sokaságnak a lokális koordinátatengelyei

Def 2.16. M egy k dim. sokaság,

ha $\exists\ M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$ nyílt lefedése, melyre:

I $\forall\ \mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists\ \Phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to M$

és $\exists\ V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt s.t. $\Phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$ egy-egy értelmű

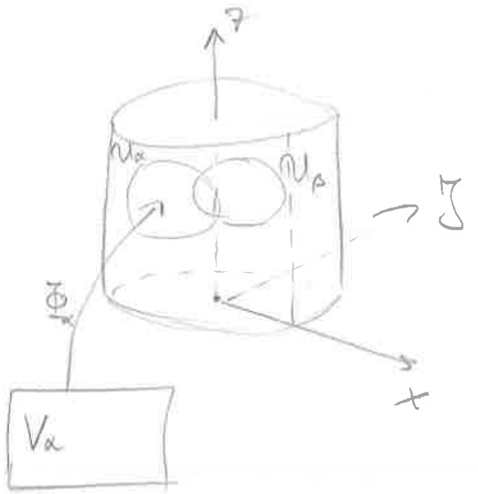
vagyis Φ_α bijekció V_α és $\mathcal{U}_\alpha$ között

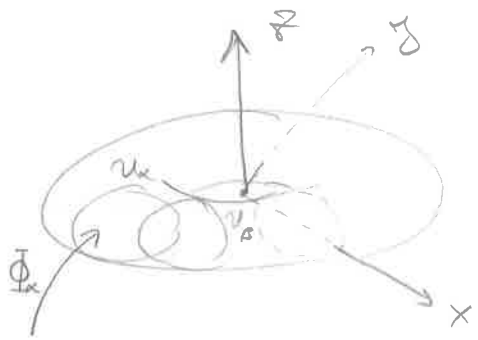
II $\forall\ \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ -ra

$f_{\alpha\beta} := \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ egy-egy értelmű
diffható
$\Delta f_{\alpha\beta}$ teljes rangú

akkor $V_{\beta\alpha} = \Phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

$V_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$





$$\Phi_\alpha = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\theta, z) \xmapsto{\Phi_\alpha} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$V_\alpha = (0, 2\pi) \times (0, h)$$

Def (Sokaság param. megadása)

alapeset.

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság ha $\forall p \in M$ $\exists\, \mathcal{U}$ környezete melyre: $\exists F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható és DF teljes rangú

$\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt $F(V) = \mathcal{U} \cap M$ egy-egy ért.

lokális paraméterezése

Def (Sokaság param. megadás, ált. eset)

2.1.6

$$M = \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \qquad \mathcal{U}_\alpha \text{ nyílt halmazok.}$$

M egy k-dim sokaság

I Ha $\forall\, \mathcal{U}_\alpha$-hoz $\exists\, \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \to M$ ú.h.

1° ϕ_α diffható és $D\phi_\alpha$ teljes rangú

2° $\exists V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz ú.h. $\phi_\alpha(V_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$

3° ϕ_α bijekció V_α és $\mathcal{U}_\alpha$

param. megadás,

II Ha $\forall\, \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ -ra:

$\phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$ -ra diffható egy-egy ért. leképezés

ahol $V_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

$V_{\beta\alpha} = \phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$

komp.

2017b

elmélet 3

DIFFGEO 1

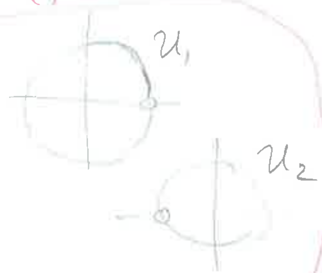
gyak 5

① SÍKBELI EGYSÉGKÖR – PARAM megoldása

a) I

$V_1 = (0, 2\pi) \qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$V_2 = (\pi, 3\pi) \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$



b) kompatibilitás:

$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 =$ 

$V_{12} = (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$

$V_{21} = (\pi, 3\pi) \setminus \{2\pi\}$

$$t \xmapsto{\phi_1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \xrightarrow{\phi_2^{-1}} \begin{cases} t + 2\pi & \text{ha } t \in (0,\pi) \\ t & \text{ha } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \in V_{21}$$

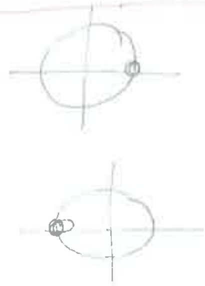
diffható

$$(\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(t) = \phi_2^{-1}(\phi_1(t)) = \begin{cases} t + 2\pi & \text{ha } t \in (0,\pi) \\ t & \text{ha } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

a) II

$V_1 = (0, 2\pi) \qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$V_2 = (0, 2\pi) \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \end{pmatrix}$



b) kompatibilitás

$$t \xmapsto{\phi_1} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t-\pi+\pi) \\ \sin(t-\pi+\pi) \end{pmatrix} \underset{\phi_2^{-1}}{\overset{\phi_2}{\rightleftarrows}} t-\pi, \ \mod 2\pi$$

$$(\phi_2^{-1} \circ \phi_1)(t) = \phi_2^{-1}(\phi_1(t)) = \begin{cases} t+\pi & \text{ha } t < \pi \\ t-\pi & \text{ha } t > \pi \end{cases}$$

III

$V_1 = (-1, 1) \qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$

$V_2 = (-1, 1) \qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$

$V_3 = (-1, 1) \qquad \phi_3(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix}$

$V_4 = (-1, 1) \qquad \phi_4(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$

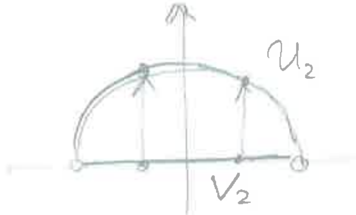
S_1

DIFFGEO 1

2017b
hét 3
gyak 5

b) Kompatibilitás

$U_2 \cap U_3 =$ 



$\phi_2^{-1}(U_2 \cap U_3) = (-1, 0)$

$\phi_3^{-1}(U_2 \cap U_3) = (0, 1)$

$$t \overset{\phi_2}{\longmapsto} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \underset{\text{ezért } u=\sqrt{1-t^2}}{\overset{\text{jel } t:=\sqrt{1-u^2}}{=\!=\!=}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ u \end{pmatrix} \overset{\phi_3^{-1}}{\longmapsto} u = -\sqrt{1-t^2}$$

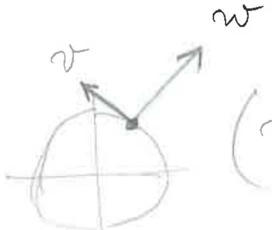
tehát

$$\underset{(0,1)}{\underset{\Uparrow}{t}} \overset{\phi_3^{-1} \circ \phi_2}{\longmapsto} \underset{(-1,0)}{\underset{\Uparrow}{-\sqrt{1-t^2}}}$$

c) Implicit megoldás:

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2+y^2-1}_{g(x,y)} = 0\}$$

d) érintőtér $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-ben



(U_1, ϕ_1)

$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$\dot{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\phi}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = v$

normáltér: $\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\nabla g(P) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} \\ 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot 2 = w$

$T_P = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$N_P = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta \in \mathbb{R} \right\}$

② S_1 az $\mathbb{R}^3$-ben

$V_1 = (0, 2\pi)$ $\qquad \phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

(pont nem az, de mindegy)

$V_2 = (0, 2\pi)$ $\qquad \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t+\pi) \\ \sin(t+\pi) \\ 0 \end{pmatrix}$

Implicit megadás:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f_1(x,y,z) = x^2+y^2+1 = 0 \\ f_2(x,y,z) = z = 0 \end{array} \right\}$$

Érintő tér:

$$\dot\phi_1(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normáltér: $\; Df_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Df_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

S_1 az $\mathbb{R}^3$-ban

2017b

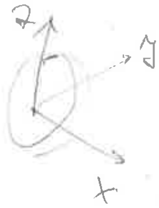
DIFFGEO 1

Anal 3 gyak 5

③ S_2 az $\mathbb{R}^3$-ban EGYSÉGGÖMB

$$V_1 = (-1,1)^2 \qquad \phi_1(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$$

$$V_2 = (-1,1)^2 \qquad \phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \\ v \end{pmatrix}$$ stb.



Implicit megadás:

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \right\}$$

$$T_p: \quad (u_0, v_0) = \phi_i^{-1}(x_0, y_0, z_0)$$

$$T_p = \left\{ \alpha_1 \, \phi'_{i\,u}(u_0,v_0) + \alpha_2 \phi'_{i\,v}(u_0,v_0) \;\middle|\; (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \to 2 \text{ dim}$$

$$N_p = \left\{ \beta_1 \cdot \nabla g_1(x_0,y_0,z_0) \;\middle|\; \beta_1 \in \mathbb{R} \right\} \to 1 \text{ dim}$$

S_2

2017b

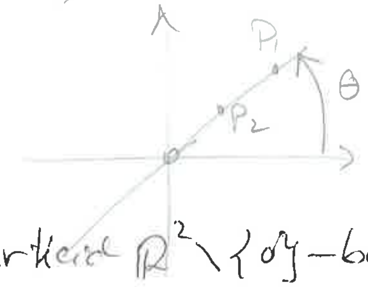
DIFFGEO 1

Anal 3
gyak 5

⑤,⑥ Projektív sík

Ekv. rel: $a \sim a$
$a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$
$a \sim b$ és $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Legyen $\sim$ reláció a köv.:
$r_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ pont $\sim$ $r_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ -vel, ha
$\exists\ \lambda \neq 0$ u.h.



$[r_1] := \left\{ r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \sim r_1 \right\} \leftarrow$ partíció $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-ban

↳ ez megadja $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-nak egy partícionálását

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \overset{\text{jel}}{=} \mathbb{R}^2_{\pm}$

~~tehát $\mathbb{R}^2_{\pm}$~~

legyen $P_1 = \{ [r] \mid r \in \mathbb{R}^2_{\pm} \} \overset{\text{jel}}{=} \mathbb{R}^2/_{\sim}$ $\not\subset \mathbb{R}^2$

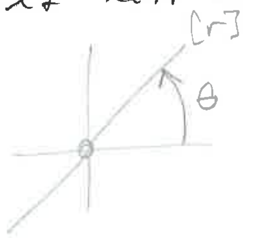
DE P_1 1D. sok.

↳ ekvivalencia osztályok halmaza

⑥ Igazoljuk, hogy P_1 1D sokaság

P_1 minden elemét lehet azonosítani egy számmal

ez lesz a lokális koordináta



legyen $[r] \in P_1$ azonosítója θ

legyen $r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ ez egy olyan pont, ami $\in [r]$

Ugyanakkor kellene egy pont $\mathbb{R}^2$-ban és ami reprezentálja $[r]$-et $\mathbb{R}^2$-ben

$V_1 = (0, \pi)$ $\qquad \phi_1(\theta) = \left[\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right] \in P_1$

↳ itt ϕ_1 nem difftható a felsorolás értelmében

$V_2 = (0, \pi)$ $\qquad \phi_2(\theta) = \left[\begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \right] \in P_1$

P_1 ④

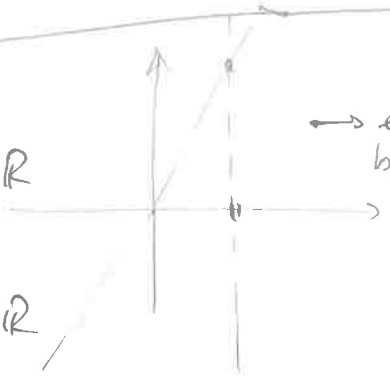
DIFFGEO 1

2017 b
hal 3
gyak 5

$$\theta \xmapsto{\phi_1} \left[\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\\ \sin(\theta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\phi_2^{-1}} \theta-\frac{\pi}{2} \quad \text{mod } \pi$$

Másképp :

$$\mathcal{U}_1 := \left\{[r]\in P_1 \;\middle|\; r=\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right\}, V_1=\mathbb{R}$$



→ ebbe nincs benne a $\left[\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right]$

$$\mathcal{U}_2 := \left\{[r]\in P_1 \;\middle|\; r=\begin{pmatrix}u\\ 1\end{pmatrix}\right\}, V_2=\mathbb{R}$$

u : lokális koordináta

$u \xmapsto{\phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right]$ ez lesz az ekvivalenciaosztály generátor eleme

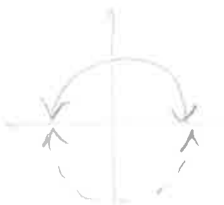
$u \xmapsto{\phi_2} \left[\begin{pmatrix}u\\ 1\end{pmatrix}\right]$ $\quad \phi_1 : \mathbb{R}^1 \to P_1 \not\subset \mathbb{R}^2$

$$u \xmapsto{\phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{u}\\ 1\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$$

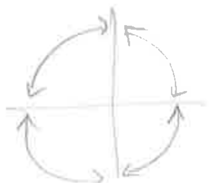
Itt más fontos az őskép is!

$\mathcal{U}_1$:

$\mathcal{U}_2$:



$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$:



csak a koordinátatengelyeknek megfelelő nincs benne

$$\phi_1^{-1}(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\phi_2^{-1}(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

tehát van értelme annak, hogy:

$$u \xmapsto{\phi_1} \left[\begin{pmatrix}1\\ u\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\frac{1}{u}\\ 1\end{pmatrix}\right] \xmapsto{\phi_2^{-1}} \frac{1}{u}$$

$f(u) = \phi_2^{-1}(\phi_1(u)) = \frac{1}{u}$ diffható $\forall\, u\in\mathbb{R}_\pm$

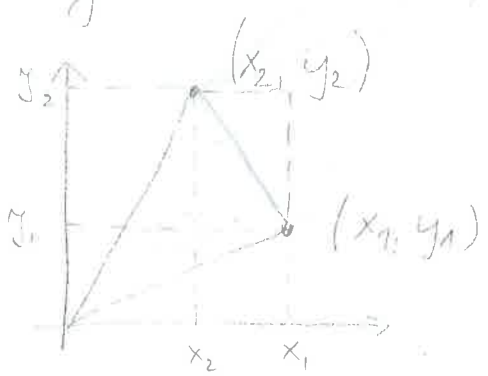
$$x_1 y_2 - \frac{x_2 y_2}{2} - \frac{x_1 y_1}{2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2x_1 y_2 - x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_1 + x_2 y_2\right) = \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

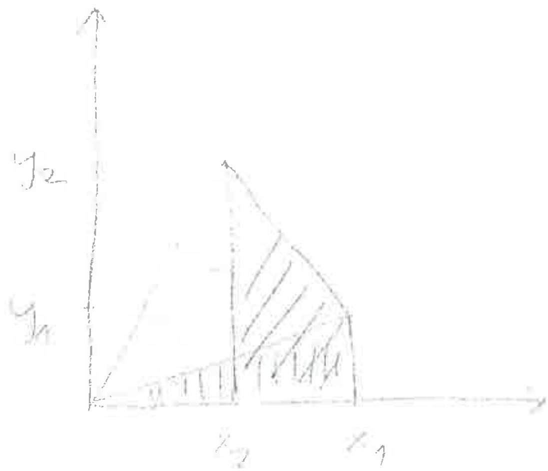
Tfh a pontok helyzete ilyen

$x_2 < x_1$

$y_1 < y_2$



A fél paralelogramma területét bontsuk ki:



$T_1 =$  trapéz

$$\frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_1 - x_2)$$

$T_2 =$  háromszög

$$\frac{x_2 \cdot y_2}{2}$$

$T_3 =$  háromszög

$$\frac{x_1 \cdot y_1}{2}$$

$$T = T_1 + T_2 - T_3 = \frac{1}{2}\left(x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_2 y_2 - x_1 y_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

(1)

$$2 \cdot T_1 = y_1 \cdot x_1$$

$$2 \cdot T_2 = y_2 \cdot x_2$$

$$2 \cdot T_3 = (x_2 - x_1)(y_1 - y_2)$$

$$2 \cdot T = 2 \cdot x_2 y_1$$

$$\begin{aligned} T_x &= 2x_2 y_1 \cancel{- x_1 y_1} - \cancel{x_2 y_2} - x_2 y_1 - x_1 y_2 \\ &\quad + \cancel{x_2 y_2} + \cancel{x_1 y_1} \\ &= x_2 y_1 - x_1 y_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$A = (v \; w)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} v^T \\ w^T \end{pmatrix} (v \; w) = \begin{pmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \|v\|^2 & \|v\| \cdot \|w\| \cos\alpha \\ \|v\| \|w\| \cos\alpha & \|w\|^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2\alpha \\ &= \|w\|^2 \cdot \|v\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin\alpha} \Rightarrow \sqrt{\det(A^T A)} = \|v\| \cdot \|w\| \sin\alpha \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j (v_1, v_2) &= dx_i(v_1)\, dx_j(v_2) - dx_i(v_2)\, dx_j(v_1) = \\ &= -\big(dx_j(v_1)\, dx_i(v_2) - dx_j(v_2)\, dx_i(v_1) \big) = \\ &= -\, dx_j \wedge dx_i \, (v_1, v_2) \end{aligned}$$

DIFF GEOM 1

Elena Luna García
CBQVW5

Exercise 4

$y = (y_n) \to$ complex-valued w.s.st process with autocovariance function $r^y(\cdot)$. Show that the matrix $R = (R_{k,\ell})$ defined by $R_{k,\ell} = r^y(\ell - k)$ $\quad k, \ell = 1, \dots, p$ is a Hermitian, positive, semi-definite matrix $\to$ Toeplitz.

- condition for Hermitian: $A = \overline{A^T}$

for complex w.s.st processes we have:

$$r(\tau) = r^y(\tau) = \overline{r(-\tau)}$$

so, $R_{k,\ell} = r^y(\ell - k) = \overline{r^y(k-\ell)} = \overline{R_{\ell,k}}$ $\to$ Hermitian ✓

- condition for positive semi-definite: $\bar{a} A a > 0 \ \forall a \neq 0$

so $\bar{a}^T R a = \bar{a}^T E(\bar{Y} Y^T) a = E\, \bar{a}^T (\bar{Y} Y^T) a = E(\overline{a^T Y})(a^T Y)^T > 0 \to$ ✓

- $R_{k,\ell}$ only depends on $\ell - k$ so we can consider it a Toeplitz ✓

Computer Controlled Systems

1st midterm test

2017. 10. 19.

theoretical questions (25 points)

(The answers can be given in Hungarian)

1. Define the exponential function e^{At} of a square matrix A using power series. Give an explicit formula to compute e^{At} analytically (not only approximately). (5p)

2. Define the impulse response function h of a SISO linear time invariant (LTI) system. How can we compute h from the matrices (A, B, C) of a state space model? (5p)

3. When do we call an LTI system BIBO stable? What is the necessary and sufficient condition for BIBO stability? (5p)

4. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be a positive definite symmetric matrix. Can A have complex conjugate eigenvalues? Does there exist an invertible transformation matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, such that $\bar{A} = TAT^{-1}$ is a stability matrix? Justify your answers! (5p)

5. Define the notion of observability of a state space model (A, B, C). Define the unobservable subspace of (A, B, C). Determine the unobservabe subspace of the following second order LTI system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{22}x_2 + b_2 u \qquad\qquad (5p) \\ y &= c_2 x_2 \qquad\qquad c_2 \neq 0 \end{aligned}$$

I $S: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^3$

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \qquad \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = ?$$

II $x^2+y^2=4$ h. palást $z\in[0,2]$ (felül zárt) alul nyitott

$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = ?$$

6

$\omega = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2$

$\eta = b_1\, dx_1 + b_2\, dx_2$

szem. be: $\omega \wedge \eta = \det(A)\, dx_1 \wedge dx_2$

Analízis III. 6. heti feladatok
2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$
2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:
$$v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 2}. \tag{2}$$
Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

HF 3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:
$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = -\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_i \tag{3}$$
5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$.
(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)
6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = \mathrm{d}x_2$ és $\tau = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.
7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$\mathrm{d}x_i \wedge (\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_k) = (\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j) \wedge \mathrm{d}x_k$$
8. Definíció 2.2.6. (jegyzet 37. old) szerint számoljuk ki a $\mathrm{d}x_{13} \wedge x_4(A) := (\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3) \wedge \mathrm{d}x_4(A)$-t, ha:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

9. Határozzuk meg $\mathrm{d}\omega$-t és $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)$-t az alábbi formákra:
(a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1 x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1 \mathrm{d}x_1 + x_2 \mathrm{d}x_2$ (c) $\omega_3 = x_1 x_2 x_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3$.

HF 10. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f\mathrm{d}x_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

11. Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

Analízis III. 6. heti feladatok
2017. október 19.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

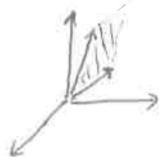
1. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|.$$

2. (Részben az órai anyag speciális esete) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, és az őket tartalmazó mátrix:

$v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}.$$



Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$.

3. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

banális!

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i .$$

$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \cancel{\wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4}$.
~~(Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)~~ (OK marad)

6. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban az $\omega \wedge \tau$ külső szorzást, ha $\omega = dx_2$ és $\tau = dx_1 \wedge dx_3$.

7. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k .$$

(+) → $dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)(A) = \ldots = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$

Differenciál formák. Külső deriválás.

8. Határozzuk meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

(a) $\omega_1 = e^{x_1} \cos(x_1 x_2)$ (b) $\omega_2 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$ (c) $\omega_3 = x_1 x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_3$.

9. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor

$$\omega = f dx_1,$$

$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 = \ldots$

ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $d(d\omega) = 0$.

10. (HF) Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

(5)

$$(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) =$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 +$$

$$+ dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

$$= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (-1)^{?} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

$\{3,4,1,2\}$ permutáció inverzióinak száma)

$3412 \to 3142 \to 1342 \to 1324$

$\to 1234$

OK! Példa olyan $\omega \neq 0$-ra, amikor $\omega \wedge \omega \neq 0$

$$(dx_1 + dx_2)(dx_1 + dx_2) =$$

$$= dx_1 \wedge dx_1 + dx_1 \wedge dx_2 +$$

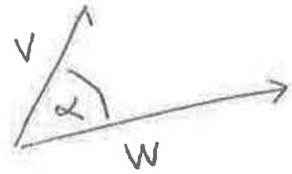
$$+ dx_2 \wedge dx_1 + dx_2 \wedge dx_2 = \emptyset!$$

Példa

3. $A = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ $\qquad v, w \in \mathbb{R}^n$

$A =$ 

$$A^T A = \begin{bmatrix} v^T v & v^T w \\ w^T v & w^T w \end{bmatrix}$$



$$v^T v = \|v\|^2$$

$$v^T w = \langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\alpha$$

$$w^T v = \langle w, v \rangle = \quad \text{—"—}$$

$$w^T w = \|w\|^2$$

$$\det(A^T A) = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \left(\|w\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha\right)^2 =$$

$$= \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\alpha)}_{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det(A^T A)} = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\alpha$$

4. $dx_i \wedge dx_j \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix} = dx_i(v) \cdot dx_j(w) - dx_i(w)\, dx_j(v) = (*)$

$dx_i(v) = v_i$, stb...

$= v_i w_j - w_i v_j$

$dx_j \wedge dx_i = \ldots$ épp fordított előjellel ugyanaz

7.

$$dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_2) = dx_2 \wedge (-dx_2 \wedge dx_1) =$$

$$= -(dx_2 \wedge dx_2) \wedge dx_1 = 0$$

($\Rightarrow$ " átrendezhető, csoportosítható ")

8. $dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k)\,(A) = ?$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{n \times 3}$

$\cancel{A = (v \,\vdots\, w_1 w_2) = (*)}$ $\qquad A = (v \,\vdots\, u w) = I$

(*)

$\{1,2,3\}$ permutációk	inverziók száma	/ összegben + vagy −
$\{1 \vdots 2, 3\}$	0	+
$\{1 \vdots 3, 2\}$	1	−
$\{2 \vdots 1 3\}$	1	−
$\{2 \vdots 3 1\}$	2	+
$\{3 \vdots 2 1\}$	1	−
$\{3 \vdots 1 2\}$	2	+

$\cancel{(*) = v_i \cdot u_j w_k - v_i u_k w_j + v_j u_i w_k}$

(*) Speciális / $\boxed{\text{egyszerűbb jelölések}}$ $\qquad i=1,\ j=2,\ k=3$

$$dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3)\,(v \,\vdots\, u w) =$$

$$= v_1 u_2 w_3 - v_1 u_3 w_2 - v_2 u_1 w_3 + v_2 u_3 w_1 - v_3 u_2 w_1 + v_3 u_1 w_2$$

$$dx_2 \wedge dx_3\,(u\ w) = \begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_2 w_3 - u_3 w_2$$

$$= v_1 \underbrace{\left(u_2 w_3 - u_3 w_2\right)}_{\begin{vmatrix} u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}} - v_2 \underbrace{\left(\ldots \right)}_{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_3 & w_3 \end{vmatrix}} + w_3 \underbrace{\left(\qquad \right)}_{\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & w_1 \\ v_2 & u_2 & w_2 \\ v_3 & u_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

A másik forma hasonlóképp számolható.

$$\left(dx_1 \wedge dx_2 \right) \wedge dx_3 \underbrace{\left(v \; u \;\vdots\; w \right)}_{\text{ennek a megoldása lesz másképp}}$$

$\Longrightarrow$ az eredmény ugyanaz lesz.

Forms World Party

October 17, 2011

nD-ben elemi k formák

$\Re^n$-ben $I = (i_1, i_2, ..., i_k)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n)$ $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$ nD-s k-forma k db vektor által kifeszített paralelepipedont (k = 1 : szakasz, k = 2 : paralelogramma, k= 3 : sima paralelepipedon...) levetít a forma által kijelölt k db bázisvektor által kifeszített térre, és megmondja a "térfogatát". Pl. az $I = (1, 2)$ $dx_I(u, v) = dx_1 \wedge dx_2(u, v)$ az $\bar{u}$ és $\bar{v}$ vektorok által 3D-ben kifeszített paralelogramma xy síkba vetített képének területét adja. dx_i az i. koordinátát. 0 formák a valós számok.
számolva: k db nD-s oszlopvektort mátrixba pakolsz, majd a forma által kijelölt sorokból legyártott determinánst kiszámolod: $dx_I(A) = det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix}$ ahol A_{i_k} -k A sorai pl.:

$$I = (1, 3, 4) \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad dx_I(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

nD-ben elemi k formából $\binom{n}{k}$ db van (n db bázisból k-t ennyi képpen tudsz kiválasztani. ezek az nD-s k formák $\binom{n}{k}$ D-s lineáris terének bázisai: $\bigwedge^k(\Re^n)$)

Ék szorzat

τ és ω k és l formák, $A = (A_1, A_2, ..., A_k, ..., A_{k+l})$ N*(k+l)-es mátrix, szorzatuk (k+l)-forma:

$$\tau \wedge \omega(A) = \Sigma_{\sigma \in S(k,l)} (-1)^{sign(\sigma)} \tau(A_{\sigma(1)} ... A_{\sigma(k)}) \omega(A_{\sigma(k+1)} ... A_{\sigma(k+l)})$$

jelmagyarázat:

- σ : egy permutáció (1, 2, 3, ... k+l számsor összekeverve)
- $sign(\sigma)$: a permutáció paritása: páros vagy páratlan számcserével lehet-e elérni az eredeti állapotot (ps : 0, ptl : 1 pl.: $\sigma = (2\ 1\ 3)$ akkor $sign(\sigma) = 1$, mert 1 cserével megoldható. A (2 3 1) -nek már 0 lenne, mert 2 csere kell)
- $\sigma(i)$: az eredeti sorrendből i hova került (pl.: $\sigma = (2\ 1\ 3)$ -ban $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$)
- S(k,l) : (1 ... k+l) olyan permutációi, amikre $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots\ \sigma(k)$ és $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$ (pl.: (4 1 5 2 3) $\in$ S(3,2) mert $\sigma(1) = 2 < \sigma(2) = 4 < \sigma(3) = 5$ és $\sigma(3+1) = 1 < \sigma(3+2) = 3$)
- $\sigma \in S(k,l)$: minden olyan permutáció, ami tudja a fenti trükköt
- $A_{\sigma(i)}$: az aktuális permutációban az i helye által kijelölt oszlopa A-nak (szal ha $\sigma(i) = j$, akkor $A_{\sigma(i)}$ A j. oszlopa)
- $\tau(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k)})$ a τ formába beletesszük a permutáció σ-i által kijelölt oszlopokat

+

Pl.:

$$\boxed{dx_{(1,3)} \wedge dx_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ 7 & 1 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

ahol $\tau = dx_{(1,3)}$ és $\omega = dx_4$

Ez $\Re^4$-ben egy 2- és egy 1-forma szorzata. A permutációk:

miért nem inkább −1 ?

			$\sigma(1)$	$\gtrless$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$sign(\sigma)$	$\in S(2,1)$?
1	2	3	1	$<$	2	3	0	✓
1	3	2	1	$<$	3	2	1	✓
2	1	3	2	$>$	1	3	1	∅
2	3	1	3	$>$	1	2	0	∅
3	1	2	2	$<$	3	1	0	✓
3	2	1	3	$>$	2	1	1	∅

itt csak azon permutációkat tekintjük melyekre $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ (implicit benne van az $\frac{1}{k!}$-al való szorzás)

Most vesszük a ✓-t permutációkat, a paritásukból eldöntjük az előjelet, majd a σ-ik által kijelölt oszlopokat odaadjuk a formáknak:

$$dx_{(1,3)} \wedge dx_4(A) = \tau(A_1A_2)\omega(A_3) - \tau(A_1A_3)\omega(A_2) + \tau(A_2A_3)\omega(A_1)$$

emlékeztető:

$$\tau(A_1A_3) = \tau\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = dx_{(1,3)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 14$$

$$\omega(A_3) = dx_4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 7$$

így:

$$dx_{(1,3)} \wedge dx_4(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \cdot 7 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \cdot 1 + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot -4$$

Tanulságok

1. 1 formákra az ék szorzat antikommutatív:

$$dx_i \wedge dx_j(A) = dx_i(A_1)dx_j(A_2) - dx_i(A_2)dx_j(A_1) = A_{i1} \cdot A_{j2} - A_{i2} \cdot A_{j1} =$$

$$= -(A_{j1} \cdot A_{i2} - A_{j2} \cdot A_{i1}) = -(dx_j(A_1)dx_i(A_2) - dx_j(A_2)dx_i(A_1)) = -(dx_j \wedge dx_i(A))$$

2. általában: $\tau \wedge \omega = (-1)^{kl}\omega \wedge \tau$
Ha visszagondoltok a képletre, abban csak ω-t és τ-t megcserélitek, ami a hozzátartozó permutációban is kicseréli a megfelelő tagokat (gyakorlatilag eltolja az egészet). Ez l elem k-val arrébb tolása, ami $k \cdot l$ csere, így a paritás is ennyivel változik. (szal ha k és l páros, akkor megcserélheted, ha az egyik páratlan, akkor előjelet vált)

3. $\tau \wedge \tau = (-1)^{kk}\tau \wedge \tau$ vagyis ha τ páratlan forma, az önmagával vett szorzata 0 (a=-a $\Leftrightarrow$ a=0). Így $dx_i \wedge dx_i = 0$

4. Ha összeszorzol k db 1-formát a képletbe behelyettesítve látható, hogy a forma által kijelölt sorok-ból összerakott determináns képletét kapjuk, ami ugyanaz, ahogy az elején megmondtuk hogy számolunk k-formákat. Innen a képlet:
$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Analízis III. 5. heti feladatok
2014. október 13.

Ismétlés: Sokaság irányítása = "érintőterek irányítása". 135. oldal, 6.5.3. fejezet.

1. Igazoljuk, hogy a vektortér irányítását definiáló reláció valóban ekvivalencia-reláció.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke.

2. Igazoljuk, hogy a $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe

$$T = \left| \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{matrix} \right|.$$

3. (Részben az órai anyag folytatása. A 113. oldalon Theorem 6.1.1. speciális esete.) Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor, illetve az őket tartalmazó mátrix:

1

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \qquad A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n \times 2}.$$

Lássuk be, hogy az általuk kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$. (≡ átforgatható)

2 4. Mennyi a $v = (1, 2, 3)$ és $w = (3, 2, 1)$ vektorok áltak kifeszített paralelogramma területe?

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

5. Igazoljuk, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus:

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

6. (HF) Igazoljuk, hogy az 1 - formák külső szorzata antiszimmetrikus: ha $\tau, \omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $\omega \wedge \tau = -\tau \wedge \omega$.

7. (HF) Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_3$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$

HF 4

8. Végezzük el $\mathbb{R}^3$-ban a következő külső szorzást: $\omega = dx_2, \tau = dx_1 \wedge dx_2$ esetén $\omega \wedge \tau = ?$ (Javaslat: használjuk a külső szorzat asszociativitását, és antiszimmetriáját 1-formák esetén.)

9. Igazolja, hogy az elemi 1 - formák külső szorzata asszociatív:

$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

Differenciál formák. Külső deriválás.

10. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

5

$$\omega = e^x \cos(y),$$
$$\omega = x dx + y dy,$$
$$\omega = xyz\ dx \wedge dz$$

3 Példa arra, hogy $\omega \wedge \omega \neq 0$.

(*) $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ $\qquad \omega \wedge \omega = ?$

9. hét

Analízis III. 6. heti feladatok

2015. október 16.

Differenciál formák. Külső deriválás.

1. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \qquad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

7

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

ω és τ külső szorzata $\boxed{\omega \wedge \tau}$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

8

2. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega_1 = e^x \cos(xy), \qquad \omega_2 = x dx + y dy, \qquad \omega_3 = xyz\ dx \wedge dz.$$

HF

3. (HF) (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx$, ahol f kétszer differenciálható 2 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$. $\mathbb{R}^3$-ben

$d\omega = \sum f'_{x_i} dx_i \wedge dx_j$

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x,y,z)\ dx \wedge dy$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\ (u, v, \varphi(u,v)) : (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega =?$

5. (HF) Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\ dx + f_2(x,y,z)\ dy + f_3(x,y,z)\ dz$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega =?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek

6. Igazolja, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, \varphi(u,v))\ :\ (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

7. Igazolja, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\ (u, v, z)\ :\ b(u,v) \le z \le t(u,v),\ \ (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

5 (15M)

+ Vektormezők $\longleftrightarrow$ Formák

+ deriválás $\longleftrightarrow$ külső deriválás

$\omega = f dx + g dy + h dz \longleftrightarrow \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

9. hét

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \longrightarrow v = v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k} \in \mathbb{R}^3$ ~~$V = \{(v_1, v_2, v_3)\ v_1 i + v_2 j + v_3 \in \mathbb{R}^3$ melyre~~

van $+$: assoc
comm.
egységelem
ellentett elem
skalárszorzat : - lineáris
- egységelem.

ha $p = x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5}$
↳ ez egy vektortér a $\mathbb{Q}$ fölött
Egyértelmű $a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{5} =$
$b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{5}$
ez csak akkor teljesül,
ha $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

↳ $p = 0 \iff x = 0$
$y = 0$
$z = 0$

$p \in V = \{x\sqrt{2} + y\sqrt{3} + z\sqrt{5} \mid (x, y, z) \in \mathbb{Q}^3\}$

~~$\omega = f dx + g dy + h dz$~~

$\omega_1 = a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz$

$\omega_2 = a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz$

$(\omega_1 + \omega_2) + \omega_3 = \omega_1 + (\omega_2 + \omega_3)$

$\omega_1 + \omega_2 = (a_1 + a_2) dx + (b_1 + b_2) dy + (c_1 + c_2) dz$

Az n-dim-s k formák vektorteret alkotnak: $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Bázis: elemi k-formák

$dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$

ált: $\tau \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot l} \lambda \wedge \tau$

$\omega \wedge (\lambda \wedge \tau) = (\omega \wedge \lambda) \wedge \tau$

$\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$

$T_2(\omega \wedge \tau) = T_1(\omega) \times T_1(\tau)$

$\omega \in \Lambda^0,\ \omega = f$ akkor $T_1(d\omega) = \text{grad } T_0(\omega) = \text{grad } f$

$\omega \in \Lambda^1,\ \omega = f dx + g dy + h dz$
$T_2(d\omega) = \text{rot } T_1(\omega)$

$\omega \in \Lambda^2,\ \omega = f dy dz + g dz dx + h dx dy$
$T_3(d\omega) = \text{div } T_2(\omega)$

Legyen $\mathbb{F}$ egy test $(\mathbb{F}, +, \cdot)$. V lineáris vektortér $\mathbb{F}$ felett, ha
- $\forall u, v \in V$-re $\exists!\ w \in V$: $w = u + v$ (4 axióma)
- skalárszorzat (4 axióma)

Differenciál formák

Jacobi determináns :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(\Phi(u,v))\left(\phi'_{1u}\,du + \phi'_{1v}\,dv\right)\wedge\left(\phi'_{2u}\,du + \phi'_{2v}\,dv\right) =$$

$$x = \phi_1(u,v)$$

$$y = \phi_2(u,v)$$

$$dx = \phi'_{1u}\,du + \phi'_{2v}\,dv$$

$$dy = \phi'_{2u}\,du + \phi'_{2v}\,dv$$

$$= \iint_R f(\phi(u,v))\left(\phi'_{1u}\phi'_{2v}\,du\,dv + \phi'_{1v}\phi'_{2u}\,dv\,du\right) =$$

$$= \iint_R f(\phi)\ \det(D\phi)\,du\,dv$$

$$D \ni (x,y) \Rightarrow R \ni (u,v)$$

$\mathbb{R}^n$-ben $\quad x_i = \phi_i(u)$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} dx_i = \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \phi'_{i u_j}\cdot du_j\right) = \left[\sum_{\sigma\in S_n}\left(\prod_{i=1}^{n}\phi'_{i;u_{\sigma_i}}\right)\cdot(-1)^{\varepsilon(\sigma)}\right]\bigwedge_{i=1}^{n} u_i$$

$$\iint F(x,y,z)\,d\underline{S} = \iint F(x,y,z)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$\int_\Gamma f(x,y)\,dl = \int_\Gamma f(x,y)\sqrt{dx^2+dy^2}$$

6. Igazoljuk, hogy az elemi 1 formák $\wedge$ szorzata asszoc. vagyis $dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$

Def: $(\tau \wedge \lambda)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \cdot \lambda(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}})$

vagyis $[(dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k]_{(v_1, v_2, v_3)} = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^{|\sigma|} (dx_i \wedge dx_j)(v_{\sigma_1}, v_{\sigma_2}) \cdot v_{3\sigma_3}$

$$\sigma \in (1\ 2 | 3) \to + \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} v_{33}$$
$$(2\ 1 | 3) \to - \begin{vmatrix} v_{12} & v_{22} \\ v_{11} & v_{21} \end{vmatrix} v_{33}$$
$$(1\ 3 | 2) \to - \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix} v_{32}$$
$$(3\ 1 | 2) \to + \begin{vmatrix} v_{13} & v_{23} \\ v_{11} & v_{21} \end{vmatrix} v_{32}$$
$$(2\ 3 | 1) \to + \begin{vmatrix} v_{12} & v_{22} \\ v_{13} & v_{23} \end{vmatrix} v_{31}$$
$$(3\ 2 | 1) \to - \begin{vmatrix} v_{13} & v_{23} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} v_{31}$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{vmatrix}$$

vagy $\sigma \in S_{k+l}$ DE $\cdot \frac{1}{k!\,l!}$

Fontos

$(\tau \wedge \lambda)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S(k,l)} (-1)^{|\sigma|} \tau(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \cdot \lambda(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}})$

$\tau \in \Lambda^k$, $\lambda \in \Lambda^l$

$\sigma \in S(k,l)$ ha $\sigma \in S_{k+l}$ és $\sigma_1 < \dots < \sigma_k$ és $\sigma_{k+1} < \dots < \sigma_{k+l}$

+ Asszociativitás!

Él szorzat DEF

2018b

Elemi formulák :

(3) $(dx_1 \wedge dx_2) + (dx_3 \wedge dx_4) = \omega$

$\omega \wedge \omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2$

$= 2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$

(4) $\omega = dx_2 \quad \eta = dx_1 \wedge dx_2$

$\omega \wedge \eta = dx_2 \wedge (dx_1 \wedge dx_2) \underset{\text{anti komm.}}{=} -dx_2 \wedge (dx_2 \wedge dx_1) \underset{\text{asszoc}}{=} -\underbrace{(dx_2 \wedge dx_2)}_{=0} \wedge dx_1$

(5) (a) $d\omega_1 = d(e^x \cos(xy)) = e^x(\cos(xy) - y\sin(xy))\,dx - xe^x \sin(xy)\,dy$

(b) $d\omega_2 = d(x\,dx + y\,dy) = \cancel{x'_x\, dx \wedge dx} + x'_y\, dy \wedge dx + y'_x\, dx \wedge dy + y'_y\, dy \wedge dy$

$= 0$

(c) $d\omega_3 = d(xyz\, dx \wedge dz) = yz\, dx \wedge dx \wedge dz + xz\, dy \wedge dx \wedge dz + xy\, dz \wedge dx \wedge dz$

$= -xz\, dx \wedge dy \wedge dz$

(I) legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \implies df = \underbrace{f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz}_{} = \langle \operatorname{grad} f, de \rangle$

olyan mintha az lenne,
hogy $f'_x \underline{i} + f'_y \underline{j} + f'_z \underline{k}$

(II) legyen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad d(\langle F, de \rangle) = d(f\,dx + g\,dy + h\,dz) =$

$=$

Differenciál formák

$$e^x \approx T_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$(ai + bj + ck) \times (ei + fj + gk) =$$

$$= \cancel{ae\, i \times i} + af\, i \times j + ag\, i \times k +$$

$$+ ba\, j \times i + \cancel{bf\, j \times j} + bg\, j \times k +$$

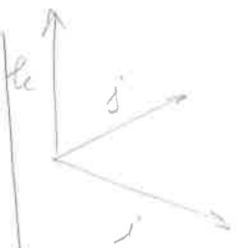
$$ce\, k \times i + cf\, k \times j + \cancel{cg\, k \times k} =$$

$$= (af - ba)(i \times j)$$

$$+ (ag - ce)(i \times k)$$

$$+ (bg - cf)(j \times k) = \begin{vmatrix} b & f \\ c & g \end{vmatrix} (j \times k)$$

$i \times j = k$	$j \times k$	$dy \wedge dz$
$j \times k = i$	$k \times i$	$dz \wedge dx$
$k \times i = j$	$i \times j$	$dx \wedge dy$



$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$$ ugyanúgy az $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázist alkot az $\mathbb{R}^3$-ban!

Ugyanígy dx, dy, dz bázist alkot az $\mathbb{R}^3$-ban

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\wedge$ vs. $\times$

A $\wedge$ szorzat a vektoriális szorzat általánosítása

$v = (v_1 \; v_2 \; v_3) \qquad u = (u_1 \; u_2 \; u_3)$

$$u \times v = (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k}) \times (v_1 \underline{i} + v_2 \underline{j} + v_3 \underline{k}) =$$

$$= u_1 v_2 \, i \times j + u_1 v_3 \, i \times k$$
$$+ u_2 v_1 \, j \times i + \qquad + u_2 v_3 \, j \times k$$
$$+ \qquad + u_3 v_1 \, k \times i + u_3 v_2 \, k \times j =$$

$\underline{i} \times \underline{i} = 0$

$\underline{j} \times \underline{j} = 0$

$\underline{k} \times \underline{k} = 0$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)(j \times k) \longrightarrow i$$
$$+ (u_3 v_1 - u_1 v_3)(k \times i) \longrightarrow j$$
$$+ (u_1 v_2 - u_2 v_1)(i \times j) \longrightarrow k$$

éppen ezért $\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} = d\underline{S}$

tehát van $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $F = (f_1, f_2, f_3)$

$$\langle F, dl \rangle = f_1 \, dx + f_2 \, dy + f_3 \, dz$$

$$d(\langle F, dl \rangle) = \cancel{f'_{1x} \, dx \wedge dx} + f'_{1y} \, dy \wedge dx + f'_{1z} \, dz \wedge dx$$
$$+ f'_{2x} \, dx \wedge dy + \cancel{f'_{2y} \, dy \wedge dy} + f'_{2z} \, dz \wedge dy$$
$$\ldots \quad f'_{3y} \, dy \wedge d \qquad =$$

$$= (f'_{2x} - f'_{1y}) \, dx\,dy$$
$$(f'_{1z} - f'_{3x}) \, dz\,dx$$
$$(f'_{3y} - f'_{2z}) \, dy\,dz = (\operatorname{rot} F) \cdot \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$\wedge$ vs. $\times$

dS

$$S(u,u) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix} \qquad d\underline{S} = \left(S'_u \times S'_v \right) d(u,v) =$$

$$= R \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(u,u) =$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} d(u,u)$$

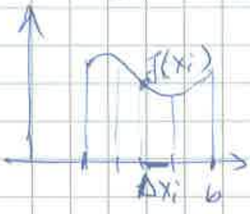
$$\left.\begin{array}{l} d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} \\ x(u,u) = R\cos u \implies \begin{array}{l} dx = -R\sin u\,du \\ dy = R\cos u\,du \\ dz = dv \end{array} \end{array}\right\} \implies d\underline{S} = \begin{pmatrix} R\cos u\,du\,dv \\ dv(-R\sin u)\,du \\ (-R\sin u\,du)(R\cos u\,du) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R\cos u\,du\,dv \\ R\sin u\,du\,dv \\ -R^2\sin u\cos u\,\cancel{du\,du} \end{pmatrix} =$$

$$= R \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} du\,dv$$

differenciál formák értelmezése

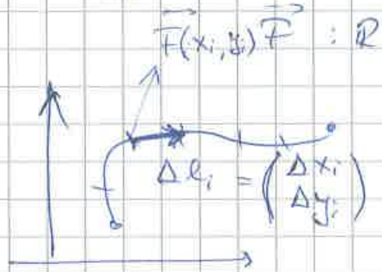
① Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$



$$T \simeq \sum_i f(x_i)\,\Delta x_i \xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{} \int_a^b f(x)\,dx$$

② Legyen $\gamma = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b] \}$

$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

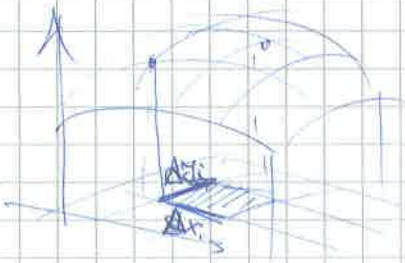


$$W \simeq \sum_i \left\langle \vec{F}(x_i, y_i), \Delta l_i \right\rangle = \sum_i f\Delta x_i + g\Delta y_i$$

határátmenetben:

$$\int_\gamma \underbrace{f(x,y)\,dx}_{\text{hossz}} + \underbrace{g(x,y)\,dy}_{\text{hossz}}$$

③ Kettős integrál



$$V \simeq \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$\Leftarrow \iint f(x,y)\,\underbrace{dx \wedge dy}_{\text{terület}}$$

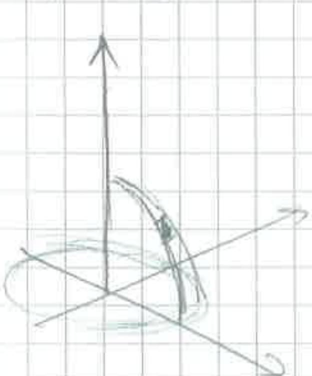
④ Felületi integrál

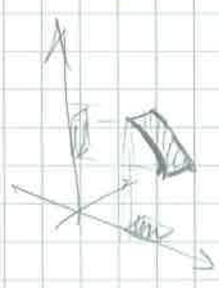
$x = \cos\theta \sin\varphi$
$y = \sin\theta \sin\varphi$
$z = \cos\varphi$

$\Delta x = -\sin\theta \sin\varphi\,\Delta\theta + \cos\theta\cos\varphi\,\Delta\varphi$

$\Delta y = \cos\theta \sin\varphi\,\Delta\theta + \sin\theta\cos\varphi\,\Delta\varphi$

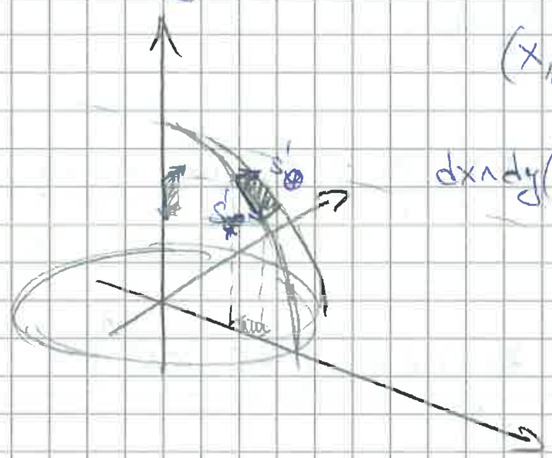
$\vec{F}_i := \vec{F}(x_i, y_i, z_i)$





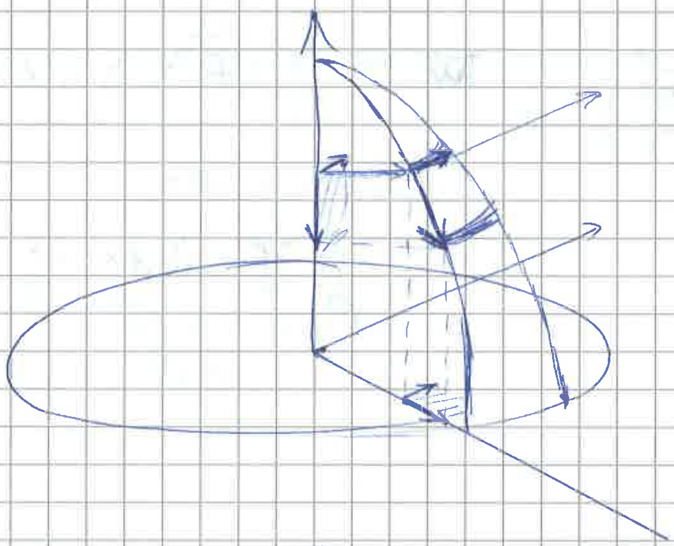
2018b
Magyarász

ha van egy felület darabkán



(x,y)-ra vett vetülete területe:

$$dx \wedge dy\left(S'_\theta, S'_\varphi\right) = \begin{vmatrix} S'_{1\theta} & S'_{1\varphi} \\ S'_{2\theta} & S'_{2\varphi} \end{vmatrix}$$



$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_R \langle \vec{F}(S(\theta,\varphi)), \underbrace{S'_\theta \times S'_\varphi}_{\text{területvektor}} \rangle \, d(\theta,\varphi)$$

↳ a területvektor x irányú komponense a terület yz vetül

Analízis III. 6. heti feladatok

2018. október 15.

Előkészület a formákhoz: paralelogrammák mértéke (ismetlés)

1. Igazoljuk, hogy a síkon a $v_1 = (x_1, y_1)$ és $v_2 = (x_2, y_2)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe
$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2. Adott $\mathbb{R}^n$-ben két vektor $v, w \in \mathbb{R}^n$. Lássuk be, hogy a v és w által kifeszített paralelogramma területe $\sqrt{\det A^T A}$, ahol A a két vektort tartalmazó mátrix, $A = (v\ w) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$

3. Mennyi a $v = (1, 0, 1)$ és $w = (0, 1, 0)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe? Látjuk-e ezt szemléletesen is?

• egyes integrál
• vonal integrál
• kettős felületi integrál

formák
↳ hossz, T
↳ függvény
↳ vektor

Elemi formák. Formák. Külső szorzat.

4. Igazoljuk, hogy az 1-formák külső szorzata antiszimmetrikus. Ezért $\omega \wedge \omega = 0$, ha $\omega \in \bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$.

   Segítség: lássuk be, hogy az *elemi 1-formák* külső szorzata antiszimmetrikus:
$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

5. Végezzük el $\mathbb{R}^4$-ben a következő külső szorzást: $\omega \wedge \omega$, ahol $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$. (Figyelem: $\omega \wedge \omega \neq 0$)

6. Igazoljuk, hogy az elemi 1-formák külső szorzata asszociatív:
$$dx_i \wedge (dx_j \wedge dx_k) = (dx_i \wedge dx_j) \wedge dx_k$$

[HF$_1$] Adott $\mathbb{R}^2$-ben két 1-forma: $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2$, $\tau = b_1 dx_1 + b_2 dx_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy $\omega \wedge \tau = D \cdot dx_1 \wedge dx_2$, ahol $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

   (a) Mi lehet a hasonló állítás $\mathbb{R}^3$-ban ill. $\mathbb{R}^n$-ben?

   (b) Mi van a 'háttér'-ben?

Differenciál formák. Külső deriválás.

• error propagation

7. Határozzuk meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

   (a) $\omega_1 = e^{x_1}\cos(x_1 x_2)$ (b) $\cancel{\omega_2 = x_1 dx_1 + x_2 dx_2}$ (c) $\omega_3 = x_1 x_2 x_3\, dx_1 \wedge dx_3$.

   $\omega = f dx + g dy + h dz$

8. Igazoljuk a Poincaré lemmát $\mathbb{R}^n$-ben abban a speciális esetben, amikor
$$\omega = f dx_1,$$
ahol f kétszer differenciálható, n változós függvény: Lássuk be, hogy ekkor $d(d\omega) = 0$.

[HF$_2$] Igazoljuk a Poincarré lemmát abban az esetben, ha $\omega = f(x_1, x_2, x_3)$ differenciál 0-forma $\mathbb{R}^3$-ban.

Error propagation :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad S_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \quad ; \quad \delta x := x - \bar{x}$$

$x = f(u, v, \dots)$ csak u, v-t tudjuk mérni, x-et nem!

$$\boxed{\delta x = \delta u \frac{\partial x}{\partial u} + \delta v \frac{\partial x}{\partial v} + \dots}$$

$$S_x^2 = \sum_{i,j} S^2_{u_i u_j} \frac{\partial x}{\partial u_j}\frac{\partial x}{\partial u_i} \quad , \quad S^2_{u_i u_j} = \underbrace{\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(u_{ik}-\bar{u}_i)(u_{jk}-\bar{u}_j)}_{=0 \text{ ha uncorrelated!}}$$

$$= \sum_i S^2_{u_i}\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 \quad \text{ha}$$

$$s(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} \qquad s'_\theta = \begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0\end{pmatrix}\cdot \sin\varphi$$

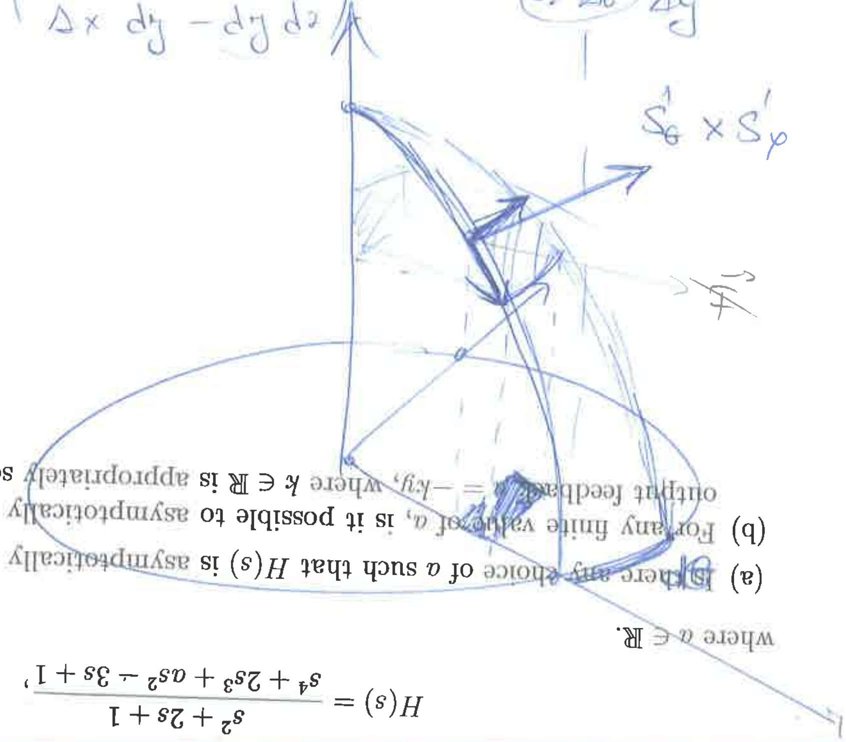
$$s'_\theta \Delta\theta \times s'_\varphi \Delta\varphi$$

$$\begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta y \Delta z - dz\,dy \\ \Delta z\,dx - dx\,dz \\ \Delta x\,dy - dy\,dx\end{pmatrix}$$

$(s'_\theta \Delta\theta)\Delta x$

$(s'_\theta \Delta\theta)\Delta y$

$s'_\theta \times s'_\varphi$



$$H(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^4+2s^3+as^2-3s+1},$$

where $a \in \mathbb{R}$.

(a) Is there any choice of a such that $H(s)$ is asymptotically stable? Why? (2p)

(b) For any finite value of a, is it possible to asymptotically stabilize $H(s)$ by a linear output feedback $u = -ky$, where $k \in \mathbb{R}$ is appropriately selected? Why? (3p)

rror propagation

pld:

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

meg ahogyan adni úgy paraméterezéssel $(u,v)\in D$

$$\left.\begin{aligned} u' &= u+v \\ v' &= u-v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(u'+v') \\ v &= \tfrac{1}{2}(+u'-v') \end{aligned}}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det = -1-1=-2 \checkmark$$

$$E = \langle r'_u, r'_u \rangle = \|(-R\sin u, R\cos u, 0)\| = R^2$$

$$F = \cancel{2}\langle r'_u, r'_v \rangle = (-R\sin u, R\cos u, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$G = 1$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftarrow \text{ez egy tenzor}$$

Pirossal tintázva!

$$\vec{a} \quad a = a_1 r'_u + a_2 r'_v$$

$$\Downarrow$$

$$a \cdot b = [a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

1. Az erdő fokán [illegible]

2. Ház rajzolása [illegible] mellette az erdő

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = r(u,v) \Bigg\} \Rightarrow$$

legyen $t \in (a, b)$

$r(u(t), v(t)) \longrightarrow$ ez egy görbe

$$\int_\Gamma dl = \int_\Gamma \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{} =$$

$$dx = x'_u\, du + x'_v\, dv = x'_u\, u'\, dt + x'_v\, v'\, dt$$

$$dx^2 = (x'_u u' + x'_v v')^2\, dt^2$$

$$= \int_a^b \sqrt{(x'_u u' + x'_v v')^2 + (y'_u u' + y'_v v')^2 + }\, dt$$

$$dl = \| dr(u,v) \| = \| r'_u\, du + r'_v\, dv \| =$$

$$= \| r'_u u' + r'_v v' \|\, dt = \sqrt{u'^2 \langle r'_u, r'_u \rangle + 2u'v' \langle r'_u, r'_v \rangle }\, dt$$

Reimann metrikus tenzor

Legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v \end{pmatrix}$ „henger"

Meg akarjuk adni más paraméterezéssel:

$$\begin{cases} u' = u+v \\ v' = u-v \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} u &= \tfrac{1}{2}(u'+v') \\ v &= \tfrac{1}{2}(u'-v') \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det = -2 \checkmark$$

↳ mire is jó ez nekünk pontosan?

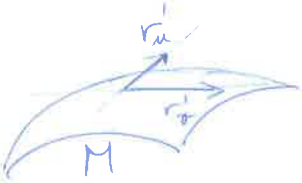
$$\left.\begin{aligned} E &= \langle r'_u, r'_u \rangle = R^2 \\ F &= \langle r'_u, r'_v \rangle = 0 \\ G &= \langle r'_v, r'_v \rangle = 1 \end{aligned}\right\}$$

Reimann metrikus tenzor:

$$G = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Két vektor skalárszorzata: $a_M = a_1 r'_u + a_2 r'_v$ $\quad \vec{a}_M = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$b_M = b_1 r'_u + b_2 r'_v$



$$a \circ b = a_1 \langle r'_u, r'_u \rangle b_1 + a_1 \langle r'_u, r'_v \rangle b_2 + \ldots$$

$$= (a_1 \;\; a_2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{a}_M^{\,T} G_M \vec{b}_M$$

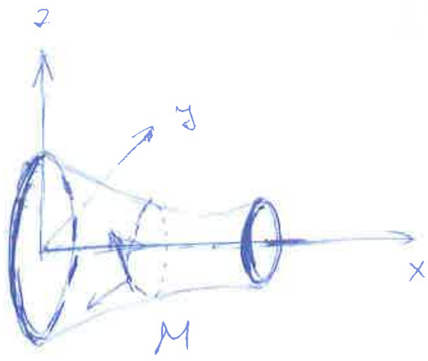
A tangenstér tulajdonképpen az a világ amelyben az adott görbült tér lakói lakenak

A normáltér az a világ amelyet az adott görbült tér lakói NEM látnak, nem tudnak elképzelni

Reimann m. tenzor,
Hipertér, görbült t...

Tehát a szög két érintő vektor között:

$$\boxed{\langle \vec{a}_M, \vec{b}_M \rangle_M = \vec{a}_M^{\,T}\, \underbrace{G_M}_{\text{metrikus tenzor}}\, \vec{b}_M}$$



Legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ f(u)\cos v \\ f(u)\sin v \end{pmatrix}$

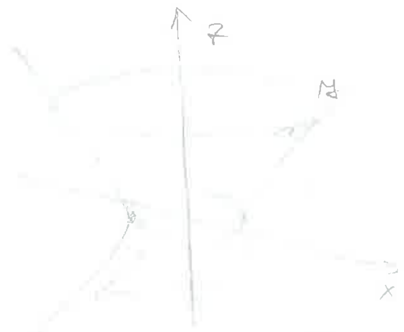
$$r'_u = \begin{pmatrix} 1 & f'(u)\cos v & f'(u)\sin v \end{pmatrix}^T$$

$$r'_v = \begin{pmatrix} 0 & -f(u)\sin v & f(u)\cos v \end{pmatrix}^T$$

$$G_M(u,v) = \begin{pmatrix} 1+f'^2(u) & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall (u,v) \in D\text{-re}$$

Legyen egy hiperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$x^2 + y^2 = 1 + z^2$



$$r(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2}\cos v \\ \sqrt{1+u^2}\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$r'_u = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v & \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin v & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$r'_v = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+u^2}\sin v & \sqrt{1+u^2}\cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_M = \begin{pmatrix} \frac{1+2u^2}{1+u^2} & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix} > 0 \quad \forall u,v \in D\text{-re}$$

Lehet, hogy nem is ez a metrikus tenzor? Bár valahol írják, hogy a Riemann féle m. tenzor csak pozitív lehet!

legyen $r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ legyen $t \in (a,b)$

$r(u(t), v(t))$ az egy görbe

Ennek hossza: $\int_r \|d\underline{r}\| = \int_r \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = (*)$

$$dx = x'_u \, du + x'_v \, dv = x'_u \, u' \, dt + x'_v \, v' \, dt$$

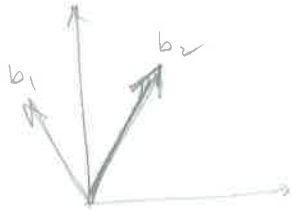
$$dx^2 = (x'_u u' + x'_v v')^2 \, dt^2$$

$$(*) = \int_a^b \sqrt{(x'_u u' + x'_v v')^2 + (y'_u u' + y'_v v')^2 + (z'_u u' + z'_v v')^2} \, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{u'^2 \langle r'_u, r'_u \rangle + 2u'v' \langle r'_u, r'_v \rangle + v'^2 \langle r'_v, r'_v \rangle} \, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(u' \;\; v') \, G_M \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}} \, dt$$

Amúgy vehetünk két egymásra nem merőleges bázist, és akkor definiálunk egy új teret:



ugyanúgy: $(a_1 \;\; a_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \langle \vec{a}_B, \vec{b}_B \rangle_B$

metrikus tenz…
görbült tér

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; u irány szerinti deriválja: $\langle \text{grad } f, u \rangle = \left[\frac{d}{d\alpha} f(v + \alpha u)\right]_{\alpha=0}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \implies \frac{\partial f}{\partial v} \cdot u = \left[\frac{d}{d\alpha} f(v + \alpha u)\right]_{\alpha = 0}$

$$\langle v_1 \wedge v_2 , w_1 \wedge w_2 \rangle = \begin{vmatrix} \langle v_1, w_1 \rangle & \langle v_1, w_2 \rangle \\ \langle v_2, w_1 \rangle & \langle v_2, w_2 \rangle \end{vmatrix} \to \text{exterior algebra!}$$

Inner product: $u^i v_i = \underline{u} \cdot \underline{v}$

Cross product: $\underline{u} \times \underline{v} = \varepsilon^i_{jk} u^j v^k e_i = \sum_{j,k} \varepsilon^i_{jk} u^j v^k e_i$

$\varepsilon^i_{jk} = \delta^{il} \underbrace{\varepsilon_{ljk}}$

↳ Levi-Civita symbol
sign of a permutation

$\varepsilon_{\dots i_p \dots i_q \dots} = - \varepsilon_{\dots i_q \dots i_p \dots}$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = (1,2) \\ -1 & (i,j) = (2,1) \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Matrix mult.: $C^i_k = A^i_j B^j_k$

Trace of A^i_j : A^i_i

Outer product: $A^i_j = u^i v_j = (uv)^i_j$

$j = 1: \sum_{j,k} \varepsilon^1_{jk} u^j v^k e_1 =$

$= \varepsilon^1_{23} u^2 v^3 e_1 + \varepsilon^1_{32} u^3 v^2 e_1$

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - u^3 v^2 \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

$\varepsilon^2_{13} = \delta^{2l} \varepsilon_{l13} = \delta^{22} \varepsilon_{213} = \varepsilon_{213}$

Raising index: $T^\alpha_\beta \implies T^{\mu\alpha} = g^{\mu\sigma} T_\sigma^\alpha$ } Ez már magas TODO: metric tensor

lowering

Einstein notation

Jacobi identity:

$$a\times(b\times c) + b\times(c\times a) + c\times(a\times b) = 0$$

Ha van nekem:

$$(u_1 e_1 + u_2 e_2)\wedge(v_1 e_1 + v_2 e_2) = \cancel{u_1 v_1 e_{11}} + u_1 v_2 e_{12}$$
$$u_2 v_1 e_{21} + \cancel{u_2 v_2 e_{22}}$$
$$= (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_{12}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 \end{pmatrix} \end{array}}$$

↳ Tensor product

$$\boxed{(u\cdot v^T) = (v\cdot u^T)^T}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 \\ v_2 u_1 & v_2 u_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bivector}} 1 \text{ dim}$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{bivector}} 3 \text{ dim}$$

$$\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\text{bivector}} 6 \text{ dim}$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{bivector}} \binom{n}{2} \text{ dim}$$

$$\boxed{\mathbb{R}^n \xrightarrow{k\text{-vector}} \binom{n}{k} \text{ dim}}$$

Bivector ≡ skew symmetric matrix.

Lie algebra:

$$[x,y] = xy - yx$$

↳ bilinear

↳ $[x,x]=0$: „alternativity"

↳ Jacobi identity

↳ anticommutative

Heisenberg algebra

$$[x,y] =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{x} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{y} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{z}$$

Bivector:

$$\boxed{\begin{aligned} a\wedge b &= \tfrac{1}{2}(ab - ba) \text{ ext.} \\ a\cdot b &= \tfrac{1}{2}(ab + ba) \text{ inl} \end{aligned}}$$

$$a\cdot b + a\wedge b = ab$$

„The exterior product of two vectors is a bivector"

Jelölés: $B = e_1\wedge e_2 = e_1 e_2 = e_{12}$

pld: $C = e_{12} + e_{34}$ nem írható fel két vector ∧ szorzatakén

Einstein notation

Maxwell egyenletek a „space-time"-ban: $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\oint_{\partial\Omega} E\,dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\Omega} \rho\,dV \qquad \nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{\partial\Omega} B\,dS = 0 \qquad \nabla B = 0$$

$$\oint_{\partial\Sigma} E\,dl = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B\,dS \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} B\,dl = \mu_0 \iint_{\Sigma} J\,dS + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E\,dS \qquad \nabla \times B = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

ϕ → scalar potential

$$B = \nabla \times A$$

A → vector potential

Másik forma:

$$\oint_{\partial\Omega} E\,dS = 4\pi \iiint_{V} \rho\,dV \qquad \nabla E = 4\pi \rho$$

$$\oint_{\partial\Omega} B\,dS = 0 \qquad \nabla B = 0$$

$$\oint_{\partial\Sigma} E\,dl = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B\,dS \qquad \nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_{\partial\Sigma} B\,dl = \frac{1}{c} \left[4\pi \iint_{\Sigma} J\,dS + \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} E\,dS \right] \qquad \nabla \times B = \frac{1}{c} \left(4\pi J + \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

electric, magnetic bivector: $\boxed{\bar{E}, \bar{B} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{3,1})}$

$$\mathbb{F} = \frac{1}{c} \bar{E} e_4 + \bar{B} e_{123} = \text{Electromagnetic tenzor!}$$

$$\mathbb{J} = \underbrace{\bar{j}}_{\text{current density}} + c \underbrace{\rho}_{\text{charge density}} e_4 = \text{4-current}$$

$$\nabla M = \nabla \cdot M + \nabla \wedge M = \text{„div + rot" bivektorosan}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial_t}{c}, \vec{\nabla}\right) = \partial_\mu = {}_{,\mu}$$ } covariant

$$\partial^\alpha = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial_t}{c}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z\right)$$ } contravariant

$$\partial^\mu \partial_\mu = \underbrace{g^{\mu\nu}}_{\text{inverse Minkowski metric}} \partial_\nu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$ => hullám operátor!

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu$$

SR : special rel

GR : general rel.

$$(ai + bj + ck) \wedge (ei + fj + gk) = \begin{pmatrix} 0 & af - be & ag - ce \\ & 0 & bg - cf \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Einstein notation

(+1) $S = S(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ $\omega = f\,dx\,dy + g\,dy\,dz + h\,dx\,dz$

$\int_S \omega = ?$ $= \iint_S (g,-h,f)\,dS$

$dS = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$

Analízis III. 6. heti feladatok

2015. október 16.

Differenciál formák. Külső deriválás.

1. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \qquad \tau = g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz.$$

Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:

$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$

ω és τ külső szorzata $\omega \wedge \tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

2. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:

$$\omega_1 = e^x \cos(xy), \qquad \omega_2 = x dx + y dy, \qquad \omega_3 = xyz\; dx \wedge dz.$$

3. (HF) (Poincaré lemma speciális eset) Ha $\omega = f dx_1$, ahol f kétszer differenciálható 2 változós függvény, akkor lássuk be, hogy $d(d\omega) = 0$.

Integrálás sokaságokon.

(1) 4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 2-forma $\omega = f(x,y,z)\; dx \wedge dy$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:

$$M = \{\; (u, v, \varphi(u,v)) \;:\; (u,v) \in R\}, \qquad R \subset \mathbb{R}^2.$$

Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \; \omega = ?$

(2) 5. (HF) Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\; dx + f_2(x,y,z)\; dy + f_3(x,y,z)\; dz$. Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 1 dimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \; \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek

(6) 6. Igazolja, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\; (u, v, \varphi(u,v)) \;:\; (u,v) \in R\}$, $R \subset \mathbb{R}^2$.)

(5) 7. Igazolja, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.

(Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\; (u, v, z) \;:\; b(u,v) \le z \le t(u,v), \;\; (u,v) \in R\}$, egy normáltartomány az $R \subset \mathbb{R}^2$ felett.)

(3) $n=2$-ben, sokaságon vett integrál
$k=1$, $k=2$ dim $(x,y) \to \iint d(x,y)$ $\int ds$

2016b
10. hét

(4) $n=2$, $k=2$ volta ált Stokes tétel ? $\Rightarrow$ GREEN tétel
DIFFEGYE?

$$(a\,dx + b\,dy)\wedge(c\,dx + f\,dy) =$$

$$= ac\, \cancel{dx\wedge dx} + af\, dx\wedge dy + bc\, dy\wedge dx + \cancel{bf\, dy\wedge dy} =$$

$$= (af - bc)\, dx\wedge dy$$

Green T:

$$\oint_{\partial\Delta} P\,dx + Q\,dy = \iint_\Delta d(P\,dx + Q\,dy) =$$

$$= \iint_\Delta \cancel{P'_x\, dx\wedge dx} + P'_y\, dy\wedge dx + Q'_x\, dx\wedge dy + \cancel{Q'_y\, dy\wedge dy} =$$

$$= \iint_\Delta -P'_y\, dx\wedge dy + Q'_x\, dx\wedge dy$$

$$= \iint_\Delta (Q'_x - P'_y)\, dx\wedge dy$$

Green tétel

$$\oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S d(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \iint_S P'_y\, dy\,dx + Q'_x\, dx\,dy + P'_z\, dz\,dx + R'_x\, dx\,dz +$$

$$+ Q'_z\, dz\,dy + R'_y\, dy\,dz =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\, dy\,dz + (P'_z - R'_x)\, dz\,dx + (Q'_x - P'_y)\, dx\,dy$$

$$d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

Klasszikus Stokes tétel!

Stokes T

$$dS = \sqrt{(dy\,dz)^2 + (dz\,dx)^2 + (dx\,dy)^2}$$

$$dS = |S'_u \times S'_v|\, du\, dv$$

Analízis III. 7. heti feladatok
2017. október 27.

Differenciál formák, külső deriválás $\mathbb{R}^3$-ban.

1. Határozza meg $d\omega$-t és $d(d\omega)$-t az alábbi formákra:
   (a) $\omega_1 = e^x\cos(xy)$ (b) $\omega_2 = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ (c) $\omega_3 = xyz\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$.

2.
   - Vektormezők és formák közötti izometria ismétlése $\mathbb{R}^3$-ban.
   - deriválás, külső deriválás
   - $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z \longleftrightarrow (f, g, h)$
   - $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, elemei formák $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$-val való analógiája

3. Adott két differenciál 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban:
$$\omega = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y + f_3\mathrm{d}z, \qquad \tau = g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y + g_3\mathrm{d}z.$$
Az előadáson megismert izomorfia szerint a megfelelő vektormezők:
$$T_1(\omega) = F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1(\tau) = G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}.$$
Az ω és τ külső szorzata $\omega\wedge\tau$ egy differenciál 2-forma. Vajon ez milyen vektormezőnek feleltethető meg? Mi lesz ennek kapcsolata F és G-vel? (A válasz: vektoriális szorzat.)

Integrálás sokaságokon.

4. Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál forma differenciál 2-forma:
   (*a*) $\omega = f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ (*b*) $\omega = f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$
   Legyen $M\subset\mathbb{R}^3$ olyan kétdimenziós sokaság, mely egy differenciálható kétváltozós függvény felülete:
$$M = \{\,(u, v, \varphi(u,v)) \;:\; (u,v)\in R\}, \qquad R\subset\mathbb{R}^2.$$
   Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\int_M \omega = ?$

[F] 5 Legyen $\mathbb{R}^3$-ban egy differenciál 1-forma $\omega = f_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + f_2(x,y,z)\,\mathrm{d}y + f_3(x,y,z)\,\mathrm{d}z$. Legyen $M\subset\mathbb{R}^3$ egydimenziós sokaság. Számoljuk ki a sokaságon vett integrált: $\displaystyle\int_M \omega = ?$

Absztrakt Stokes tétel, speciális esetek.

6. Igazoljuk, hogy a *klasszikus Stokes tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 2$ választás mellett.
   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\,(u, v, \varphi(u,v)) \;:\; (u,v)\in R\}$, $R\subset\mathbb{R}^2$.)

7. Igazoljuk, hogy a klasszikus *Divergencia tétel* az általános Stokes tétel speciális esete, $n = 3$ és $k = 3$ választás mellett.
   (Legyen az az *egyszerűbb eset*, amikor $M = \{\,(u, v, z) \;:\; b(u,v)\le z\le t(u,v),\; (u,v)\in R\}$, egy normáltartomány az $R\subset\mathbb{R}^2$ felett.)

8. Igazoljuk, hogy ha $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos vektormező, akkor minden zárt S felület mentén
$$\iint_S F\cdot\underline{n}\,dS = 0,$$
ahol $\underline{n}$ a felület egységnyi normálvektora minden pontjában.

Integrálás sokaságon:

I egységkörön $\iint f(x,y)\, d(x,y)$

II vonal mentén $\int_\gamma f\, dl$ (skalár függvény)

III vonal mentén $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$

IV felület mentén integrálja $\int f\, dy\, dz$

V felület mentén integrálja a $\int \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$

VI térfogati integrál a hengeren

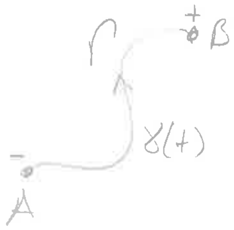
Poincaré lemma

$\mathbb{R}^3$-ban differenciál formulák + Stokes T spec. esetei

Integrálás sokaságon

$\boxed{n = 3}$

① $k = 1$: $M = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b] \}$



legyen egy diff-0 forma : $\omega_0 = f(x,y,z)$

$\partial M = \{ \underset{-}{A}, \underset{+}{B} \}$

$d\omega_0 = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \underbrace{\langle \text{grad}\, f, d\underline{\ell} \rangle}_{\text{potenciálos}}$

$$\int_M d\omega_0 = \int_{\partial M} \omega_0$$

$$\boxed{\int_M \langle \text{grad}\, f, d\underline{\ell} \rangle = \int_{\partial M} f} = \int_A^B f = f(B) - f(A)$$

Tehát potenciálos F vektormező vonalintegrálja :

$$\int_\Gamma F\, d\underline{\ell} = f(B) - f(A) \quad \text{ahol } \underline{F = \nabla f}$$

---

② $k = 2$: $M = \{ S(u,v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u,v) \in D \}$

$\partial M =$ zárt görbe

$\omega_1 = F\, d\underline{\ell} = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$

$d\omega_1 = \langle \nabla \times F, d\underline{S} \rangle$ emlék: $d\underline{S} = \begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}$

$$\int_M d\omega_1 = \oint_{\partial M} \omega_1$$

$$\int_M \langle \nabla \times F, d\underline{S} \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, d\underline{\ell} \rangle$$

$k = 3$ $\quad M \in \mathbb{R}^3$ összefüggő TELJES BIM térrész.

$\partial M \in \mathbb{R}^3$ zárt felület.

$$\omega_2 = f\, dy dz + g\, dz dx + h\, dx dy = F\, d\underline{S} \qquad F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$d\omega_2 = \left(f'_x + g'_y + h'_z\right) dx dy dz = \nabla F \cdot dV$$

$$\int_M d\omega_2 = \oint_{\partial M} \omega_2 \longrightarrow \int_M \nabla F\, dV = \oint_{\partial M} F\, d\underline{S}$$

$\boxed{n = 2}$ ha $k = 1$ (u.a. mint $n = 3, k = 1$)

② $k = 2$ adott egy $M \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő halmaz reinholmosa $\mathbb{R}^2$-nek

~~adott~~ $\partial M \subset \mathbb{R}^2$ 1-dim. sdr.

$$\omega_1 = P\, dx + Q\, dy$$

$$d\omega_1 = d(P dx + Q dy) = \cancel{P'_x\, dx \wedge dx} + P'_y\, dy \wedge dx$$
$$+ Q'_x\, dx \wedge dy + \cancel{Q'_y\, dy \wedge dy} = \left(Q'_x - P'_y\right) dx dy$$

$$\int_M d\omega_1 = \int_{\partial M} \omega_1 \longrightarrow \boxed{\int_M \left(Q'_x - P'_y\right) dx dy = \int_{\partial M} P dx + Q dy}$$

① $\mathbb{R}^3$-ban legyen egy diff-2-forma : $\omega = f\,dx\,dy$

$M \subset \mathbb{R}^3$: $M = \{\underbrace{(u, v, \varphi(u,v))}_{\Phi(u,v)} \mid (u,v) \in D\}$

$$\int_M \omega \stackrel{\Delta}{=} \int_D \omega(D\Phi)\,du\,dv$$

$$\omega(D\Phi) = f(\Phi(u,v))\left[(dx \wedge dy)(D\Phi)\right] =$$

$$= f(\Phi(u,v))\left[(dx \wedge dy)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}\right] =$$

$$= f(\Phi(u,v)) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = f(\Phi(u,v))$$

$$\int_M \omega \stackrel{\Delta}{=} \int_D f(\Phi(u,v))\,du\,dv$$

definíció szerint

Nem definíció szerint, hanem formulában:

$$\int_M \omega = \int_M f\,dx\,dy = \int_M f(\underline{r})\,dx\,dy = \int_D f(\Phi(u,v))\,du\,dv$$

$x(u,v) = u$

$y(u,v) = v$

$dx = x'_u\,du + x'_v\,dv = du$

$dy = y'_u\,du + y'_v\,dv = dv$

ha $\omega = f\,dx\,dz$, $M = \{s(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$

$$\int_M \omega \stackrel{\Delta}{=} \int_D \omega(Ds)\,du\,dv \stackrel{(*)}{=} \int_D f(s(u,v))\,\varphi'_v\,du\,dv$$

$$\omega(Ds) = (f\,dx\,dz)(Ds) = f(s)\underbrace{\left[dx\,dz(Ds)\right]}_{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{vmatrix} = \varphi'_v \;(*)} \quad ; \quad Ds = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

2016

kód 3 gyak.
10. feladat - 1 -

NIFFGF03

Általánosabban: adott egy $\omega = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy$

$$M = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

$$\int_M \omega = \int_D \omega(Ds)\,du\,dv \overset{(*)}{=\!=} \int_D \left\langle F(s(u,v)),\, s'_u \times s'_v \right\rangle$$

$$Ds = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}$$

$$\omega(Ds) = f(s)\underbrace{\Big[dy\,dz(Ds)\Big]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}}_{y'_u z'_v - z'_u y'_v}} + g(s)\underbrace{\Big[dz\,dx(Ds)\Big]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}}_{z'_u x'_v - x'_u z'_v}} + h(s)\underbrace{\Big[dx\,dy(Ds)\Big]}_{\underbrace{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}_{x'_u y'_v - y'_u x'_v}} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} f(s) & g(s) & h(s) \end{pmatrix}}_{F^T(s(u,v))} \underbrace{\begin{pmatrix} y'_u z'_v - z'_u y'_v \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix}}_{s'_u \times s'_v} = \left\langle F(s(u,v)),\, s'_u \times s'_v \right\rangle \quad (*)$$

DEFINÍCIÓ SZERINT

Intuitívabban: $dy\,dz = (y'_u\,du + y'_v\,dv) \wedge (z'_u\,du + z'_v\,dv) =$

$$= (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} du\,dv$$

(4) $M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c \}$

~~kb.~~ ∃ paraméteres diffható megoldása:

$M = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a,b] \}$

ekkor $f(\gamma(t)) = c \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0 \implies \operatorname{grad} f(x,y) \perp$ érintővekt.

$\forall t : \binom{x}{y} = \gamma(t)$

$\left[\operatorname{grad} f(r) \right]_{r = \gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$

$\left[\operatorname{grad} f(r) \right]_{r = \gamma(t)} \perp \dot{\gamma}(t)$

(5) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorpotenciálos $\implies \exists G : \underline{F = \nabla \times G}$

$$\iint_S F \, d\underline{S} \overset{\text{Stokes}}{=} \iiint_{\text{Int}(S)} d(\underbrace{F \, d\underline{S}}_{d\omega_1}) = 0$$

legyen $\omega_1 = \langle G, d\underline{l} \rangle \in \Lambda^1(\mathbb{R})$

$d\omega_1 = \langle \nabla \times G, d\underline{S} \rangle \in \Lambda^2(\mathbb{R})$

$d(d\omega_1) \equiv 0$

D8*

$\int f(x,y,z) \, dx\,dy\,dz$

$r := \Phi(r)$

2017b

kval 3 gyak

DIFFGEO3 10. lecke -2

$\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ ← nem. diff. forma $\quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ → differenciál 0 forma

$\Lambda^1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$

$\Lambda^2(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^{n \times 2}$ mert alternálónak kell lennie

Ékv. definíció: $\omega \wedge \tau \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

$\tau \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$

Tulajdonságok:
- asszociatív
- $\omega \wedge \tau = (-1)^{kl}\, \tau \wedge \omega$
- $(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) \wedge \tau = \alpha_1 \omega_1 \wedge \tau + \alpha_2 \omega_1 \wedge \tau$
- $dx_I \wedge dx_J = \begin{cases} 0 & \text{ha } I \cap J \neq \emptyset \\ dx_{I \cup J} & \text{ha } I \cap J = \emptyset \end{cases}$

$I, J \in \{1, n\}$

$|I| = k \quad |J| = l$

Poincare lemma: „$d^2 = 0$"

$\omega = f(x, y, z)$

$d\omega = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz$

$d(d\omega) = f''_{xx}\, \cancel{dx \wedge dx} + f''_{xy}\, dy\, dx + f''_{xz}\, dz\, dx$

$+ f''_{yx}\, dx\, dy + 0 + \boxed{f''_{yz}\, dz\, dy}$

$+ f''_{zx}\, dx\, dz + \boxed{f''_{zy}\, dy\, dz} + \cancel{f''_{zz}\, dz\, dz} = 0$

2017b

6. ea

Anal 3

1.) 0 formulák $\omega_0 = f(x,y,z)$ skalármező

$$\omega_0 \xmapsto{T_0} f$$

2) 1 forma $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ -beli bázis dx, dy, dz

$$\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

$$\omega_1 \longmapsto F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

$$T_1 : \Lambda^1(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \{F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\}$$

legyen $\omega_1 = d\omega_0 = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz$

$$\boxed{T_1(d\omega_0) = \text{grad}(T_0\omega_0)}$$

3) 2 forma $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ -beli bázis $dx\,dy \quad dx\,dz \quad dy\,dz$

$$\omega_2 = F\,dx\,dy + G\,dx\,dz + H\,dy\,dz$$

$$F, G, H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$$

$$\omega_2 \longmapsto \begin{pmatrix} +H \\ -G \\ +F \end{pmatrix}$$

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz$

$$d\omega_1 = (-f'_y + h'_x)\,dx\,dy + (f'_z - h'_x)\,dx\,dz + (-g'_z + h'_y)\,dy\,dz$$

$$= \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ h'_x - f'_y \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}}_{d\vec{S}}$$

4) 3 forma $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$: $dx\,dy\,dz$

$$T^3 : \Lambda^3(\mathbb{R}^3) \to \{\text{skalármezőkre}\}$$

$$d\omega_2 = (F'_z - G'_y + H'_x)\,dx\,dy\,dz \Rightarrow T_3(d\omega_2) = \text{div}(T_2\omega_2)$$

2017b
6. ea
Anal 3
-2-

$$\int_M \omega = ?$$

ω diff k forma $\mathbb{R}^n$-ben

$M \subset \mathbb{R}^n$ k dim diff sokaság

$$\int_M \omega = k \text{ dim-s többes integrál}$$

Pl $n = k = 3$

$M \subset \mathbb{R}^3$ nyílt térrész

$\omega = f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

Pl $\mathbb{R}^2$-ben $k = 1$

$\omega = f(x,y)\, dx$ $\quad \eta = g(x,y)\, dy$

M 1-dim sokaság $\equiv C$ görbe

$C = \{ \sigma(u) \mid u \in [a,b] \}$

$\sigma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$

$\sigma(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix}$

$$\int_M \omega = \int_C f(x,y)\, dx = \int_a^b f(\sigma(u))\, x'(u)\, du$$

$(x,y) \longleftrightarrow \sigma(u)$

$dx \longleftrightarrow x'(u)\, du$

$C \longleftrightarrow [a,b]$

$\sigma:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ diff „térkép"

$$D\sigma = \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix}$$

$dx(D\sigma) = x'(u)$ $\Leftarrow$ ez miért van így $\quad dx = x'dt$

$dx + dy = x'dt + y'dt$

$dx(t) = dx(\dot{\gamma}(t))\,dt$

M k dim. sokaság

Tfh egyetlen térképpel megadható

$\exists\, \phi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$\phi(B) = M$ egy-egy ért.

B egyszerű $\mathbb{R}^k$-ban

$D\phi$ teljes rangú ; ω diffható k-forma $\in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$

<u>DEF</u> $$\int_M \omega = \int_B \omega(d\phi)\, d(u_1,\dots,u_k)$$

M felület $\mathbb{R}^3$-ban

$S = M = \{(u, v, \varphi(u,v)) : (u,v)\in D\}$, legyen $\omega = f\,dx\,dy$

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi(u,v) \end{pmatrix}$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \varphi'_u & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

$$\int_M \omega = \iint_D f(u,v,\varphi(u,v)) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d(u,v)$$

<u>Pl</u>: $M = \{S(u,v) \mid (u,v)\in D\}$

$\omega = f\,dx\,dy + g\,dy\,dz + h\,dx\,dz$

Stokes tétel

$\mathbb{R}^n$-ben adott M k-dim sokaság
tfh ∂M $k-1$ dim. sokaság
Adott ω egy diffi $k-1$ forma
Ekkor $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$

spec eset: $n=1$, $k=1$

$\mathbb{R}^1$-ben $M=(a,b) \Longrightarrow \partial M = \{a,b\}$

$\omega = f(x)$ 0 forma

$d\omega = f'(x)\,dx$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_{\{a,b\}} f(x) = f(b)-f(a)$$

spec eset $n=2$ $k=2$

$\mathbb{R}^2$-ben $M \subset \mathbb{R}^2$

∂M: zárt görbe

$\omega = P\,dx + Q\,dy$

$d\omega = -P_y'\,dx\,dy + Q_x'\,dx\,dy$

$$\int_M (-P_y' + Q_x')\,dx\,dy = \oint_{\partial M} P\,dx + Q\,dy$$

2017 b

6. ea
hnl 3

Differenciál formák $\mathbb{R}^3$-ban

legyen $\omega_0 = f(x,y,z)$

$$d\omega_0 = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{e} \rangle$$

---

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy + h\,dz = \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle$

$$\begin{aligned} d\omega_1 = {} & f'_y\,dy\,dx + f'_z\,dz\,dx \\ & + g'_x\,dx\,dy + g'_z\,dz\,dy \\ & + h'_x\,dx\,dz + h'_y\,dy\,dz = \\ = {} & (h'_y - g'_z)\,dy\,dz + (f'_z - h'_x)\,dz\,dx + (g'_x - f'_y)\,dx\,dy \\ = {} & \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}}_{:= d\vec{S}} = \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle \end{aligned}$$

ahol $\vec{F} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}$$

---

legyen $\omega_2 = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy = \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$

$$d\omega_2 = (f'_x + g'_y + h'_z)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV = d(x,y,z)} = \operatorname{div}(\vec{F}) \cdot dV$$

~~$d\vec{S}$ belül $d\vec{S}(D\Phi)\,du\,dv = (dy\,dz(D\Phi)\,du\,dv$~~

~~$dy\,dz(D\Phi) = \begin{vmatrix} g'_u & g'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} =$~~

2017b

DIFFGEOM 3

hét 3
gyak 7

Differenciálformák $\mathbb{R}^1$-ben:

legyen $\omega_0 = f \in \Lambda^0(\mathbb{R})$

$$d\omega_0 = f'_x \, dx \in \Lambda^1(\mathbb{R})$$

Differenciálformák $\mathbb{R}^2$-ben:

legyen $\omega_0 = f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^2)$

$$d\omega_0 = f'_x \, dx + f'_y \, dy = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \langle \operatorname{grad} f, \vec{de} \rangle$$

---

legyen $\omega_1 = P\,dx + Q\,dy = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \langle \vec{F}, \vec{de} \rangle$

$$d\omega_1 = P'_y \, dy\,dx + Q'_x \, dx\,dy$$

$$= \left(-P'_y + Q'_x\right) dx\,dy$$

legyen $\omega_0 = f\,dx\,dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$

$n = 3 \quad k = 3$ (divergencia tétel)

legyen $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = f\,dy\,dz + g\,dz\,dx + h\,dx\,dy = \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$$d\omega = \operatorname{div}\vec{F} \cdot dV = (f'_x + g'_y + h'_z)\,dx\,dy\,dz$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ $\quad \partial M$ egy felület

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega \quad \text{azaz} \quad \int_M \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$n = 3 \quad k = 2$ (Stokes tétel)

$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle \Rightarrow d\omega = \langle \operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ $\quad$ 2 dim. sokaság

$$\int_M \langle \operatorname{rot}\vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$$

$n = 3 \quad k = 2$ (Potenciálfüggvény tétel)

$\omega \in \Lambda^0(\mathbb{R}^3)$

$$\omega = f \Rightarrow d\omega = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{l} \rangle$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ $\quad$ 1 dim. sokaság

$$\int_M \langle \operatorname{grad} f, d\vec{l} \rangle = \int_{\partial M} f = f(B) - f(A)$$

2017b

DIFFGEOM 3 $\quad$ hét 3 gyak 7

Vektoriális szorzat

$$\omega = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz = \overbrace{(f_1\ f_2\ f_3)}^{\vec{F}}\,d\vec{\ell}$$

$$\tau = g_2\,dx + g_2\,dy + g_3\,dz = \underbrace{(g_1\ g_2\ g_3)}_{\vec{G}}\,d\vec{\ell}$$

$$\omega \wedge \tau = \langle \vec{F} \times \vec{G},\ d\vec{S} \rangle$$

ugyanis: $\omega \wedge \tau = f_1 g_2\,dx\,dy - g_1 f_2\,dx\,dy$

$$+ (f_3 g_1 - f_1 g_3)\,dz\,dx$$

$$+ (f_2 g_3 - f_3 g_2)\,dy\,dz =$$

$$= \begin{pmatrix} f_2 g_3 - f_3 g_2 \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$$

$$= \langle \vec{F} \times \vec{G},\ d\vec{S} \rangle$$

$$\omega \xmapsto{T_1} \vec{F}$$

$$\tau \longmapsto \vec{G}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= T_1(\omega) \\ \vec{G} &= T_1(\tau) \\ \vec{F} \times \vec{G} &= T_2^*(\omega \wedge \tau) \end{aligned}}$$

$d\vec{S}$ miért az ami?

Eddig: $\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param.}} \iint_D \langle \vec{F}(\phi(u,v)), \phi'_u \times \phi'_v \rangle d(u,v)$

tehát $d\vec{S} \xrightarrow[\text{behely.}]{\text{param.}} (\phi'_u \times \phi'_v)\, du\, dv$

$$S = \left\{ \phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$D\phi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \qquad \phi'_u \times \phi'_v = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix}$$

Differenciálformák ismeretében,

legyen $d\vec{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$

$$d\vec{S} \xrightarrow[\text{behelyett.}]{\text{param.}} d\vec{S}(D\phi)\, du\, dv = \begin{pmatrix} dy\,dz\,(D\phi) \\ dz\,dx\,(D\phi) \\ dx\,dy\,(D\phi) \end{pmatrix} du\, dv =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \end{pmatrix} du\, dv$$

$d\vec{S}$

DIFFGEOM3

2017b

hud 3 gyak 7

Differenciál formulák integrálása

legyen $\omega_1 = f\,dx + g\,dy = (f \ g \ 0)\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz\end{pmatrix} = \langle \vec{F}, d\vec{e}\rangle$

$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t)\end{pmatrix}, t \in [a,b] \right\} \Rightarrow D\gamma(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t)\end{pmatrix}$

legyen $\omega_2 = f\,dy\,dz = (f \ 0 \ 0)\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy\end{pmatrix} = \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle$

$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v)\end{pmatrix}, (u,v)\in D \right\} \Rightarrow Ds(u,v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v\end{pmatrix}$

Integrálás definíció szerint:

$$\int_\Gamma \omega_1 = \int_a^b f(\gamma(t))\,\underbrace{dx(D\gamma(t))}_{x'(t)}dt + g(\gamma(t))\,\underbrace{dy(D\gamma(t))}_{y'(t)}dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\,x'(t)\,dt + g(\gamma(t))\,y'(t)\,dt$$

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}, d\vec{e}\rangle = \int_a^b \langle \vec{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\,dt \quad \text{(ahogy eddig csináltuk)}$$

$$\int_S \omega_2 = \iint_D f(s(u,v))\; dy\,dz\big(Ds(u,v)\big)\;\cancel{d(u,v)}\; du\,dv$$

$$= \iint_D f(s(u,v)) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v\end{vmatrix} du\,dv$$

$$= \iint_D f(s(u,v))\; \boxed{!\,(y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv}$$

ez lett a $dy\,dz$-ből

$dy\,dz = (y'_u\,du + y'_v\,dv)\wedge(z'_u\,du + z'_v\,dv) = y'_u z'_v\,du\,dv + y'_v z'_u\,dv\,du = (y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv$

ahogy eddig csináltuk volna:

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iint_S \langle \vec{F}(s(u,v)), s'_u \times s'_v\rangle\, d(u,v)$$

$$= \iint_S \left\langle \vec{F}(s(u,v)), \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}\right\rangle d(u,v)$$

$$= \iint_S f(s(u,v))\cdot(y'_u z'_v - y'_v z'_u)\,du\,dv$$

DEF szerinti $\int$

DiffGeom 1

2017b

hét 3

óra 7

Differenciál formulák integrálása

Definíció szerint $\Leftarrow$ legyen $\begin{cases} \omega_1 = f\,dx + g\,dz \\ \Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in [a,b] \right\} \end{cases}$

legyen $\begin{cases} \omega_2 = f\,dy\,dz \\ S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in D \right\} \end{cases}$

F2: $\displaystyle \oiint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_V 1\, dV =$

$$= \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1\, dz\; d(x,y) = \iint_D 1 - \sqrt{x^2+y^2}\; d(x,y)$$

$$= \int_0^{R}\int_0^{2\pi} 1 - r^2\, d\vartheta\, dr = 2\pi \cdot \left(r - \frac{r^3}{3} \right)\Big|_0^{1} =$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) = \cancel{\frac{2\pi}{3} r^2}$$

Gauss tétel levezetése a Stokes tételből :

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \langle F, dS \rangle = \iiint (\mathrm{div}\, F)\, dV}$$

legyen $F = (f, g, h)$

$$dS = \begin{pmatrix} dy\, dz \\ dz\, dx \\ dx\, dy \end{pmatrix}$$

$$\omega_2 = f\, dy\, dz + g\, dz\, dx + h\, dx\, dy = \langle F, dS \rangle$$

$$d\omega_2 = (\mathrm{div}\, F) \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

Hogyan lehetne ezt a leghorrekt képben levezetni

legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ 3 dim sokaság (i.e. tartomány) összefüggő

ekkor $\partial M \subset \mathbb{R}^3$ egy zárt 2 dim sokaság.

legyen ω egy diff. 2 forma:

$$\omega_2 = f_1\, dy\, dz + f_2\, dz\, dx + f_3\, dx\, dy = F \cdot dS$$

$$d\omega_2 = (\mathrm{div}\, F) \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

tehát

$$\oint_{\partial M} \omega_2 = \int_M d\omega_2 \iff \oint_{\partial M} \langle F, dS \rangle = \int_M (\mathrm{div}\, F)\, dV$$

$\int$-ás sokaságon diff. formák

$\Phi : D \to M$

$$\boxed{\int_M \omega = \int_D \omega(\Phi) \, du_1 \ldots du_k}$$

$$\omega_0 \in \Lambda^0(\mathbb{R}^3) \equiv \mathbb{R}$$

$$\omega_0 = f(r)$$

$$d\omega_0 = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz = \langle \mathrm{grad}\, \omega_0, d\ell \rangle$$

$$\omega_1 = f\, dx + g\, dy + h\, dz = \langle F, d\ell \rangle$$

$$d\omega_1 = \langle \mathrm{rot}\, F, dS \rangle$$

$$\omega_2 = f\, dy\, dz + g\, dz\, dx + h\, dx\, dy = \langle F, dS \rangle$$

$$d\omega_2 = (\mathrm{div}\, F)\, dV$$

$$d\ell \triangleq \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$dS \triangleq S'_u(u,v) \times S'_v(u,v)\, du\, dv$$

$$dV \triangleq \text{“} d(x,y,z) \text{”} = dx\, dy\, dz$$

2017

Anal 3
gyak 10.

Általános Stokes $\Longrightarrow$ Speciális Stokes

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

I $\quad \omega = \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$

II $\quad d\omega = \langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle \quad$ tehát $\quad d\vec{S} = \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}$

III $\quad$ hogy is volt eddig $\quad d\vec{S} \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param.}} (s'_u \times s'_v)\, d(u,v)$

van-e köze a kettőnek egymásho

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

legyen $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz = \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle$ ahol $\vec{F} = \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g \\ h \end{pmatrix}$

és $d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

$$d\omega = -f'_y\, dx\,dy + f'_z\, dz\,dx + g'_x\, dx\,dy - g'_z\, dy\,dz - h'_x\, dz\,dx + h'_y\, dy\,dz = \underbrace{\begin{pmatrix} h'_y - g'_z \\ f'_z - h'_x \\ g'_x - f'_y \end{pmatrix}^T}_{\nabla \times \vec{F}} \underbrace{\begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix}}_{:=\, d\vec{S}} = \underbrace{\langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle}_{\text{diff 2-forma}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{\ell} \rangle = \iint_M \langle \nabla \times \vec{F}, d\vec{S} \rangle}$$

Paraméteres behelyettesítésbe eddig / innáron ($\int$ sokaságon)

$$\iint_M \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \iint_D \langle \vec{F}(s(u,v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u,v)$$ eddig!

A sokaság paraméteres megadása:

$$M = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \,\middle|\, (u,v) \in D \right\}$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - y'_v z'_u \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{c} \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow dydz \\ \\ \leftarrow dzdx \\ \\ \leftarrow dxdy \end{array}$$

$$(dx \wedge dy)(Ds) = (dx \wedge dy) \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

Általános $\int$-ból vezessük le a felületiből $\boxed{\text{levezetést}}$
$\boxed{\text{képletét}}$

$$\iint_M \langle F, d\vec{s} \rangle = \iint_D \langle F(s(u,v)), s'_u \times s'_v \rangle \, du\, dv$$

miért van így?

$$\langle F, d\vec{s} \rangle = f\, dy\, dz + \ldots$$

$$f\, dy\, dz \xrightarrow[\text{behely}]{\text{param}} f(s(u,v)) \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$$

. . .

ebből jön ki a lényeg! . .