I Gyakorlat anyaga:

2015 gyak 1/5

Adott $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$; $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Int. $\vec{n}$ mentén majd tangens mentén.

tangens : $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$

$$\boxed{W = \int_\Gamma \langle F(x,y), d\vec{l} \rangle} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle F(x(t), y(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt =$$

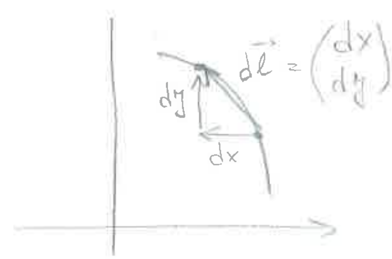
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} a^2\cos^2 t \\ b^2 \sin^2 t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^3 \cos^2 t \sin t + b^3 \sin^2 t \cos t \right) dt =$$

$$= +a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, (\cos t)' \, dt + b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, (\sin t)' \, dt =$$

$$= \frac{a^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b^3}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3} \Bigg|_{\substack{\text{ha } b=1 \\ a=2}} = -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

Apropó

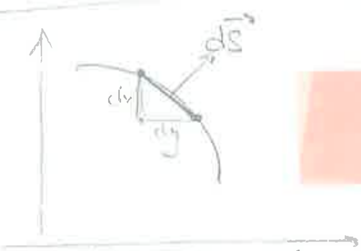


$x = x(t)$
$dx = \dot x(t)\, dt$
$dy = \dot y(t)\, dt$
$dl = \dot\gamma(t)\, dt$

normális szerint: (ezt inkább hagyjuk)

$$\dot\gamma(t)^\perp = \begin{pmatrix} b\cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} \text{ és } \Phi = \int_\Gamma \langle F(x,y), d\vec{n} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \dot\gamma(t)^\perp \, dt =$$

$$= a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \, dt + b^2 a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \, dt = \ldots$$



$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|\dot\gamma(t)\|\, dt$

$ds = \vec{n} \cdot dl$

$ds = \frac{\dot\gamma(t)^\perp}{\|\dot\gamma(t)^\perp\|} \|\dot\gamma(t)\|\, dt$

$\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$

$\|\dot\gamma(t)^\perp\| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}$

$W'' = -\int_\Gamma \langle F(x,y), d\vec{r} \rangle$ munkára ezt

kifejtik, hogy egy valamit F erőtérben A-ból B-be viszem Γ úton

2016 anal IV gyak 1

2015 gyak 1/6

$\Gamma \quad O \longrightarrow P(1,2,3)$

$$F(r) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = tP$$

$$\int_\Gamma F(r)\,d\vec{l} = \int_0^1 \underbrace{F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}_{72t^5}\,dt = 12t^6\Big|_0^1 = 12$$

2015 gyak 1/7

(b) $F(r) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \Rightarrow U(p) = \int_\Gamma \vec{F}(r)\,d\vec{l}$ $\qquad \Gamma = \{\gamma(t) = tp \mid t \in [0,1]\}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} tp_1 \\ tp_2 \\ tp_3 \end{pmatrix} = tp$$

$$\dot\gamma(t) = p$$

$$F(tp) = t^2\begin{pmatrix} p_2p_3 \\ p_1p_3 \\ p_1p_2 \end{pmatrix}$$

$$U(p) = \int_0^1 F(tp)\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 t^2 \cdot 3p_1p_2p_3\,dt = p_1p_2p_3$$

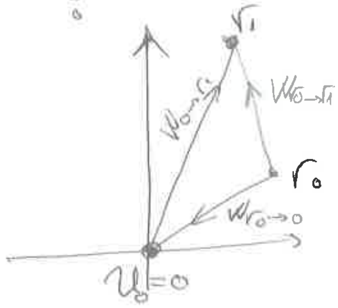
Tehát ha meg akarjuk oldani:
$\nabla U(r) = F(r)$ akkor $U(r) = \int_\Gamma F(r)\,dl$

tehát $F(r)$ potenciálja: $U(r) = x_1x_2x_3$

Legyen $\Gamma = \{\gamma(t), t \in [0,1]\}$ egy út, $\gamma(0) = r_0$, $\gamma(1) = r_1$

$$W = \int_\Gamma F(r)\,dl = \int_0^1 F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^1 \nabla U(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \dot U(\gamma(t))\,dt = U(\gamma(t))\Big|_0^1 = U(r_1) - U(r_0)$$



A potenciál fv. minden pontban arányos egy test pot. energiájával (E_p) abban a pontban.

legyen $\Gamma = \{x \mid f(x) = 0\}$; $x \in \mathbb{R}^2$

legyen $x_0 \in \Gamma \Rightarrow f(x_0) = 0$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

a $f(x) = 0$ nem más mint egy szintvonal!

legyen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = c_0$

legyen ~~f(x) ≥ c~~ tetszőleges sima $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $\gamma(t) \in \{x \mid f(x) = c_0\}$

legyen $g(t) = f(\gamma(t)) = c_0$

$$\dot{g}(t) = [\nabla f]_{x = \gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_0) \perp \dot{\gamma}(t)$$

---

legyen $\Gamma = \{x \mid g_1(x) = 0, g_2(x) = 0\}$

A normáltér ténylegesen egy tér

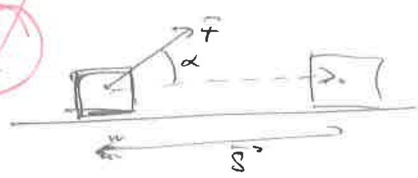
Disztr. $\Delta = \text{span}\langle \nabla g_1(x), \nabla g_2(x) \rangle$

Anal 3
Gradiens ⊥

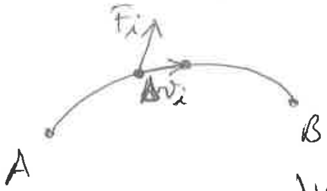
Anal 3 Fizikai értelem

Munka tétel:

Vektormező érintő irányú VONAL $\int$-ja



$$W = |F| \cdot |s| \cos\alpha = \langle F, s \rangle$$



$$\Delta W_i = \langle F_i, \Delta v_i \rangle$$

$$W_{AB} = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \|\Delta\| \to 0}} \left(\sum_i \langle F_i, \Delta v_i \rangle \right) = \int_\gamma \langle F, dv \rangle$$

tehát $W_{AB} = \int_\Gamma \langle F, dr \rangle$; $\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1] \\ \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B \end{array} \right\}$

Ez az a munka, amelyet F erőtér végez a testen

$-W_{AB}$ az a munka, amelyet mi kell végeznünk, hogy legyőzzük F-erőteret

Pld: $F(x,y) = \binom{1}{2}$ konzervatív mező

legyen tetszőleges $\Gamma = \{ \gamma(t),\ t \in [0,1],\ \gamma(0) = r_1 ;\ \gamma(1) = r_2 \}$

$$W = \int_\Gamma F(x,y) \cdot dr = \int_0^1 (1\ \ 2) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = (1\ \ 2)\ \gamma(t)\Big|_0^1 = (1\ \ 2)(r_2 - r_1)$$

konst

vagyis t. úton ugyanannyi munka

Green tétel: adott $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, határa sima ; $\partial D = C$ zárt

ekkor: $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} d\vec{e}$$

(vonal integrál tengely mentén)

Következmények: legyen $\Gamma = \{ \gamma(t) \mid t \in [0,1] ; \gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R}^2 \}$ zárt

legyen $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Ekkor a speciális Stokes tétel szerűség:

$$\oint_{\partial D} f(x,y)\, d\vec{e} = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dS$$

A Gauss tétel szerűség:

$$\oint_{\partial D} f(x,y) \cdot \vec{n} \cdot dl = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right)}_{\text{jelöljük: } div(f)} dS = \iint_D div(f)\, dS$$

Azért, mert: $$\oint_{\partial D} f(x,y)\, \vec{n}\, dl = \int_0^1 f(\gamma(t))\, \underbrace{\dot{\gamma}(t)^{\perp} dt}_{\vec{n}\, dl} =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t)) \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -f_2(\gamma(t))\, \dot{x}(t)\, dt + f_1(\gamma(t))\, \dot{y}(t)\, dt =$$

$$= \oint_{\partial D} \underbrace{-f_2(x,y)\, dx}_{\text{„}P\text{"}} + \underbrace{f_1(x,y)\, dy}_{\text{„}Q\text{"}} \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) d(x,y)$$

Tehát: $$\oint_{\partial D} f(x,y)\, d\vec{e} \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dS$$

Terület számítás: $f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$$\oint_{\partial D} f(x,y)\, \vec{n}\, dl = \oint_{\partial D} f_1(x,y)\, dy - f_2(x,y)\, dx \overset{\text{Green}}{=\!=} \iint_D div(f)\, dS$$

$f(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Anal 3
Green T.

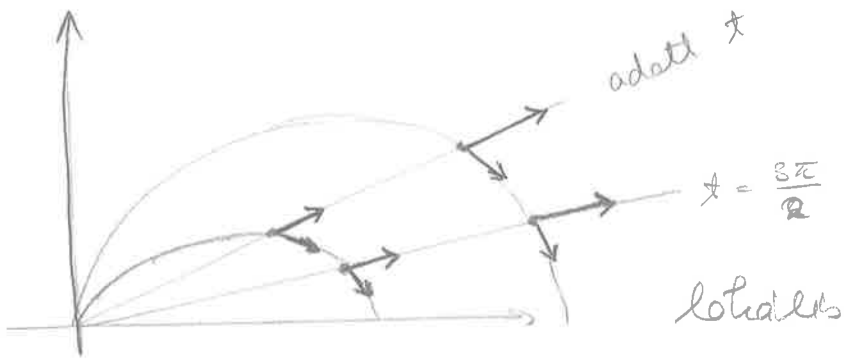
Cyclois koordináta rendszer

legyen $x = r(t - \sin t)$ $\qquad z_1 = x \quad z_2 = y$

$y = r(1 - \cos t)$ $\qquad z_{1'} = r \quad z_{2'} = t$

ekkor $\underline{z}_{i'} = \frac{\partial R}{\partial z^{i'}} = \left(\begin{array}{c|c} t - \sin t & r(1-\cos t) \\ 1 - \cos t & r \sin t \end{array} \right)$

tehát $\underline{z}_{1'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \end{pmatrix}$ $\qquad \underline{z}_{2'} = \dot{\gamma}_r(t)$ (érintő iránya egy adott r sugarú kör cikloisára)



lokális koordináta rendszerek

ekkor $[z_{1'}, z_{2'}] = 0$

vagyis $\frac{\partial z_{2'}}{\partial z} \cdot z_{1'} - \frac{\partial z_{1'}}{\partial z} z_{2'} = 0$

legyen $f = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ $\qquad g = \begin{pmatrix} r(1-\cos t) \\ r \sin t \end{pmatrix}$

ekkor $\begin{pmatrix} \dot{r}(\tau) \\ \dot{t}(\tau) \end{pmatrix} = f(r(\tau), t(\tau))$

illetve $\begin{pmatrix} \dot{r}(\tau) \\ \dot{t}(\tau) \end{pmatrix} = g(r(\tau), t(\tau))$ $\qquad$ megoldás görbéi fogják megadni a koordináta tengelyeket

hogy is van ez?

Cikloois koord. rendszer.
2014

Analízis III. 1. heti feladatok
2017. szeptember 14.

Ismétlés: Vektormező. Derivált.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.
2. Legyen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az a vektormező, melyre $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$.
   (a) $DF(x, y) =?$
   (b) Milyen (x, y) esetén nem invertálható a Jacobi mátrix?
   (c) Ha F invertálható $(0,0)$-ban, legyen az inverze G. Mennyi $DG(0, 0)$?
3. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)^T$. Mi lesz a vektormező Jacobi mátrixa, $DF =?$
4. Számítsa ki G deriváltját, ha $G(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$. $DG =?$
5. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\text{grad}\,(fg) = f \cdot \text{grad}\, g + g \cdot \text{grad}\, f$.
   (b) $D(fF) = F \cdot \text{grad}\, f + f \cdot DF$. (A jobboldal első tagjában diadikus szorzat van.)

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén. Vektormező potenciálja.

6. Írjuk fel a paraméteres megadását annak az origó középpontú ellipszisnek, melynek tengelyei $2a$ és $2b$ hosszúak. Legyen Γ ennek az ellipszisnek az a negyede, melynek kezdőpontja $A(a, 0)$, végpontja $B(0, b)$. Írjuk fel pareméterezését.
7. Integráljuk az $F(x, y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt fenti Γ görbe mentén.
8. Számítsuk ki az $G(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1, 2, 3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.
9. Számítsuk ki az $H(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t - 5, t) \mid t \in [0, 3]\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1, 2, 0)$ és $P_2(5, 5, 9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.
10. Potenciálosak/e a fenti feladatban szereplő f, G, H vektromezők? Ha igen, írjuk fel egyik potenciálfüggvényüket. (Vajon egyértelmű-e a potenciálfüggvény? Miért?)
11. Egészítsük ki az alábbi állítást (többféle megoldás lehetséges):
    Állítás. *Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ nyílt és összefüggő tartomány. $F : S \to \mathbb{R}^3$ vektormező. Ekkor F pontosan akkor potenciálos, ha ....*
    Ez alapján ellenőrizzük le az előző feladatok számolásait.

2017 ŭ.

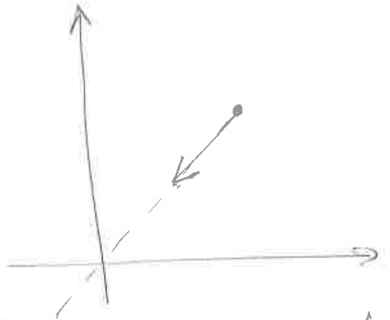
A 2017 év úgy indult, hogy előbb volt gyakorlat mint előadás! vektanal ☺

Anal 3
– 0 – gyak 1

Anal 3 1. hét (gyakorlat)

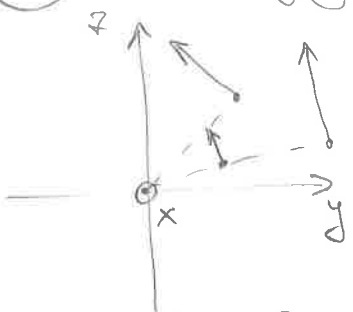
1) Írjuk fel $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típ. vektormezőt.

a) $\forall\ \underline{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pontból az origóba vezető út felét:



$$F(\underline{r}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

b) x tengely körüli (jobb sodrású) örvény konstans ω seb.

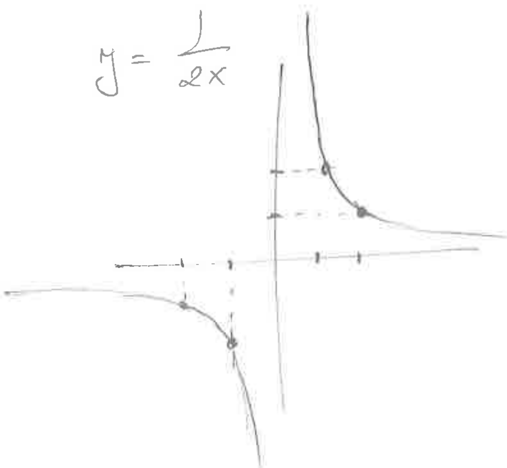


$$F(\underline{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

2) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 2x+y^2 \end{pmatrix}$

a) $DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix}$

b) $\det(DF) = 4xy - 2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow xy = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ melyre $y = \frac{1}{2x}$



c) F inverze =? $(x,y) = (0,0)$-ban

$$\begin{cases} x^2 + y = \alpha \\ 2x + y^2 = \beta \end{cases}$$

$F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

F inverzének gradiense $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$-ban

skalárfüggvényekre: $\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$ azaz $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

$$DG(z) = \left(\left[DF(x) \right]_{x = F^{-1}(z)} \right)^{-1} = DF(G(z))^{-1}$$

$$DG(0) = DF(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2017.

Anal 3 —1— gyak I

(2) Ugyanaz tovább: Újrafelosztás

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-1 \\ 2x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$$

(a) $DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4x & 2y \end{pmatrix}$

(b) $\det(DF) = 4xy - 4x = 4x(y-1) \neq 0$

tehát akkor nem jó, ha: $y-1 \neq 0$, $x \neq 0$

(c) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y-1 \\ 2x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$ inverze:

$$\begin{cases} x^2+y-1 = \alpha \\ 2x^2+y^2+1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \quad y^2-2y+2-1 = \beta-2\alpha$$

$$(y-1)^2 = \beta-2\alpha \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\beta-2\alpha}+1$$

$\sqrt{\beta-2\alpha}$ értelmezett!

$$x^2+y-1 = \alpha$$

$$x^2 \pm \sqrt{\beta-2\alpha} = \alpha$$

$$x^2 = \mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha$$

$$x = \pm\sqrt{\mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha}$$

Tehát
$$F^{-1}(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mp\sqrt{\beta-2\alpha}+\alpha} \\ \pm\sqrt{\beta-2\alpha}+1 \end{pmatrix}$$

Megoldás: $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ 2x+y^2 \end{pmatrix}$ $\quad F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad DF = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 2 & 2y \end{pmatrix}$

$$(0,0) \underset{F^{-1}=G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} (0,0)$$

tehát $G(0,0) = (0,0)$

ezért $DG(\underline{0}) = DF(G(\underline{0}))^{-1} = DF(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix}$ $\quad DG = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & z & y \\ yz^2 & xz^2 & 2xyz \end{pmatrix}$

(5) a.) $\operatorname{grad}(fg) = f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f$

$$\operatorname{grad}(fg) = (f'_x g + f g'_x \quad f'_y g + g'_y f \quad f'_z g + g'_z f)$$
$$= (f'_x \quad f'_y \quad f'_z)\, g + (g'_x \quad g'_y \quad g'_z)\, f \quad \checkmark$$

b.) $D(fF) = F \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot DF$

$f \cdot F = \begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix}$ $\quad D(fF) = \begin{pmatrix} f'_x F_1 + f F'_{1x} & \\ & \cdot \end{pmatrix}$

$$D(fF)_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} fF_i = f'_{x_j} F_i + f F'_{i x_j}$$

Tenzorosan

$$\frac{\partial}{\partial z_j} fF_i = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z_j} F_i}_{\text{külső szorzat}} + \overset{\text{skalár}}{f} \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial z_j}}_{\text{mátrix}}$$

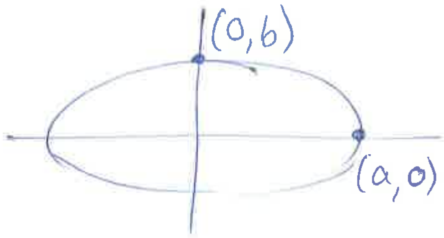
2017 V

Anal 3
– gyak

Hekand 1

(6) origó kp-ú ellipszis 2a, 2b tengelyekkel

$$\begin{cases} x = a\cos t & t \in [0, 2\pi) \\ y = b \sin t & t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



(7) $F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ a fenti görbe mentén

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\int_\Gamma \langle \vec{F}(x,y), d\vec{e} \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \vec{F}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt$$

$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 t \\ b^2 \sin^2 t \end{pmatrix}$

$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a^3 \cos^2 t \sin t + b^3 \sin^2 t \cos t\right) dt$$

$$= -a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \, dt + b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \, dt$$

$$= + \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 t \, (\cos t)' \, dt + \frac{b^3}{3} \int 3 \sin^2 t \, (\sin t)' dt$$

$$= \frac{a^3}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{b^3}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

(8) $G = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ ha $g = x^3y^2z$ akkor grad $g = G$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0,1] \right\}$$

általában $\boxed{\gamma(t) = (B-A)t + A \quad t \in [0,1]}$

$$\int_\Gamma \langle \vec{G}, d\vec{e} \rangle = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt =$$

$$= g(\gamma(t=1)) - g(\gamma(t=0)) = g(1) - g(0) = 12$$

$$\int_a^b \langle G(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt = \int_a^b \langle \operatorname{grad} g(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[g(\gamma(t))\right] dt = g(\gamma(t))\Big|_a^b$$

$$G(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 3t^2 \; 4t^2 \; 3t \\ 2t^3 \; 2t \; 3t \\ t^3 \; 4t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36t^5 \\ 12t^5 \\ 4t^5 \end{pmatrix}$$

$$G(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = (36 + 24 + 12)t^5 = 6 \cdot 12 t^5 = (12t^6)' \checkmark$$

(9) $H(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ Γ vonal mentén

a) $\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t-5 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [0,3] \right\} \Rightarrow A = \gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \gamma(3) = (18, 4, 3)^T$

$\underline{I}$ $h = xyz \Rightarrow \int_\Gamma \langle H, dr\rangle = h(B) - h(A) = 18 \cdot 4 \cdot 3 - 0 = 216$

Potenciál függvény kiszámítása: $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [0,1],\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = r\}$

$V(r) = \int_\Gamma \langle H, dr\rangle$ ahol

(10) potenciálfv-ek felírása

Egy vektormező integrálgörbéi:

$F(r) \Rightarrow \dot\gamma(t) = F(\gamma(t))$ diffegyenlet rendszer megoldásai

2017. IV.
Anal 3
vekanal (1) — 3 — gyak!

Analízis III. 1. heti feladatok, 2016. szeptember 16.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre
   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.
   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

2. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket: $\begin{cases} \mathrm{div}(F) = ? \\ \mathrm{rot}(F) = ? \end{cases}$

3. Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x,y,z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi „szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \mathrm{div}(F)$.
   (c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$.
   HF (d) $\mathrm{div}(F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}(F)\rangle - \langle F, \mathrm{rot}(G)\rangle$.

Ismételjük át a vonal $\int$-ket + potenciált

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

5. Integráljuk az $F(x,y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a, 0)$, végpont $B(0, b)$.

6. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

7. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = (yz \;\; xz \;\; xy)^T$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.
   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t-5, t) \;:\; 0 \le t \le 3\}$.
   (b) Γ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

D1* Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\mathrm{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja: $G(x,y,z) = \int_0^1 t \; F(tx, ty, tz) \times (x \;\, y \;\, z)^T dt$. Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x,y,z) = (y \; z \; x)^T$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\mathrm{rot}(F) = \mathrm{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?

Leti 2. HF amiből min $\underline{11}$
esetleg plusz feladatok.
2 × 15 perc kisZH nagyZH előtti héten

6., 12 hét nagyZH
45perc
~~okt18~~
okt25
Dec 9.

Analízis III. 1. heti feladatok

kisZH: okt 24 (elsőfél...)
kisZH2: dec 2 (4. → ..)

2015. szeptember 11.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Írjuk fel azt az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú vektormezőt, melyre

   (a) - tér minden (x, y, z) pontjából az origóba vezető út feléig mutat a vektor.

   (b) - az F vektormező azt az x tengely körüli (jobb sodrású) rotációt reprezentálja, melynek konstans ω sebessége van.

2. Legyen $F(x, y, z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$. Számoljuk ki a következőket:

   (a) $\operatorname{div}(F) = ?$ $\qquad$ (b) $\operatorname{rot}(F) = ?$

3. Számítsa ki F divergenciáját és rotációját, ha $F(x, y, z) = (x^2y, yz, xyz^2)$.

4. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:

   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

   (b) $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot \operatorname{div}(F)$.

   (c) $\operatorname{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \operatorname{rot}(F)$.

   (d) $\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F)\rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G)\rangle$.

syms x y z real
f = sym('f(x,y,z)')

jacobian(f)

Szept 13
14 - ..

$\left(\overset{5+5}{2 \text{ kisZH}} + \overset{45+45}{2 \text{ nagyZH}}\right) + \underbrace{\text{HF} - 11}_{\text{csak ha}}$ HF ≥ 11

2016
reload 1

Anal 3
gyak 1

Ismétlés: Vonal $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban. Vektormező vonalintegrálja görbe mentén.

5. Integráljuk az $F(x,y) = (x^2, y^2)$ vektormezőt a Γ negyed-ellipszis mentén. Az ellipszis origó középpontú, tengelyeinek hossza $2a$ és $2b$. Kezdőpont $A(a,0)$, végpont $B(0,b)$.

6. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját a $P(1,2,3)$ pontot az origóval összekötő egyenes szakasz mentén. Az irányítás 0-ból P-be vezet.

7. Számítsuk ki az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ vektormező vonalintegrálját egy Γ vonal mentén.

   (a) $\Gamma = \{\gamma(t) = (2t^2, 3t-5, t) \ : \ 0 \le t \le 3\}$.

   (b) Γ a $P_1(-1,2,0)$ és $P_2(5,5,9)$ pontok közötti, koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenes szakaszokból álló út. Az irányítás P_1-ből P_2-be vezet.

   Potenciálos-e a vektormező?

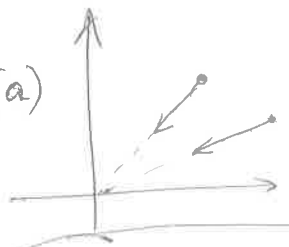
D1* Tegyük fel, hogy az F vektormezőre $\operatorname{div}(F) = 0$. Belátható, hogy ekkor vektorpotenciálos, éspedig vektorpotenciálja:

$$G(x,y,z) = \int_0^1 t\ F(tx,ty,tz) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt.$$

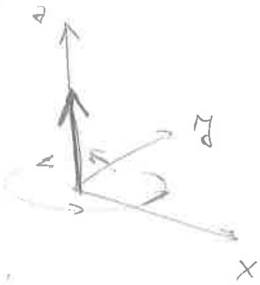
Egyszerűbb feladat: próbáljuk ki a fenti képletet az $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ vektormező esetén.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre $\operatorname{rot}(F) = \operatorname{rot}(G)$. Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről, mi lehet a különbség köztük?

① (a)



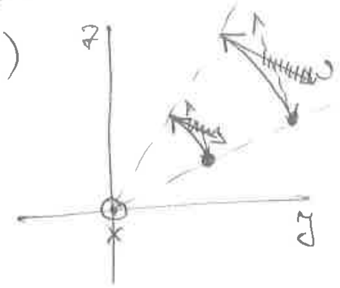
$$F = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)



$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

② $$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right) = \begin{pmatrix} \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div} F = 0$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

③ $$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} F = 2xy + z + 2xyz$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + xz^2 \\ -yz^2 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

④ a) $$\nabla(fg) = \frac{\partial fg}{\partial x} + \frac{\partial fg}{\partial y} + \frac{\partial fg}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} g + f\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial g}{\partial z} =$$

$$= \nabla f \cdot g + f \nabla g$$

b) $$\operatorname{div}(fF) = \frac{\partial f F_1}{\partial x} + \frac{\partial f F_2}{\partial y} + \frac{\partial f F_3}{\partial z} =$$

$$= F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} + f\left(F_{1\,x}' + F_{2\,y}' + F_{3\,z}'\right)$$

$$= \langle F_1, \nabla f \rangle + f \nabla F$$

2016 rel.and1

Anal 3 cycle 1 2016

(c) $\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (fF_3)'_y - (fF_2)'_z \\ (fF_1)'_z - (fF_3)'_x \\ (fF_2)'_x - (fF_1)'_z \end{pmatrix} =$

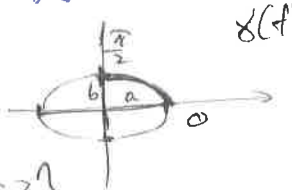
$$= \begin{pmatrix} f'_y F_3 - f'_z F_2 \\ f'_z F_1 - f'_x F_3 \\ f'_x F_2 - f'_z F_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} F'_{3y} - F'_{2z} \\ F'_{1z} - F'_{3x} \\ F'_{2x} - F'_{1z} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f(\nabla \times F) = \nabla f \times F + f(\nabla \times F)$$ ✓

(d) HF

(*) előbb ezt + potenciálos gyorsabb.

(5) $F(x,y) = (x^2 \quad y^2)$



$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$

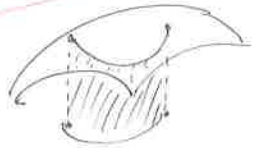
$\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

$$I = \int_\Gamma F(x,y)\, d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt =$$

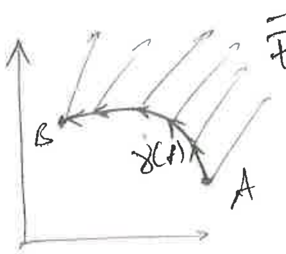
$$= \int_0^{\pi/2} \left(a^3 \cos^2 t\, (\cos t)'\, dt + b^3 \sin^2 t\, (\sin t)'\, dt\right) =$$

$$= a^3 \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + b^3 \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -a^3 \frac{1}{3} + b^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$



(6) skalár: $I = \int_\Gamma f(x,y,z)\, dl = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot\gamma(t)\|\, dt$



vektor: $W = \int_\Gamma F(x,y,z)\, d\vec{l} = \int_a^b F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt$

(6) $F(x,y,z) = (3x^2y^2z,\ 2x^3yz,\ x^3y^2)$

$\Gamma: A \to B$ akkor $\gamma(t) = t(B-A) + A$; $t \in [0,1] \Rightarrow \gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$

$\Gamma: O \to P(1\,2\,3) \Rightarrow \gamma(t) = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\dot\gamma(t) = P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$W = \int_\Gamma F\, d\vec{l} = \int_0^1 F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(3t^2\cdot 4t^2\cdot 3t,\ 2t^2\cdot 2t\cdot 3t,\ t^3\cdot 4t^2\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 36t^5 + 24t^5 + 12t^5\, dt =$$

$$= 72\int_0^1 t^5\, dt = \frac{72}{6} t^6\Big|_0^1 = 12$$

(7) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$; $\Gamma = \left\{\gamma(t) = \begin{pmatrix}2t^2\\3t-5\\t\end{pmatrix} : 0 \le t \le 3\right\}$; $\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}4t\\3\\1\end{pmatrix}$

$$W = \int_\Gamma F(x,y,z)\, d\vec{l} = \int_0^3 F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^3 \left(\cancel{F}(3t-5)t,\ 2t^3,\ 2t^2(3t-5)\right)\begin{pmatrix}4t\\3\\1\end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^3 \left(12t^3 - 20t^2 + 6t^3 + 6t^3 - 10t^2\right) dt =$$

$$= \int_0^3 \left(24t^3 - 30t^2\right) dt = 6t^4\Big|_0^3 - 10t^3\Big|_0^3 =$$

$$= 6\cdot 81 - 10\cdot 27 = 486 - 270 = \underline{216}$$

$\gamma(0) = \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$

$\gamma(3) = \begin{pmatrix}18\\4\\3\end{pmatrix}$

$\bar\gamma(t) = t\begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18t\\9t-5\\3t\end{pmatrix}$

$\dot{\bar\gamma}(t) = \begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix}$

c megoldás jó

$$W = \int_\Gamma F\, d\vec{l} = \int_0^3 F\begin{pmatrix}18t\\9t-5\\3t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18\\9\\3\end{pmatrix} dt = 216!!!$$

2016

vehand 1

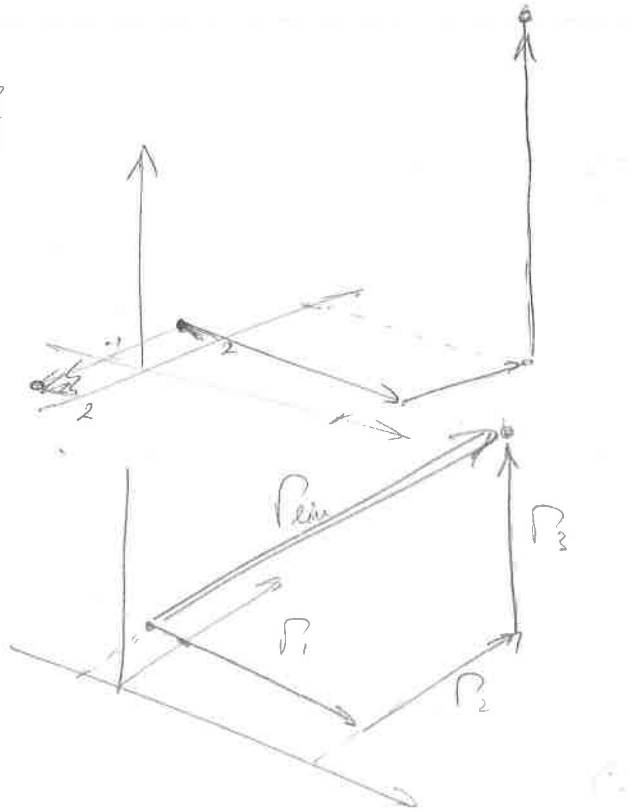
mal 3

gyak 1

(7) Folyt. Potenciálos-e?

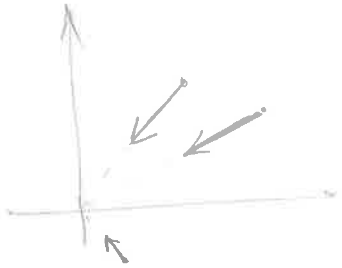
$\nabla \times F = 0$! $\Rightarrow \exists f$ u.h. $F = \nabla f$

$$\int_{\Gamma} F \, d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} F \, d\vec{l} + \int_{\Gamma_2} F \, d\vec{l} + \int_{\Gamma_3} F \, d\vec{l}$$



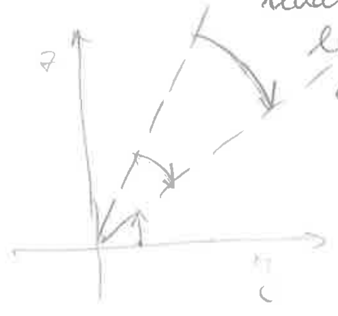
① $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad F(x,y,z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

(a)



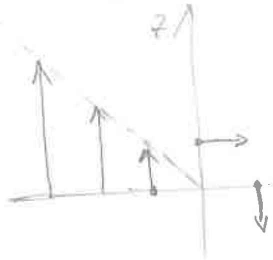
$$\|F\| = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4}} = \underbrace{\frac{1}{2} r}$$

(b)



tehát a vektor hossza lineárisan nő az origótól vett távolság függvényében (az yz tengelyen)

jobb szemléltetés: $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$; $\|F\| = r_{yz}$



$(0,1,0) \mapsto (0\ 0\ -1)$

$(0,0,1) \mapsto (0\ 1\ 0)$

$(0,-1,0) \mapsto (0\ 0\ 1)$

$(0,-2,0) \mapsto (0\ 0\ 2)$

---

② $F(x,y,z) = \left(\frac{y}{z}, \frac{z}{x}, \frac{x}{y}\right)$

$$\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$$

tehát ez egy vektorpotenciálos

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Matlabbal ellenőrizve

③ $F(x,y,z) = (x^2 y, yz, xyz^2)$

$$\nabla F = 2xy + z + 2xyz$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2 y \\ yz \\ xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz^2 - y \\ 0 - yz^2 \\ 0 - x^2 \end{pmatrix}$$

Matlabbal ellenőrizve

Divergencia geometriai jelentése: ahol + ott a vektorok „divergálnak" ahol ott „fogyatkozik az anyag", ahol negatív ott convergálnak: ott sűrűsödik az anyag.

Megérthetőbben: ahol negatív ott van egy nyelő ahova elfolyik ahol pozitív: ott van egy forrás ahonnan folyik. VÍZ

a víz nem összenyomható nem tud sűrűsödni

A levegő esetén ahol + ott vagy van egy forrás, vagy ott „ritkul" az anyag, ahol − ott vagy van egy nyelő, vagy sűrűsödik a levegő

pld: hanghullám

Vonal menti integrálok:

1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b]\}$

$$\int_\Gamma f(r)\, dl = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

mivel:

$r := \gamma(t)$

$$dr = \dot\gamma(t)\, dt \Rightarrow \begin{cases} dx = \dot\gamma(t)_1\, dt \\ \vdots \\ dz = \dot\gamma(t)_3\, dt \end{cases}$$

$$dl = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

$$\dot\gamma(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}$$

vagyis $\dot\gamma(t)$ ÉRINTŐ irányú γ-no

2) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b]\}$

$$\int_\Gamma F(r)\, d\vec{l} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt$$

~~F erőtérben~~

F erőtér egy anyagi pontra végzett munkája míg a Γ görbén végigmegy!

$$W = \langle \vec F, \Delta \vec l \rangle$$

④ Igazoljuk a szorzatderiválási szab.

(a) $\nabla fg = \frac{\partial}{\partial r} fg = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot g + f \frac{\partial g}{\partial r}$

ahol $r = (x\ y\ z)^T$

(b) $\mathrm{div}(fF) = \langle F, \mathrm{grad} f\rangle + f \cdot \mathrm{div} F$

$$\text{b.o.} = \frac{\partial f F_1}{\partial x} + \frac{\partial f F_2}{\partial y} + \frac{\partial f F_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) =$$

$$= \langle \mathrm{grad} f, F\rangle + f\, \mathrm{div}(F)$$

(c) $\mathrm{rot}(fF) = \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$

HF

$$\mathrm{rot}(fF) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f F_3}{\partial y} - \frac{\partial f F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f F_1}{\partial z} - \frac{\partial f F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f F_2}{\partial x} - \frac{\partial f F_1}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} F_2 - f \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla f \times F + f \cdot \mathrm{rot}(F)$$

~~Vonal menti $\int f g^T d\vec{e}$; $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $\Gamma = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [a,b]\}$~~

~~$\int_\Gamma f(r)\, de = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot\gamma(t)\|\, dt$~~

⑤ $F(x,y) = (x^2\ y^2)^T$

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ \gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\int_\Gamma F(x,y)\, d\vec{e} = \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} -a^2\cos^2 t \cdot a \sin t + b^2 \sin^2 t \cos t\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} a^3 \cos^2 t (\cos t)'\, dt + \int_0^{\pi/2} b^3 \sin^2 t (\sin t)'\, dt$$

$$= a^3 \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + b^3 \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -a^3 \frac{1}{3} + \frac{b^3}{3} = \boxed{\frac{b^3 - a^3}{3}}$$

Matlabbal ellenőrizve

⑥ $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ $\quad \Gamma: O \mapsto P$

$\gamma(t) = O + t(P - O)$; $t \in [0,1]$

$\gamma(t) = tP = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P$

$$\int_\Gamma F(r)\, d\vec{e} = \int_0^1 F(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (9 \cdot 4t^5 + 3 \cdot 3 \cdot t^5 + 3 \cdot 4t^5)\, dt =$$

$$= (36 + 24 + 12) \int_0^1 t^5\, dt = \frac{28}{6} t^6 \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{72}{6} = 12$$ Matlabbal ellenőrizve

-5-

hod 3
gyak 1

2016
vektoranal 1

(7)

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$ potenciálos-e?

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \cancel{x} - x \\ y - y \\ z - z \end{pmatrix} = \vec{0}$$ tehát skalárpotenciálos

$\Downarrow$

$\exists f = \int_\Gamma F \, d\vec{l}$ ahol „Γ" tetszőleges"

legyen origóban 0 a potenciál

$f(A) = \int_0^A F \, d\vec{l}$ tetszőleges út-on!

pld: $A = (x,y,z) \Rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$ $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$f(A) = \int_0^1 F(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= 3\int_0^1 t^2 xyz \, dt = 3xyz \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = xyz.$$

csúnya levezetés

TODO

Tipikus potenciálok:

Gravitációs mező potenciálja:

$V_G = +gz \Rightarrow G = -\nabla V_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

m tömegű test potenciális energiája: $E_{pot} = m \cdot V_G \Leftarrow$

m-re ható erő:

$\vec{F}_m = m \cdot \vec{G}$

Elektromos potenciál egy ponttöltés körül:

$V_E = k_e \frac{Q}{r}$, ha Q az origóban van

$$= k_e \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k_e Q \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$E = -\nabla V_E = \frac{+1}{2} k_e Q \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$= k_e \frac{Q}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

q töltés potenciális energiája: $E_{pot} = qV_E$

q-ra ható erő

$\vec{F}_q = q\vec{E}$ (Coulomb's law)

2016 vektanal 1

Anal 3 'gyak' tábla

Analízis III. 2. heti feladatok
2017. szeptember 22.

Vektormező. Derivált jellemzése: divergencia és rotáció. Skalár- és vektorpotenciál.

1. Legyen $F(x,y,z) = \frac{y}{z}\underline{i} + \frac{z}{x}\underline{j} + \frac{x}{y}\underline{k} = \begin{pmatrix} y/z \\ z/x \\ x/y \end{pmatrix}$. Számoljuk ki a következőket:
   (a) div $(F) = ?$ (b) rot $(F) = ?$

2. div $\left(\text{grad}\left(|\underline{r}|^5\right)\right) = ?$

3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ valós differenciálható függvények és $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:
   (a) $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
   (b) div $(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f \cdot$ div (F).
   HF1 (c) rot $(fF) = \nabla f \times F + f \cdot$ rot (F).
   (d) div $(F \times G) = \langle G, \text{rot}\,(F)\rangle - \langle F, \text{rot}\,(G)\rangle$.

4. Milyen a és b értékekre lesz konzervatív (azaz skalárpotenciálos) az alábbi vektormező:
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}.$$
   Erre az értékekre határozzuk meg F egy skalárpotenciálját.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

5. Speciális esetként legyen a $C \subset \mathbb{R}^2$ görbe egy valós függvény gráfja:
$$\gamma(t) = (t, \varphi(t)), \qquad t \in [a,b].$$
   Mi lesz egy kétváltozós $f(x,y)$ függvény vonalintegrálja: $\int_C f(x,y)\mathrm{d}l = ?$

6. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2+3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\}.$$

HF2 7. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

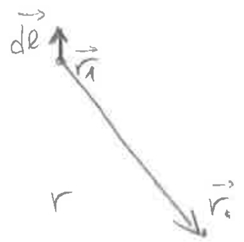
8. Legyen $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
   (a) Határozzuk meg az $F = \nabla f$ vektormezőt.
   (b) Mennyi lesz $\int_C \langle F, \mathrm{d}l\rangle$ maximális értéke a síkbeli lehetséges görbék mentén? Adjunk meg egy lehetséges görbét, ahol ez a maximális érték elérhető.

D1* Tegyük fel, hogy az $f(x,y,z)$ és $g(x,y,z)$ függvények gradiense ugyanaz egy $D \subset \mathbb{R}^3$ összefüggő tartományban. Igazoljuk, hogy ekkor $\exists c$ konstans, melyre $f(x,y,z) = g(x,y,z) + c$ ebben a D tartományban.

D2* Tegyük fel, hogy az F és G differenciálható vektormezőkre rot $(F) =$ rot (G). Mit mondhatunk az F és G vektormezőkről?

Biot-Savart törvény, mágneses tér

$$B(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3}$$



Anal 3 gyak 2 2017 II

---

① $F = \begin{pmatrix} \frac{y}{z} \\ \frac{z}{x} \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$ $\qquad \operatorname{div} F = 0$

$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \\ -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y} \\ -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \end{pmatrix}$

elmondani a vektoriális szorzat dolgait

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cy - bz \\ az - cx \\ bx - ay \end{pmatrix}$

② $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}$ $\qquad \nabla f = \frac{5}{2} \cdot (x^2+y^2+z^2)^{+\frac{3}{2}} \cdot (2x \;\; 2y \;\; 2z)^T$

$= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}$ $\qquad = \frac{5}{2} (x^2+y^2+z^2)^{+\frac{3}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

tehát $\operatorname{grad} f = 5(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial(\operatorname{grad} f)_x}{\partial x} = \frac{5 \cdot 3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x + 5(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 15\, r\, x^2 + 5 r^3$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 15\, r(x^2+y^2+z^2) + 15 r^3 = 30 r^3$$

Matlab:

```
syms x y z real
r=[x; y; z];
f=(x^2+y^2+z^2)^(5/2);
gradf = gradient(f,r)
divgradf= divergence(gradf,r)
```

vekanal 1

(3) (a) volt múlt órán

Matlabban szimbolikusan be van bizonyítva

(b) $\operatorname{div}(fF) = \langle F, \operatorname{grad} f\rangle + f\cdot \operatorname{div} F$

$$\nabla(fF) = \langle F, \nabla f\rangle + f\cdot \nabla F$$

$$\langle \nabla, fF\rangle = \langle F, \nabla f\rangle + \langle \nabla, F\rangle \cdot f$$

$$fF = \begin{pmatrix} fF_1 \\ fF_2 \\ fF_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla(fF) = f'_x F_1 + f'_y F_2 + f'_z F_3 + f F'_{1x} + f F'_{2y} + f F'_{3z} = \langle F, \nabla f\rangle + f\cdot \nabla F$$

(c) $$\nabla\times(fF) = \begin{pmatrix} (fF_3)'_y - (fF_2)'_z \\ (fF_1)'_z - (fF_3)'_x \\ (fF_2)'_x - (fF_1)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_y F_3 - f'_z F_2 \\ f'_z F_1 - f'_x F_3 \\ f'_x F_2 - f'_y F_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} F'_{3y} - F'_{2z} \\ F'_{1z} - F'_{3x} \\ F'_{2x} - F'_{1y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \\ f'_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} + f\cdot \nabla\times F \quad ✓$$

(d) $\operatorname{div}(F\times G) = \langle G, \operatorname{rot} F\rangle - \langle F, \operatorname{rot} G\rangle$

$$F\times G = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 G_3 - F_3 G_2 \\ F_3 G_1 - F_1 G_3 \\ F_1 G_2 - F_2 G_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(F\times G) = F'_{2x} G_3 - F'_{3x} G_2 + F_2 G'_{3x} - F_3 G'_{2x} + \dots$$

(4) $a, b = ?$ u.h. $F = \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 + ayz \\ bxyz + y^2 \end{pmatrix}$ skalárpot

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} bxz + 2y - 2xz - ay \\ 2yz - byz \\ z^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \text{I } 2yz = 0 \to y = 0$$

tehát $\begin{cases} (b-2)xz + (2-a)y = 0 \\ (2-b)yz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}$

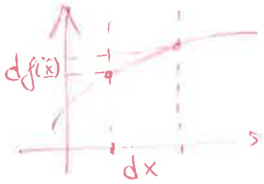
5. legyen $C: \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ $\quad t \in [a,b]$

$$\int_C f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{1+\varphi'(t)} \, dt$$

$$\vec{dl} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \Rightarrow dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\varphi'(t)} \, dt$$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = \varphi' dt \end{array}$$

$$d f(x) = f'(x) \, dx$$



$$d f(x,y) = f'_x(x,y) \, dx + f'_y(x,y) \, dy = \langle \mathrm{grad} \, f, dl \rangle$$

6. $f = x^2 + 3y \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Gamma = \left\{ \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \ t \in [0,1] \right\} = \left\{ \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 0.5t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in [0,2] \right\}$$

$$\int_\Gamma f \, dl = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \sqrt{1+2^2} \, dt = \int_0^1 (t^2 + 6t)\sqrt{5} \, dt = (*)$$

$$= \int_0^2 f(\gamma_2(t)) \sqrt{1.25} \, dt = \int_0^2 (0.25t^2 + 3t)\sqrt{1.25} = (**)$$

$$(*) = \left(\frac{t^3}{3} + 3t^2 \right)\Big|_0^1 \sqrt{5} = \left(\frac{1}{3} + 3 \right)\sqrt{5}$$

$$(**) = \left(\frac{0.25}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 \right)\Big|_0^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1}{3} + 3 \right)\sqrt{5}$$

(7) leggyen HF

(8) $f = \sin x \cos y \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

a) $F = \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ -\sin x \sin y \end{pmatrix}$

b) leggyen A és B pont $\Rightarrow$ $C: \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a,b] \quad \begin{matrix} \gamma(a) = A \\ \gamma(b) = B \end{matrix} \right\}$

$$\int_C \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle = \int_a^b \langle \text{grad } f, \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt =$$

$$= f(B) - f(A)$$

$f_{min} = -1$ pld ha $(x,y) =$

$$\text{grad } f = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = 0 \\ -\sin x \sin y = 0 \end{cases}$$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k_1 \pi$

$\sin y = 0 \Rightarrow y = k_2 \pi$

$f_{extr.} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k_1 \pi\right) \cdot \cos(k_2 \pi)$

$\to -1$ pld ha $k_1 = 0$, $k_2 = 1$

$\to +1$ pld ha $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

tehát $\max_{C \subset \mathbb{R}^2} \int_C \langle \vec{F}, d\vec{e} \rangle = 2$

pld $C = \left\{ \gamma(t) = (B - A)t + A \;\middle|\; A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Analízis III. 2. heti feladatok

2016. szeptember 23.

Vonalintegrál. Cirkuláció.

1. „*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\}.$$

2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

(*)

Felületi integrál. Fluxus.

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u,v,t(u,v)) \ : \ (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + t_u'^2(u,v) + t_v'^2(u,v)}d(u,v).$$

(+1)

(+2)

4. ✓ Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \ \mathrm{d}S$ felületi integrált.

5. ✓ Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \ \mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.

6. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb.

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

(1)

7. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradszkij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)\mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))\mathrm{d}(x,y),$$
ahol S egy $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény felülete, $S = \{s(x,y) = (x,y,t(x,y)) \ : \ (x,y) \in D\}$.

8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

   (a) $F(x,y,z) = (0,0,yz)$ **(HF)** (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy div $F = 0$.

   (a) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

   (b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

vekanal 1

(+2) Jegyzet 14. oldal 5. gyakorlat (+ tartalék) p17. Példa

2014b [anal 3 gyak 2

* Kiegészítés. $S=\{ s(u,v) : (u,v) \in D \}$

Felület felszíne : $f \equiv 1$ választással
skalármező felületi integráljával

$$A(S)=\iint_D | s'_u \times s'_v | \, d(u,v)$$

(+1)

$$s(u,v)=\begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le \pi \end{matrix}$$

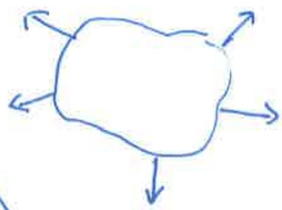
a) Milyen felület a térben?

b) Mennyi a felszíne

(**) Kiegészítés.

Kétdimenziós fluxust is lehet def-ni.

$\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima görbe. $F(x,y)=\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$



Fluxus : $\int_\Gamma F \cdot \underline{n} \, ds$

$\underline{n}$: normálvektor, egységnyi hosszú

ha $\dot\gamma=(\dot x,\dot y)$ akkor erre $\perp$: $n_0=(-\dot y,\dot x)$

Analízis III. 2. heti feladatok

2016. szeptember 23.

Vonalintegrál, Cirkuláció

1. „*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": integráljuk az $f(x,y) = x^2 + 3y$ skalármezőt a $P(1,2)$ pontot és az origót összekötő egyenes szakasz mentén két féle paraméterezés mellett.
$$\Gamma = \{\gamma_1(t) = (t, 2t), t \in [0,1]\} = \{\gamma_2(t) = (0.5t, t), t \in [0,2]\}.$$
2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai (0,0) és (1,1), körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Felületi integrál, Fluxus

3. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \ : \ (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + {t'_u}^2(u,v) + {t'_v}^2(u,v)}\, d(u,v).$$
4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x + y + z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \, dS$ felületi integrált.
5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y, x, z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \, \mathrm{dS}$ felületi integrált.
6. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb.

HF M az origó középű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel

7. Igazoljuk a Gauss-Osztrogradszkij tétel bizonyításakor használt lemmát, vagyis:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z) \mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y)) \mathrm{d}(x,y),$$
ahol S egy $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény felülete, $S = \{s(x,y) = (x, y, t(x,y)) \ : \ (x,y) \in D\}$.
8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$.
9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van, és

   (a) $F(x,y,z) = (0, 0, yz)$ **(HF)** (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$. Legyen $F = \nabla f$. Igazolja, hogy div $F = 0$.

a) Mennyi F fluxusa az origó középű egységsugarú gömb felületére nézve?

b) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

Anal 3 gyak 3 (2017 II)

(1) $f : D \to \mathbb{R}$ folyt. diff.

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v)$$

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \qquad s'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \qquad s'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix}$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} -f'_u \\ -f'_v \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow dS = \sqrt{f'^2_u + f'^2_v + 1} \; du\, dv$$

(+1) $$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \qquad u \in [0,1] \quad v \in [0, 2\pi]$$ $v \in [0, 2\pi)$!

a) ez egy kúp

b) $$\int_S dS = \int_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v)$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u\cos^2 v + u \sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\| s'_u \times s'_v \| = \sqrt{u^2 + u^2} = \sqrt{2u^2} = u\sqrt{2}$$

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u\sqrt{2} \, dv\, du = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u \, du \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}$$ ✓

Középiskolás módszerrel

$r = h \Rightarrow R = r\sqrt{2}$

$A_R = \pi R^2 = 2\pi r^2 \leftarrow 2\pi R$

$A_S = \frac{2\pi r^2}{2\pi R} \cdot 2\pi r \leftarrow 2\pi r$

$= \frac{2\pi r^2}{2\pi r \sqrt{2}} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r^2}{\sqrt{2}}$

$A_R = \pi R^2$

$K_R = 2\pi R$

$K_r = 2\pi r$

$A_S = A_R \cdot \frac{K_r}{K_R} = \pi R^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi R}$

$= \pi R r =$

$= \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

2017 II

Anal 3 gyak 3.

-1-

Analízis III. 2. heti feladatok

2015. szeptember 18.

$\gamma_1 = (t, 2t)$

$\gamma_2 = (t/2, t)$

Vonalintegrál. Cirkuláció.

$f(x,y) = x^2 + 3y^2$

1. "*Vonalintegrál értéke független a vonal paraméterezésétől*": Th. Garrity könyv 89. oldal alján kezdődő példa.

2. Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y) = (x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Felületi integrál. Fluxus.

3. Határozzuk meg az egységgömb felszínét. (Paraméterezés az előadáson szerepelt.)

4. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u, v, t(u,v)) \ : \ (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:

fl

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2(u,v) + {t'_v}^2(u,v)}d(u,v).$$

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x+y+z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \ \mathrm{d}S$ felületi integrált.

6. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F \ \mathrm{d}\mathbf{S}$ felületi integrált.

7. $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$. Határozzuk meg fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. (G-O tétellel!)

HF M az origó közepű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

8. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2+y^2=4$ henger egy darabja, melynek felső illetve alsó körlapja a $z=4$ ill. $z=0$ sík ban van. Továbbá az F vektormező: $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt ezekben a konkrét esetekben: M az $x^2+y^2=1$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z=1$ ill. $z=0$ sík ban van, és

   (a) $F(x,y,z) = (0,0,yz)$ **(HF)** $\qquad$ (b) $G(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

(a) $F = \nabla f = ?$ Igazolja, hogy $\operatorname{div} F = 0$.

(b) Mennyi F fluxusa az origó közepű, egységsugarú gömb felületére nézve?

(c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

+ G-O t. bizonyításához $\boxed{\text{téma}}$

vekanal 2

2016 anal 3 gyak 2 feladatok

(1) $f(x,y) = x^2 + 3y$ $\gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

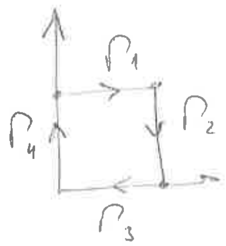
$\gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ $t \in [0,2]$

$$W_1 = \int_{\Gamma_1} f(x,y)\,dl = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^1 (t^2 + 6t)\sqrt{1+4}\,dt =$$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 (t^2+6t)\,dt = \sqrt{5}\left(\frac{t^3}{3} + 3t\right)\Big|_0^1 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{3}+3\right) = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$W_2 = \int_{\Gamma_2} f(x,y)\,dl = \int_0^2 f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} + 3t\right)\sqrt{\frac{1}{4}+1}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{t^3}{12} + \frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{1}\right) = \frac{10\sqrt{5}}{2}$$

(2) 

$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ kérdés: $\oint_{\Gamma} F(x,y)\,d\vec{l} =$

$\gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

$$= \sum_{k=1}^{4} \int_{\Gamma_k} F(x,y)\,d\vec{l}$$

$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

1: $\int_{\Gamma_1} F(x,y)\,d\vec{l} = \int_0^1 t \cdot 1\,dt = \frac{1}{2}$

2: $\int_0^1 (1-t)(-1)\,dt = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

3: $\int_0^1 (1-t)(-1)\,dt = -\frac{1}{2}$

4: $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

tehát $\oint_{\Gamma} F(x,y)\,d\vec{l} = 0$

Anal 3 gyak 2
feladatlap
2016.09.23

~~Adott $S = \{(x, y, z(x,y)), (x,y) \in D\}$~~

~~felület, $\underline{n}(x,y,z)$ $\quad S \perp n \quad \forall (x,y,z)$-ban~~

Adott : $S = \{ s(x,y) = (x, y, z(x,y)), (x,y) \in D \}$

felület $\underline{n}(x,y,z)$, $\underline{n}(x,y,z) \perp s(x,y) \quad \forall (x,y,z) \in S$

Legyen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Ekkor} \quad \iint_S f(x,y,z)\, n_3(x,y,z)\, dS = \pm \iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)}$$

Biz.

S normálvektora megegyezik az érintősík normálvektorával.

$\underline{n} \Rightarrow (z'_x, z'_y, -1)$

Normál vektora $z(x,y)$ felületnek (x_0, y_0) pontban:

$$-\underline{n} = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

normálva:

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} \begin{pmatrix} z'_x \\ z'_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

tehát $n_3 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f'(x_0) = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$

$(x - x_0) f'(x_0) = y - y_0$

$x f'(x_0) - y = x_0 f'(x_0) - y_0$

$\underline{n} \cdot (x,y) = \underline{n} \cdot (x_0, y_0)$

Érintő sík egyenlete:

$x f'_x(x_0,y_0) + y f'_y(x_0,y_0) - z = \underline{n}\, \underline{r_0}$

vékony 2

Anal 3 gyak 2

2016. 09. 23

(T) Gauss Osztrogradskij

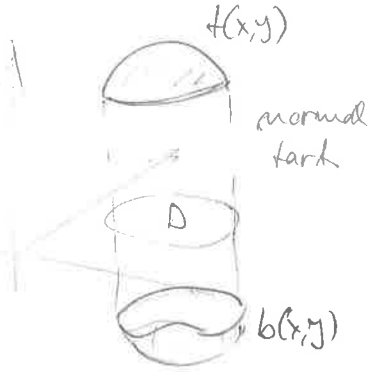
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\iiint_M \nabla F(x,y,z)\, dV = \oiint_{\partial M} F\, d\vec{S}$$

Tagonként igazoljuk:

$$\iiint_M \left(f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z} \right) dV = \oiint_{\partial M} \left(f_1 n_1 + \ldots + f_3 n_3 \right) dS$$

$$\iiint_M f'_{3z}\, dV \overset{?}{=} \oiint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS + \iint_{\partial M_{bottom}} f_3 n_3\, dS$$



$$\partial M_{top} = \left\{ s_t(x,y) = (x, y, t(x,y)) \mid (x,y) \in D \right\}$$

$$\partial M_{bot} = \left\{ s_b(x,y) = (x, y, b(x,y)) \mid (x,y) \in D \right\}$$

$$\iiint_M f'_{3z}\, dV = \iint_D \left(\int_{b(x,y)}^{t(x,y)} f'_{3z}\, dz \right) d(x,y) =$$

$$= \iint_D f_3 \Big|_{b(x,y)}^{t(x,y)} d(x,y) = \iint_D f_3(x,y,t(x,y)) - f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

$t(x,y)$ normálvektora (x,y)-ban: $\underline{n} = \begin{pmatrix} -t'_x \\ -t'_y \\ +1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{(t'_x)^2 + (t'_y)^2 + 1}}$

$$dS = \| t'_x \times t'_y \| \; d(x,y) \; \cancel{\quad} = \sqrt{t'^2_x + t'^2_y + 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \oiint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS &= \iint_D f_3(x,y,t(x,y)) \cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{t'^2_x + t'^2_y + 1}}} \cdot \cancel{\| t'_x \times t'_y \|}\, d(x,y) = \\ &= \iint_D f_3(x,y,t(x,y))\, d(x,y) \end{aligned}}$$

$$\oiint_{\partial M_b} f_3 n_3\, dS = -\iint_D f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

Méréstechnika

vekand 2

Anal 3 gyak 2

2016.03.22.

Gauss-Osztrogradszkij

(4) $S(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ tömeg $\int \rho \, dV$
$\hookrightarrow$ töltés $\int \sigma \, dV$
$\hookrightarrow$ tehetetlenségi nyom. $\int r^2 \rho \, dV$

$f(x,y,z) = x+y+z$

$$\int_S f \, dS = \iint_\Delta f(s(u,v)) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| d(u,v) = \iint_\Delta (u+\cancel{v}+u-\cancel{v}+u)\sqrt{6} \, d(u,v) =$$

$$\left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$= 3\sqrt{6} \int_0^1 u \, du \int_0^1 dv = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

(C) $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}$ $\quad \partial M$: origó köz. gömb $R=2$

$$\partial M = \left\{ s(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\sin\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; (\theta,\varphi) \in \underbrace{[0,2\pi)\times[0,\pi]}_{\Delta} \right\}$$

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F(x,y,z)\, dS = \iint_\Delta F(s(\theta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial \varphi} \right) d(\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ -\cancel{\theta} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ -R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - R^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -R^2\sin^2\varphi\cos\theta \\ -R^2\sin^2\varphi\sin\theta \\ -R^2\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix} = -R^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi\cos\theta \\ \sin^2\varphi\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

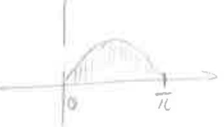
$$F(s)\cdot n = -R^3\sin^3\varphi\cos^2\theta - 2R^3\sin^3\varphi\sin^2\theta - 5R^3\cos^2\varphi\sin\varphi$$

$$\Phi = -R^3 \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta - 2R^3 \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta + 5R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \cos^2\varphi (\cos\varphi)' \, d\varphi =$$

$$\int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi (1-\cos^2\varphi) \, d\varphi = \int_0^\pi \sin\varphi + \cos^2\varphi (\cos\varphi)'_\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\cos\varphi \Big|_0^\pi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 + \frac{\cos^3\pi - \cos^3 0}{3} = 1+1+\frac{-1-1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \pi$$



$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} \, d\theta = \pi$$

vekond z
Anal 3
gyak 2.

$$(*)\quad \Phi = \left(-R^3\pi - 2R^3\pi\right)\cdot\frac{4}{3} + 5R^3\,\frac{-2}{3}\cdot 2\pi =$$

$$-3R^3\pi\,\frac{4}{3} - 5R^3\,\frac{2}{3} = -R^3\left(4\pi + \frac{20\pi}{3}\right) = -R^3\pi\left(4+\frac{20}{3}\right) = -8\cdot\frac{4\pi R^2}{3}$$

$$\oiint_{\partial M} F\,d\vec{S} = \iiint_M \nabla F\,dV = 8\underbrace{\iiint_M dV}_{\text{gömb térfogat}} = 8\cdot\frac{4\pi R^3}{3}$$

Tehát csúnya megoldás:

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F\,d\vec{S} = \iint_D F(s(u,v))\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial s}{\partial v}\times\frac{\partial s}{\partial u}\right)}_{\text{csúnya}}\,d(u,v)$$

$\longrightarrow$ elég általános, Matlabbal ez implementálható

Szebb megoldás:

$$\Phi = \oiint_{\partial M} F\cdot \underline{n}\,dS = \oiint_{\partial M} F(x,y,z)\cdot\underline{n}(x,y,z)\,dS \underset{\text{polár koord}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\det(\Delta s)\,F(s)\,\underline{n}(s)\,d\varphi\,d\theta$$

$$dS = \underbrace{\left\|\frac{\partial s}{\partial u}\times\frac{\partial s}{\partial v}\right\|}_{\det(\text{Jacobi})}\,d(u,v)$$

vekand 2

hud 3 jegy 2 [uncertain]

feladatlapnál [uncertain]

$$F = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix} \qquad R \text{ sugarú gömb}$$

G–O

$$\boxed{\iiint_M \nabla F \, dV = \oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle}$$

$$\nabla F = 8 \Rightarrow \iiint_M \nabla F dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^\pi 8 r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta = 8\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$\cancel{= 2\pi \cdot \frac{8}{3} R^3 \cdot \pi = \frac{16}{3} R^3 \pi^2}$$

$$= 8 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi$$

$$= \boxed{\frac{32\pi}{3} R^3} \overset{R=2}{=} \frac{256\pi}{3} \checkmark$$

$$\oiint_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iint_D (R\cos\theta \sin\varphi \quad 2R\sin\theta\sin\varphi \quad 5R\cos\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{R} \cdot R^2 \sin\varphi \, d(\varphi,\theta)$$

$$= R^3 \iint_D (\cos^2\theta \sin^2\varphi + 2\sin^2\theta\sin^2\varphi + 5\cos^2\varphi) \sin\varphi \; d(\theta,\varphi)$$

$$= R^3 \iint_D (\cos^2\theta \sin^3\varphi + 2\sin^2\theta \sin^3\varphi + 5\cos^2\varphi \sin\varphi) \; d(\theta,\varphi)$$

$$R^3 \Big(\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta}_{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi \, d\theta} \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi + 2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^\pi \sin^3\varphi \, d\varphi + 10\pi \cdot \frac{1}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^\pi \Big)$$

$$= R^3 \Big(\pi \int_0^\pi (\cancel{\sin\varphi} - \cos^2\varphi \sin\varphi) d\varphi + 2\pi \int_0^\pi \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi + 10\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \Big)$$

$$= R^3 \Big(+ 3\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2$$

2017

vektoranalízis 2. | Anal 3 gyakorló feladatok

⑥ $F(S(u,v)) = \begin{pmatrix} R \sin v \cos u \\ 2R \sin v \sin u \\ 5R \cos v \end{pmatrix}$ $S(u,v) = \begin{pmatrix} R \sin v \cos u \\ R \sin v \sin u \\ R \cos v \end{pmatrix}$

$\Phi = \oiint_{\partial M} F \, d\vec{S} = \iint_{D} F(S) \left(\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right) d(u,v) =$ $(u,v) \in [0, 2\pi) \times [0,\pi]$

$= -R^3 \iint_{D} \sin^3 v \cos^2 u + 2 \sin^3 v \sin^2 u$

$\Phi = \oiint_{\partial M} F \underline{n} \, dS \; ; \quad n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Phi = \oiint_{\partial M} F(x,y,z) \cdot \underline{n} \, dS = \oiint_{\partial M} (x^2 + 2y^2 + 5z^2) \frac{1}{R} dS =$

$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(R^2 \sin^2 v \cos^2 u + 2R^2 \sin^2 v \sin^2 u + 5R^2 \cos^2 v \right) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} \sin v \, du \, dv =$

$= R^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^3 v \cos^2 u + 2 \sin^3 v \sin^2 u + 5 \cos^2 v \sin v \, du \, dv$

2016

vekaud 2

Mol 3 ... feladatlt...

(7) $$\iint_S f(x,y,z)\, n_3(x,y,z)\, dS = \pm \iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$$

z-re merőleges vektormező:

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} z_x \\ z_y \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}} \implies n_3 = \frac{-1}{\sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}}$$

$$dS = \left\| \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\| d(x,y) = \sqrt{z_x'^2 + z_y'^2 + 1}$$

$$\underline{n}\, dS = \begin{pmatrix} z_x' \\ z_y' \\ -1 \end{pmatrix} d(x,y)$$

Vagy: ha $\underline{n} = \left(\frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{\left\| \frac{\partial s}{\partial x} \times \frac{\partial s}{\partial y} \right\|}$

akkor $\underline{n}\, dS = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} d(x,y)$

---

(8) $M: x^2 + y^2 = 4 \qquad F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = z$

$D\, \Phi = r$

j.o. $$\iiint_M \nabla F\, dV = \iiint_M 2x + 2y\, dV =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^4 2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta \, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta + \sin\theta \, d\theta}_{=0} \int_0^4 1 \cdot dz \int_0^2 2r^2 dr = 0$$

$$s(\theta,z) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \times \frac{\partial s}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\| \cdot \| = r$

$\Downarrow$

$dS = r\, d(\theta, z)$

b.o. $$\oiint_M F\, \underline{n}\, dS = \iint_{palást} F \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} dS = \iint_{palást} \frac{1}{r}(x^3 + y^3)\, dS =$$

$$= \int_0^4 \int_0^{2\pi} r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta \, d\theta\, dz = 4 \cdot r^3 \int_0^{2\pi} \cos\theta(1 - \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sin\theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta = 4r^3 \left(\sin\theta \Big|_0^{2\pi} - \sin \right.$$

vekand 2 | dual 3 gyak feladatlaid

Analízis III. 3. heti feladatok

2017. szeptember 28.

Felületi integrál. Felület felszínének kiszámítása. Fluxus.

Megj. Egy $S = \{s(u,v) \mid (u,v) \in D\}$ felület felszínét az $f(x,y,z) = 1$ függvény felületintegráljával lehet kiszámítani, azaz

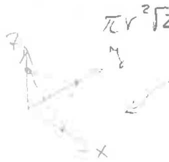
$$A(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \|s'_u \times s'_v\| \,\mathrm{d}(u,v) \tag{1}$$

1. Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paramétertartomány, $t : D \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. A függvény felülete $S = \{(u,v,t(u,v)) \mid (u,v) \in D\}$. Igazoljuk, hogy ennek felszíne:
$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + {t'_u}^2 + {t'_v}^2} \,\mathrm{d}(u,v).$$

$\pi r^2 \sqrt{2}$

2. Milyen felületet definiál az $S = \{(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u) \mid u \in [0,1], v \in [0,2\pi]\}$. Mennyi a felszíne?

$S = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ u \end{pmatrix}$



3. Legyen $F(x,y,z) = (1,0,0)$, és S az $x+y+z=1$ síknak az a része, ami az első tér-nyolcadba esik. Határozzuk meg a vektortér fluxusát.

4. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $f(x,y,z) := x+y+z$ egy skalármező. Számítsuk ki az $\iint_S f \,\mathrm{d}S$ felületi integrált.

$\boxed{\text{HF}}$

5. Legyen $s : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $s(u,v) := (u+v, u-v, u)$ egy felület és legyen $F(x,y,z) := (y,x,z)$ egy vektormező. Számítsuk ki az $\iint_S F\mathrm{d}S$ felületi integrált.

6. M az origó középű, 4 sugarú gömb felső fele, és $F(x,y,z) = (y,x,z)$. Határozzuk meg F fluxusát M-re nézve.

Integrál $|s'_u \times s'_v|$

$\langle F, n\rangle \,\mathrm{d}S$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel .

ha van idő a teljes bizonyítást

7. Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete: $S = \{(x,y,t(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$, és n a felület normálvektora. Igazoltuk, hogy ekkor
$$\iint_S f(x,y,z) \,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1 + {t'_x}^2 + {t'_y}^2} \,\mathrm{d}(x,y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z) \,\mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y)) \,\mathrm{d}(x,y),$$

Matlab $\boxed{\text{HF}}$

8. Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x, 2y, 5z)$ fluxusát a ∂M-re nézve, ahol M az origó középpontú, 2 sugarú gömb. Ellenőrizzük a Gauss-Osztrogradszkij tételt ebben a konkrét esetben.

9. "Igazoljuk" a Divergencia tételt abban a konkrét esetben, ha M az $x^2 + y^2 = 4$ henger egy darabja melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 4$ ill. $z = 0$ sík ban van. Továbbá az integrálandó vektormező:

   (a) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, 0)$ (b) $G(x,y,z) = (0,0,yz)$ (c) $H(x,y,z) = (x^2, y^2, yz)$.

D3* Legyen $f(x,y,z) = \dfrac{1}{r}$.

(a) $F = \nabla f = ?$ Igazolja, hogy div $F = 0$.

(b) Mennyi F fluxusa az origó középű, egységsugarú gömb felületére nézve?

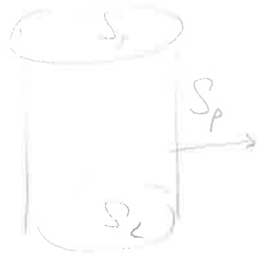
(c) Miért nincs ellentmondásban a fenti eredmény a Divergencia tétellel?

Megj. A fizikában is találunk ilyen függvényt: az origóba helyezett Q elektromos ponttöltés által keltett elektromos potenciál függvénye:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \text{ ahol } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2}$$

vektoranal 2.

$$\iint_{S_p} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_p} \langle \vec{F}, \vec{\mu} \rangle \, dS$$



$$S_p = \left\{ S(\theta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}, \right.$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\iint_{S_p} \left\langle \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle dS = \iint_{S_p} (x^3 + y^3) \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dS$$

$$= \iint_D R^3 (\sin^3\theta + \cos^3\theta) \frac{1}{\cancel{R}} \cancel{R} \, d(\theta, z)$$

$$= R^3 \iint_D \sin^3\theta + \cos^3\theta \, d(\theta, z) = R^3 \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} \sin^3\theta + \cos^3\theta \, d\theta$$

$$\sin^3\theta = (1 - \cos^2\theta) \sin\theta$$

Anal 3 2017 II gyak 3

(1) $D \subset \mathbb{R}^2$ egy paraméterhartomány, $f : D \to \mathbb{R}$ folyt diffható felület.
Igazoljuk, hogy ennek felszíne az ami.

$$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \;\middle|\; (u,v) \in D \right\}$$

$$A(S) = \iint_S 1 \, dS = \iint_D \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v) =$$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_u \\ -f'_v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + {f'_u}^2 + {f'_v}^2} \, d(u,v) \checkmark$$

(2) $$S = \left\{ s(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ u \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in [0,1] \quad v \in [0,2\pi] \right\}$$

dlt: ~~$s(u,v)=$~~ $u \in [0, r]$

$$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ +u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\| s'_u \times s'_v \| = \sqrt{2u^2} = u\sqrt{2}$$

$$\iint_S dS = \iint_D u\sqrt{2} \, d(u,v) = \sqrt{2}\int_0^r u \, du \int_0^{2\pi} 1 \, dv = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 =$$

$$= \pi r^2 \sqrt{2}$$

Ell:

$T_R = \pi R^2$

$$T_{R\triangle} = \pi R^2 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{\pi R r}{1} = \pi r^2 \sqrt{2}$$

$R = r\sqrt{2}$

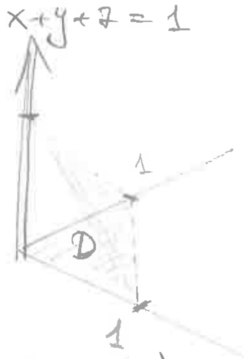
2017 II

Anal 3 gyak 3

— 1 —

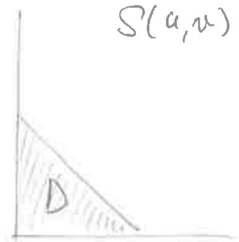
vekanal 2

③ $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad S: x+y+z = 1 \qquad x, y, z \geq 0$



legyen $\quad x = u$
$\qquad\qquad y = v$
$\qquad\qquad z = 1 - u - v$

$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1-u-v \end{pmatrix}$



I. $\iint\limits_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint\limits_D \langle \vec{F}(s(u,v)), s'_u \times s'_v \rangle \, d(u,v) =$

$s'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \iint\limits_D 1 \, d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy \, dx = \int_0^1 (1-x) \, dx = \left(x - \frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

④ $S = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \qquad (u,v) \in [0,1]^2$

$f = x+y+z$

$\iint\limits_S f \, dS = \iint\limits_D f(s) \, \| s'_u \times s'_v \| \, d(u,v) = \iint\limits_D 3\sqrt{6}\, u \, d(u,v) =$

$s'_u \times s'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{norm}} \sqrt{6}$

$= \int_0^1 \int_0^1 3\sqrt{6}\, u \, du \, dv$

$= \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$f(s) = 3u$

⑤ $S = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \qquad F(s) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \\ u \end{pmatrix}$

$\iint\limits_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint\limits_D \langle F(s), \| s'_u \times s'_v \| \rangle \, d(u,v) =$

$= \int_0^1 \int_0^1 (2u - 2u) \, du \, dv = 0$

2017 II

Anal 3 grupa 3

vehand 2

~~9~~ 8 $F = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}$

S : Origó középpontú 2 sugarú gömb.

$$s(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$s'_\theta \times s'_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ +R\cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -R^2\cos\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\sin\theta\sin^2\varphi \\ -R^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - R^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\|s'_\theta \times s'_\varphi\|^2 = R^4\cos^2\theta\sin^4\varphi$$
$$R^4\sin^2\theta\sin^4\varphi$$
$$R^4\sin^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + R^4\cos^4\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 2R^2\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$= R^4\sin^4\varphi + R^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi = R^4\sin^2\varphi$$

$$\boxed{\|s'_\theta \times s'_\varphi\| = R^2\sin\varphi}$$

$$F(s) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ 2R\sin\theta\sin\varphi \\ 5R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

agy: $\langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 5z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \, dS =$

$= x^2 + 2y^2 + 5z^2$

Nincs megoldva.

2017 II

Anal 3 gyak 3

— 3 —

nehezebb 2

~~9~~ 8 - folyt. G-O tétellel

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 8 \cdot r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr =$$

$$= 8 \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \cdot \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{\pi} \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{8 \cdot 2\pi R^3}{3} \cdot (+1+1) = \frac{32\pi R^3}{3} \checkmark$$

$$\iiint 8 \, dV =$$

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \Rightarrow z^2 = R^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow z \in \left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, +\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$$

⑥ 4 sugarú gömb felső fele $\Rightarrow$ $r \in [0, 4]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{1}{R}$

$\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$

$$= \iint_S (2xy + z^2) \, dS$$

$$= \iint_D \left(2R^2 \cos\theta \sin^2\varphi \sin\theta + R^2\cos^2\varphi\right) \sin\varphi \, R \, d(\varphi, \theta)$$

$$= R^3 \iint_D \left(2 \cos\theta \sin\theta \sin^3\varphi + R^2 \cos^2\varphi \sin\varphi\right) d(\theta, \varphi)$$

$$\frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} 2\cos 2\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \underbrace{\frac{R^3}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi}}_{=0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + \frac{2\pi R^3}{3} \cos^3\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi R^3}{3}$$

eredetileg $-\frac{4\pi R^3}{3}$

Ha a teljes gömbön

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \frac{1}{R} \iint_D (2xy + z^2) R^2 \sin\varphi \, d(\theta, \varphi) =$$

$$\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle = (y \;\; x \;\; z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R}(2xy + z^2)$$

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d(\theta, \varphi)$$

$$= \frac{1}{R} R \iint_D \left(2R^2 \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi + R^2 \cos^2\varphi\right) \cdot \sin\varphi \, d(\vartheta, \varphi)$$

$$= R^3 \cdot 2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi + R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \left[\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi R^3}{3}$$

2017 II

Anal 3 gyak 3

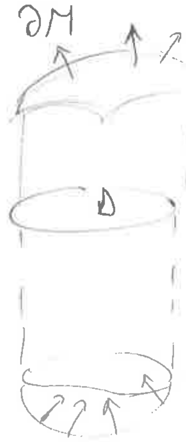
vektanal 2

Gauss tétel bizonyítása

Legyen $M \subset R^3$ normáltartomány x, y, z szerint is.

$$J = \oint\!\!\oint_{\partial M} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \oint\!\!\oint_{\partial M} \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS = \underbrace{\oint\!\!\oint_{\partial M} (F_1 n_1 + F_2 n_2 + F_3 n_3)\, dS}_{\text{skalár fv. felületmenti integrálja}}$$

$$J_3 = \oint\!\!\oint_{\partial M} F_3 n_3 \, dS = \overbrace{\iint_{\text{palást}} F_3 n_3 \, dS}^{=0} + \iint_{\text{alsó}} F_3 n_3 \, dS + \iint_{\text{felső}} F_3 n_3 \, dS = (*)$$



$$S_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow S'_{2x} \times S'_{2y} = \begin{pmatrix} -S'_{2x} \\ -S'_{2y} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}(x,y,\varphi_2)$$

$$S_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \Rightarrow S'_{1x} \times S'_{1y} = \begin{pmatrix} -S'_{1x} \\ -S'_{1y} \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{n}(x,y,\varphi_1)$$

azonban $\vec{n}(x,y,z)$ KIFELÉ ~~mutat~~ kell ~~orientálni~~, ezért n_3-at negatív előjellel venni

$$(*) = \iint_D F_3(x,y,\varphi_2)\, d(x,y) - \iint_D F_3(x,y,\varphi_1)\, d(x,y)$$

Másik oldal:

$$\iiint_M \nabla F \, dV = \iiint_M F'_{1x} + F'_{2y} + F'_{3z} \, dV = J$$

$$J_3 = \iiint_M F'_{3z} \, dV = \iint_D \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F'_{3z} \, dz \, d(x,y) =$$

$$= \iint_D F_3(x,y,\varphi_2) - F_3(x,y,\varphi_1) \, d(x,y) = (*)$$

2017 II

vektanal 2 | Anal 3 gyak 3.
G-O bizonyítás

(7) Igazoljuk, hogy $\iint\limits_S \mu_3 f \, dS = \pm \iint\limits_D f(x,y,z(x,y)) \, d(x,y)$

ahol $s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix}$

$$s'_x \times s'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu = \begin{pmatrix} -z'_x \\ -z'_y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$$

tehát $\mu_3 = \dfrac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}$

Ezért

$$\iint\limits_S f \mu_3 \, dS = \iint\limits_D f \underbrace{\mu_3 \cdot \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}_{=1} \, d(x,y) = \iint\limits_D f \, d(x,y)$$

Gauss tétel bizonyítás:

$$\oint\limits_S \langle F, dS \rangle = \int\limits_V \nabla F \, dV \Rightarrow \oint \langle F, \mu \rangle \, dS = \int\limits_V \nabla F \, dV$$

$$\oint F_1 \mu_1 + F_2 \mu_2 + F_3 \mu_3 \, dS = \int\limits_V F'_{1x} + F'_{2y} + F'_{3z} \, dV$$

$$\left.\begin{aligned} &\oint F_3 \mu_3 \, dS = \int\limits_{D_z} F_3(x,y,z) \, d(x,y) - \int\limits_D F_3(x,y,b) \, d(x,y) \\ &\int\limits_V F'_{3z} \, dV = \int\limits_D \int\limits_b F'_{3z} \, dz \, d(x,y) \end{aligned}\right\} \text{„="}$$

vektanal 2

2017 T

Anal 3 gyak 3.

G-O biz.

⑨ $M: \; x^2+y^2=4$ $\quad z\in[0,4]$ $\qquad F=\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad S=\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$

$$\int_V \nabla F \, dV = \int_V (2x+2y)\, d(x,y,z) = \int_V 2r^2\cos\theta + 2r^2\sin\theta \; d(r,\theta,z) =$$

$$= 2\int_0^4 dz \int_0^2 r^2 dr \int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta = 8\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(\sin\theta - \cos\theta\right)_0^{2\pi} = 0$$

Másik oldal:

$$\int_S \langle F, dS\rangle = \int_S \langle F, n\rangle \, dS = \int_S (x^3+y^3)\cdot\frac{1}{R}\, dS =$$

$$= R^3 \int_\Delta (\cos^3\theta + \sin^3\theta)\, d(\theta,z) = 0$$

2017 II

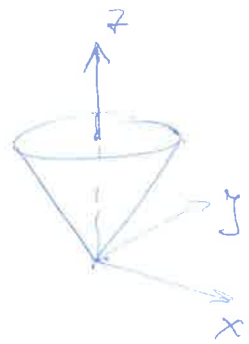
vekanal 2 | Anal 3 gyak 3. ~8

(F2)

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = ? \quad \text{ha} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$S = \partial \left\{ (x,y,z) \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 \right\}$$

vagyis S: a kúp felszíne!



$$G\text{-}O: \; I = \oiint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_{\text{kúp}} \nabla \vec{F} \, dV$$

$$\nabla \vec{F} = 1$$

tehát I = kúp térfogata $= \dfrac{\pi R^2 \cdot h}{3} \Big|_{\substack{R=1 \\ h=1}} = \dfrac{\pi}{3}$

integrállal:

$$I = \iiint_{\text{kúp}} 1 \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1 \; dz \, dy \, dx$$

vagy alternatíve hengeres koordinátákra:

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_r^1 r \, dz \, d\theta \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r z \Big|_r^1 \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^1 (r - r^2) \, dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \, \frac{3r^2 - 2r^3}{6} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi r^2 (3 - 2r)}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3} \quad \checkmark$$

Matlab kérdés

Létezik, hogy a 2015-öst ugyanígy kellene volna leí?

Analízis III. 3. heti feladatok
201 szeptember 25.

1. *(Ismétlés.) Az S felület egy kétváltozós függvény felülete:* $S = \{(x, y, t(x, y)) : (x, y) \in D\}$, *és* $\mathbf{n}$ *a felület normálvektora. Igazoljuk, hogy ekkor*
$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1+(t'_x)^2+(t'_y)^2}\, d(x, y).$$
Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát:
$$\iint_S f(x,y,z)n_3(x,y,z)dS = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))d(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.

2. „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az $x+y+z=0$ sík és a $x^2+y^2 \leq 1$ henger metszete és $F(x,y,z) = (y,z,x)$.

HF „Igazoljuk" a Stokes tételt, ha M az egységgömb $x \geq 0$ része, és $G(x,y,z) = (y,z,x)$.

3. Igazoljuk a Stokes tétel alapján, hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos vektormező, akkor $\forall C$ zárt görbén
$$\oint_C F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$

4. Legyen M az téglalap a térben, melynek csúcspontjai (0,0,0), (1,1,0), (1,1,1), (0,0,1). Legyen továbbá $F(x,y,z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben.

5. Legyen M az $x^2+y^2=4$ hengerpalástnak azon darabja, ahol $z \in [0,h]$ (h egy paraméter), a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott). Az irányítást úgy választhatjuk, hogy a felső körlapra $\underline{n}$ felfelé mutat. $F(x,y,z) = (-y, x, x^2)$. Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re

   közvetlenül, két felületi integrál összegeként

   Stokes tétellel

Szépen kijött

$\int_{S_1} = 0$

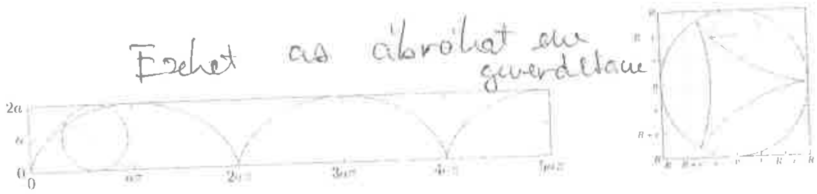
$\int_{S_2} = 2\pi R^2$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

6. (Green tétel alkalmazás) Határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet. (A cikloid paraméterezése: $x(t) = a(t - \sin(t))$, $y(t) = a(1 - \sin(t))$, $t \in [0,2\pi]$.) cost

7. (HF) A Green tétel segítségével számolja ki egy deltoid területét. A deltoid paraméterezése:
$$x(t) = (R-r)\cos(t) + r\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right) \xrightarrow[R=3a,\ r=a]{\text{deltoid esetén}} x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$$
$$y(t) = (R-r)\sin(t) - r\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right) \qquad y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t), \quad t \in [0,2\pi]$$

Ezeket az ábrákat én gyártottam



1. ábra. A cikloid és a deltoid

8. Legyen $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C F(\underline{r})\, d\underline{r} > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén.

Center of mass:

$$\iiint_{M} \rho(\underline{r})(\underline{r}-\underline{R})\,dV = 0 \qquad \underline{R} \text{ a COM}$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{1}{m} \iiint_{M} \rho(\underline{r})\,\underline{r}\,dV \qquad m\text{: total mass of } M$$

F1* Szorgalmi vektoranal 15. feladat

verzió 2017 10 04 14 10 06

Analízis III. 4. heti feladatok
2017. október 5.

A vektoranalízis klasszikus integráltételei I. Gauss-Osztrogradszkij-tétel. (Ismétlés)

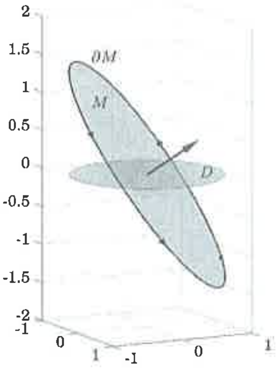
1 Legyen S felület egy kétváltozós függvény felülete $S = \{(x, y, t(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$ és $\boldsymbol{n}$ a felület normálvektora Igazoltuk hogy ekkor

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,t(x,y))\sqrt{1 + {t'_x}^2 + {t'_y}^2}\;\mathrm{d}(x,y).$$

Igazoljuk a G-O tételben felhasznált lemmát

$$\iint_S f(x,y,z) n_3(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \pm \iint_D f(x,y,t(x,y))\,\mathrm{d}(x,y),$$

A vektoranalízis klasszikus integráltételei II. Stokes-tétel.



$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ 2 Igazoljuk a Stokes tételt ha $F(x,y,z) = (y, z, x)$ továbbá M és az $x+y+z=0$ sík és a $x^2+y^2 \le 1$ henger metszete ∂M a határa egy ellipszis (lásd ábra)

3 Igazoljuk a *Stokes tétel alapján* hogy ha $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpotenciálos akkor $\forall C$ zárt görbén

banális $\oint_C F(r)\,\mathrm{d}r = 0.$

egyszerűbb: $\iint_D \nabla \times F \, dA$ 4 Legyen $D = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ Határozzuk meg $F(x,y,z) = (x + y + z, 3x + 2y + 4z, 5x - 3y + z)$ cirkulációját D határa mentén

5 Legyen M az téglalap a térben melynek csúcspontjai $(0,0,0)$ $(1,1,0)$ $(1,1,1)$ $(0,0,1)$ Legyen továbbá $F(x,y,z) = (yz, xz, xz)$. Igazoljuk a Stokes tételt ebben az esetben

HF 6 Legyen M az $x^2 + y^2 = 4$ hengerpalástnak azon darabja ahol $z \in [0, h]$ a hengert lezáró felső körlappal együtt (a henger alsó része nyitott) Az irányítást úgy választhatjuk hogy a felső körlapon $\boldsymbol{n}$ felfelé mutat $F(x,y,z) = (-y, x, x^2)$ Számoljuk ki $\nabla \times F$ fluxusát M-re

(a) közvetlenül két felületi integrál összegeként (b) Stokes tétellel

A vektoranalízis klasszikus integráltételei III. Green-tétel. Alkalmazás területszámításra.

$\oint_{\partial M} y\,dx$ 7 A Green tétel segítségével határozzuk meg egyetlen cikloid-ív alatti területet A cikloid paraméterezése $x(t) = a(t - \sin(t))$ $y(t) = a(1 - \cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$

8 A Green tétel segítségével számoljuk ki egy deltoid területét A deltoid paraméterezése $x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t)$, $y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

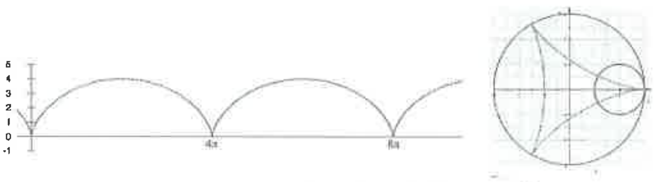


Figure 1 A cikloid és a deltoid

banális

9 $F(x, y) = (-y^3, x^3)$ Igazoljuk hogy $\oint_C F(r)\,\mathrm{d}r > 0$ minden pozitív irányítású C görbe mentén

D4* A klasszikus Stokes tétel alapján bizonyítsuk be a Green tételt

Green T: $\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D -P'_y + Q'_x \; d(x,y)$

$$B(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}_1 - \vec{r})}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}\|}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Γ : egységkör xy síkban trigonometrikus irányban J erősségű áram folyik.

hat meg $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}$ pontban a mágneses indukció vektort.

$$\boxed{L = T - V}$$

↳ potenciális energia $\Rightarrow \vec{F} = -\nabla V$

pld: $V = mg(z - z_0)$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Tehát, ha a test egy konzervatív erőtérben van, akkor V ezen erőtér potenciálja!

~~Tehát $L = T + V$~~

G-O: $\iiint_M \nabla \underline{F}\, dV = \oiint_{\partial M} \underline{F}\, d\underline{S}$

$$\boxed{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow v^{\perp} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}}$$

Green T:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\iint_{\Lambda} \nabla F\, d(x,y) = \oint_{\partial D} \underline{F} \cdot \underbrace{\underline{n}\, dl}_{\dot\gamma(t)^{\perp} dt} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \underline{F}, \dot\gamma(t)^{\perp} \rangle\, dt$$

$$\iint_D F'_x + F'_y\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \dot\gamma_2(t) - F_2 \dot\gamma_1(t)\, dt$$

$$\iint_D F'_{1x} + F'_{2y}\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} F_1\, dy - F_2\, dx$$

ha $\left.\begin{matrix} F_1 = Q \\ F_2 = -P \end{matrix}\right\}$ $\iint_D Q'_x - P'_y\, d(x,y) = \int_{t_0}^{t_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} dl$

Analízis 3 , 3. gyakorlat

Elmélet:

adott egy F konzervatív erőtér

f a potenciálja: $F = \operatorname{grad} f$

Ekkor $\int_\Gamma F\,d\underline{l} = f(B)-f(A)$

$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t\in[a,b],\ \gamma(a)=A,\ \gamma(b)=B\}$

$\partial\Gamma = \{A,B\}$

Newton–Leibniz formula

adott egy F vektorpotenciális áramlás pl. víz áramlása (a víz összenyomhatatlan)

legyen G a vektorpotenciálja: $[F]: \frac{m}{s}$

$F = \operatorname{rot} G$

Ekkor: $\Phi = \iint_S F\,d\underline{S} = \oint_{\partial S} G\,d\underline{l}$ $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

Stokes-tétel

Numerikus integrálást EMLÍTSD MEG

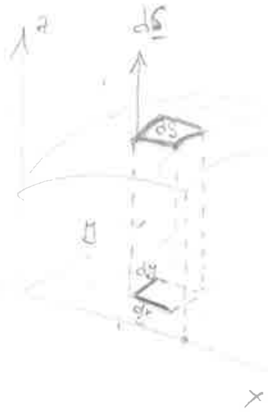
↳ Honlapon DEMÓK

① Ismétlés: Igazoljuk a G-O-ban lemmát.

Van $S=\{s=(x,y,z(x,y)),\ (x,y)\in D\}$; $\underline{r}:=(x,y,z)$, $n(\underline{r}) \perp s(\underline{r})\ \forall \underline{r}\in S'$, $\|n(\underline{r})\| = 1$ norm. egys.

Továbbá adott egy tetszőleges $f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.

Ekkor $\iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$



$$\left.\begin{array}{l} n(\underline{r}) \perp s(\underline{r}) \\ \|n(\underline{r})\|=1 \end{array}\right\} \Rightarrow n(\underline{r}) = \pm \begin{bmatrix} z'_x \\ z'_y \\ -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}}$$

$$n_3(\underline{r}) = \mp \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

$$\iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \iint_S f(\underline{r})\, n_3(\underline{r})\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\, n_3(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\, d(x,y)$$

$$= \mp\iint_D f(x,y,z(x,y)) \underbrace{\frac{1}{\cancel{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+z'_x+z'_y}}}_{\text{kiesik}}\, d(x,y) = \mp\iint_D f(x,y,z(x,y))\, d(x,y)$$

vektoranal 3

Vektoranal Stokes

2016b

Anal 3 gyak. 3

2016.09.30

(5)*Ha még nincs érettségi bizonyítványa, és pótló vagy javító érettségi vizsgára jelentkezik, a törzslapkivonat(ok)on található, egyéb vizsgatárgyakból elért eredményeit is tüntesse fel!*
(6)*OKTV/SZÉTV helyezés alapján; külföldi elismert érettségi alapján; mentesség a magyar nyelv és irodalom vizsgatárgy vizsgája alól azoknak, akiknek az állampolgársága nem magyar, vagy a középiskolai tanulmányai befejezését megelőző négy tanév közül legalább hármat nem a magyar köznevelési rendszerben végzett.*
(7)*Nem magyar vizsganyelvet csak a két tanítási nyelvű és a nemzetiségi oktatásban részt vevők választhatnak.* (8)*Idegen nyelv vizsgatárgynál, ha annak eredményét 2005-ben nyelvvizsga-bizonyítvány alapján kapta.*
A táblázatban felsorolt tárgyakból és az abban foglaltak szerint érettségi vizsgára jelentkezem. Az információs önrendelkezési jogról és az információszabadságról szóló 2011. évi CXII. törvény 5. § (1) bekezdése alapján, a jelentkezési lap aláírásával hozzájárulok ahhoz, hogy az OH és a vizsgaszervező kormányhivatalok az érettségi vizsgák során személyes adataimat kezeljék és a korábbi érettségi vizsgaeredményeimet megtekintsék. Büntetőjogi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a beírt adatok a valóságnak megfelelnek.

Dátum:........................ A vizsgázó aláírása:........................ A szülő (gondviselő) aláírása[9]:........................
[9]*(Csak akkor, ha a jelentkező nem nagykorú)*

Beküldendő: Budapest Főváros Kormányhivatala Építésügyi és Örökségvédelmi, Hatósági, Oktatási és Törvényességi Felügyeleti Főosztály, 1056 Budapest, Váci utca 62-64.
A hiánytalanul kitöltött és aláírt jelentkezési lapot - a kitöltési útmutatóban megjelölt csatolt dokumentumokkal együtt - személyesen, meghatalmazott útján, vagy postai úton tértivevényes küldeményben kell benyújtani a fenti címre.
Az aláírás, vagy bármelyik szükséges melléklet nélkül a jelentkezés érvénytelen!

2016

2

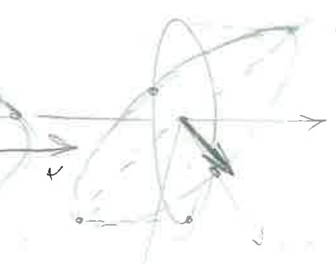
M: „$x+y+z=0$ sík $\cap$ $x^2+y^2\le 1$ henger"

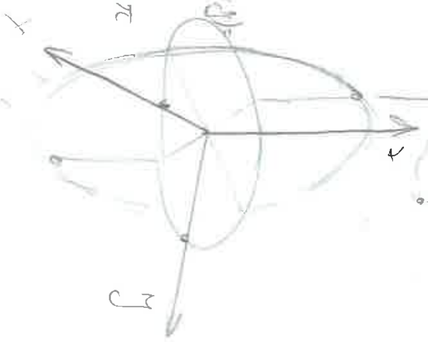
$$S=\{s(x,y)=(x,y,-x-y) \mid x^2+y^2\le 1,\ D=\oplus\}$$

$$n(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$$

$$\text{b.o.}=\iint_S \nabla\times F\,dS=\oint_{\partial S} F\,dl=\text{j.o}$$

b.o.:
$$\nabla\times F=\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}y\\ z\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$$





Algoritmus, ami mindig tuti:

$$\iint_S\langle \mathrm{rot}\,F, dS\rangle=\iint_D\left\langle \mathrm{rot}\,F(s(x,y)),\ \frac{\partial s}{\partial x}\times\frac{\partial s}{\partial y}\right\rangle d(x,y)=$$

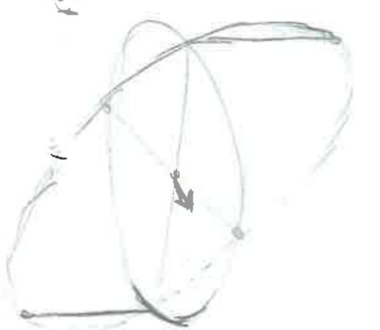
$$=\iint_D(-1,-1,-1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}d(x,y)=-3\iint_D d(x,y)=-3\pi$$

j.o: $\partial S=\left\{\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ -\cos t-\sin t\end{pmatrix},\ t\in[0,2\pi)\right\}$

$$\text{j.o}=\oint_{\partial S}\langle F,dl\rangle=\int_0^{2\pi}\langle F(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin t,-\cos t-\sin t,\cos t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ \sin t-\cos t\end{pmatrix}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}-\sin^2t-\cos^2t-\cancel{\sin t\cos t}+\cancel{\cos t\sin t}-\cos^2t\,dt$$



$$-\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}+\frac{2+2\cos 2t}{2}\,dt=-\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}+\frac{\cos 2t}{2}\,dt=-\frac{3}{2}\cdot 2\pi=-3\pi$$ ✓

② $F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ $\quad S_1: x+y+z=0 \quad V_1: x^2+y^2 \le 1 \quad M = S_1 \cap V_1$

$S_1 \Rightarrow z = -x-y$

2017 Ugyanaz a feladat

$$M = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

$$= \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} r\in[0,1] \\ \vartheta \in [0,2\pi) \end{array} \right\}$$

ekkor $J_1 = \iint\limits_M \langle \vec{F}_1, d\vec{S} \rangle = \iint\limits_M \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle \, dS$

ezt úgyse ússzuk meg!

$s'_r \times s'_\vartheta =$ bonyolult.

Inkább

$$s'_x \times s'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ez jó, de nem ez kell

$$J_1 = \iint\limits_M \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint\limits_D \left\langle \vec{F}(x,y,-x-y),\, s'_x(x,y) \times s'_y(x,y) \right\rangle d(x,y)$$

$$= \iint\limits_D (y,\, -x-y,\, x) \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} d(x,y) =$$

$$= \iint\limits_D (xy - xy - y^2 - x^2 - xy)\, d(x,y) = -\iint\limits_D (+x^2 + xy + y^2)\, d(x,y)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 + r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta) \cdot r \, d\vartheta \, dr$$

$$= \int_0^1 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 + \tfrac{1}{2} \sin 2\vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \left(2\pi + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \Big|_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi}{2}$$

A második feladat esetében vettük $\iint\limits_M \langle \operatorname{rot} \vec{F}, d\vec{S} \rangle$ kell

— folyt —

2017 b

Anal 3 gyak 4

vektoranal 3 ② old. —1—

(2) – folyt –

$$\iint_M \langle \operatorname{rot} \vec F, d\vec S \rangle = \oint_{\partial M} \langle \vec F, d\vec \ell \rangle$$

$$-\iint_D (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} d(x,y) = -3 \iint_D d(x,y) = -3\pi R^2 \Big|_{R=1} = \boxed{-3\pi = \iint_M \langle \operatorname{rot}\vec F, d\vec S\rangle}$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y\\ z\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Most számoljuk $\oint_{\partial M} \langle \vec F, d\vec \ell \rangle$ figyeljünk az irányításra

ha $M = \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \,\Big|\, (r,\vartheta) \in [0,1]\times[0,2\pi) \right\}$

akkor $\partial M = \left\{ \gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta - \sin\vartheta \end{pmatrix} \,\Big|\, \vartheta \in [0,2\pi) \right\}$

$\cancel{\oint_{\partial M} \langle \vec F, d\vec \ell\rangle} = \left\{ \gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x\\ y \\ -x-y\end{pmatrix} \,\Big|\, (x,y) \in \partial D \text{ (körlap)} \right\}$

$$\oint_{\partial M} \langle \vec F, d\vec\ell\rangle = \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta \quad -\cos\vartheta - \sin\vartheta \quad \cos\vartheta \right) \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ \sin\vartheta - \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta - \cancel{\sin\vartheta\cos\vartheta} + \cancel{\sin\vartheta\cos\vartheta} - \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} -1 - \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \cancel{-2\pi - \int_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} 1 + \cos}$$

$$= -\int_0^{2\pi} 1 + \frac{1+\cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = -2\pi - \pi - \cancel{\int_0^{2\pi} \cos 2\vartheta \, d\vartheta} = -3\pi$$

2017b

vekanal 3 | Anal 3 gyak 4
(2) old –2–

② Tisztázva: 2017 $\quad F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

$S_1: x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

$V_1: x^2+y^2 \le R^2$

$M = S_1 \cap V_1$

$$M = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in D \right\} \qquad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$$

(R sugarú körlap)

$$= \left\{ s(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ -r\cos\vartheta - r\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; (r,\vartheta) \in [0,R]\times[0,2\pi) \right\}$$

$$\partial M = \left\{ \gamma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; (x,y) \in \partial D \right\}$$

R sugarú körlap.

$$= \left\{ \gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ -R\cos\vartheta - R\sin\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0,2\pi) \right\}$$

$$\text{b.o.} = \iint_M \langle \operatorname{rot} F, dS \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \text{j.o.}$$

---

b.o. $\;$ $s'_x \times s'_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ ezért $\quad$ b.o. $= -3 \iint_D d(x,y) = \underline{\underline{-3\pi R^2}}$

$\operatorname{rot} F = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

j.o. : $\gamma'(\vartheta) = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta - R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$\left(\dfrac{d\gamma(x,y)}{dl} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ y-x \end{pmatrix} \right.$ körvonal menti derivált. $\Big)$

$F(\gamma(\vartheta)) = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta \\ -R\cos\vartheta - R\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$

Ez így is helyes DE nem egyszerűbb

$\left(F(\gamma(x,y)) = \begin{pmatrix} y \\ -x-y \\ x \end{pmatrix} \right)$

$$\text{j.o}_1 = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\vartheta)), \gamma'(\vartheta) \rangle \, d\vartheta = -\int_0^{2\pi} R^2 + R^2\cos^2\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= -2\pi R^2 - R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = -3\pi R^2$$

$$\left(\text{j.o}_2 = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = -\oint_{\partial D} y^2 + x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} + x^2 \, dl = -\int_0^{2\pi} R^2 + R^2\cos^2\vartheta \, d\vartheta = -3\pi R^3 \right)$$

② Tintáu: 2016 M: „$x+y+z=0$" $\cap$ „$x^2+y^2 \le 1$"

$F = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ $\qquad rot(F) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$S = \left\{ s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \;\middle|\; \binom{x}{y} \in D \right\}$$

$D = \{ x^2+y^2 \le 1 \}$

$$\partial S = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} ;\ t \in [0, 2\pi) \right\}$$

$$\iint_S rot\, F \cdot d\underline{S} = \oint_{\partial S} F\, d\underline{l}$$

Én határozottan kiírtam azon állítást mellett, hogy $d\underline{S}$-t számoljuk és ellenőrizzük $d\underline{S}$ irányát! Mi pedig $\underline{u}\, dS$-t. $d\underline{S} = \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}$, viszont ellenőrizzük $d\underline{S}$ irányát! Skalár függvény felület integráljánál pedig számoljuk $\left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\|$-t

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(S(u,v)) \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| d(u,v)$$

$$\iint_S \langle F(x,y,z), d\underline{S} \rangle = \pm \iint_D \langle F(S(u,v)), \underbrace{\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v}}_{\pm \text{ ebből ered: } S \text{ paraméterezése!}} \rangle\, d(u,v)$$

Feladat folyt: b.o.: $\iint_S \langle rot\, F, d\underline{S} \rangle = \iint_D \langle rot\, F(S(x,y)), \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \rangle\, d(x,y) =$

$$= \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle d(x,y) = -3 \iint_D d(x,y) = -3 \cdot terület(D) = -3\pi$$

j.o.: $\oint_{\partial S} F\, d\underline{l} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t - \sin t, \cos t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} dt =$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t - \cos^2 t\, dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t + 2\cos^2 t\, dt =$$

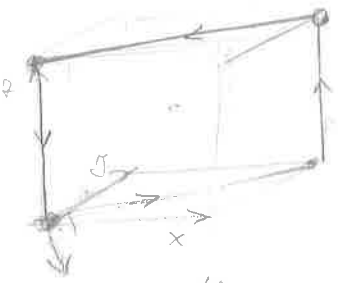
$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} + \frac{2+\cos 2t}{2}\, dt = -\frac{3}{2} \cdot 2\pi = -3\pi$$

(3) ha $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skalárpot akkor $\forall$ C zárt: $\oint_C F(\underline{r})\, d\underline{r} = 0$

$$\oint_C F(\underline{r})\, d\underline{r} = \iint_S \langle \underbrace{\mathrm{rot}\, F}_{=0}, d\underline{S} \rangle$$

$F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix}$ $\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 - x \\ y - z \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) 2016



$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix}$ $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$ $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\oint_{\partial S} \langle F, d\underline{\ell} \rangle = \iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, dS \rangle = \iint_D \left\langle \mathrm{rot}\, F(S(u,v)), \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\rangle d(u,v) =$$

$$= \iint_D (-u, u - v, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(u,v) = \int_0^1\int_0^1 (-u - u + v)\, du\, dv = \int_0^1 -2u + \int_0^1 v\, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 -2u + \frac{1}{2}\, du = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Matlabbal ellenőrizve! OKÉ!

Letisztázva:

$F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix}$; $\nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 - \cancel{x} \\ y - z \\ z - \cancel{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix}$; $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ v \end{pmatrix}$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, dS \rangle = \iint_S (-u, u - v, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(u,v) = \int_0^1\int_0^1 -2u + v\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 \left[-u^2 + vu\right]_0^1 dv = \int_0^1 -1 + v\, dv = \left[-v + \frac{1}{2} v^2\right]_0^1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Minden oldal:

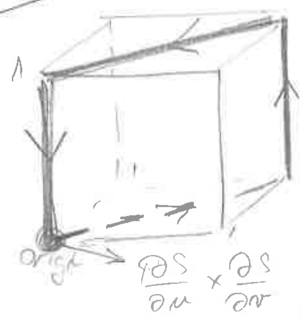
$$\int_1^0 \left\langle F(0, 0, t), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

$$\int_0^1 \left\langle F(t, t, 0), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

$$\int_0^1 \left\langle F(1, 1, t), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$$

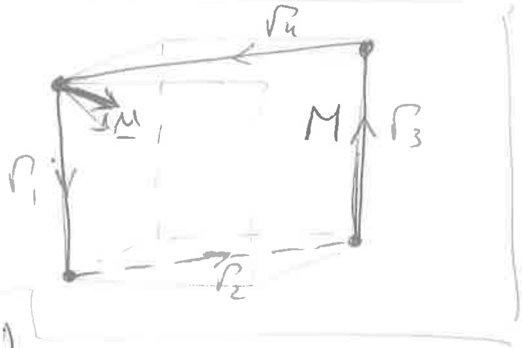
$$\int_1^0 \left\langle F(t, t, 1), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_1^0 2t\, dt = t^2 \Big|_1^0 = -1$$

$$\oint_\Gamma F\, d\ell = \Sigma = -\frac{1}{2}$$



5 2017

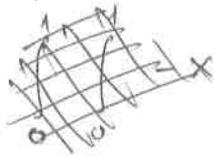
$$F=\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xz \end{pmatrix} \qquad \nabla\times F=\begin{pmatrix} -x \\ y-z \\ z-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\oint_{\partial M}\langle F, d\ell\rangle = \iint_M \langle \nabla\times F, dS\rangle = (*)$$

$$M=\left\{ s(r,z)=\begin{pmatrix} r \\ r \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; (r, z)\in \underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{!=D} \right\}$$

$$s'_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(*) =$ 

$$\iint_D \left\langle \nabla\times F\big|_{r=s(r,z)},\; s'_r\times s'_z \right\rangle d(r,z) =$$

$$= \iint_D \begin{pmatrix} -r & r-z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d(r,z) = \iint_D (-r-r+z)\, d(r,z) =$$

$$= -2\int_0^1 r\,dr \int_0^1 z\,dz = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma_1=\left\{\gamma(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[0,1]\right\} \qquad \dot\gamma(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$\Gamma_2=\left\{\gamma(t)=\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[0,1]\right\} \qquad \dot\gamma(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

$$\Gamma_3=\left\{\gamma(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[0,1]\right\} \qquad \dot\gamma(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \int_0^1 \begin{pmatrix} t & 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma_3=\left\{\gamma(t)=\begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t\in[0,1]\right\} \qquad \dot\gamma(t)=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \int_0^1 (2t-2)\,dt = (t^2-2t)\Big|_0^1 = -1$$

$$\sum = \oint_{\partial M}\langle F, d\ell\rangle = -\frac{1}{2}$$

2017b

Vekanal 3

Anal 3 gyak 4

5

(4) $F = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 3x+2y+4z \\ 5x-3y+z \end{pmatrix}$ $\qquad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \le R^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} r\in[0,R] \\ \vartheta\in[0,2\pi] \end{matrix} \right\}$

$$\Gamma = \partial D = \Bigg\{ \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}}_{\gamma(\vartheta)} \;\Bigg|\; \vartheta\in[0,2\pi] \Bigg\}$$

$$\oint_{\partial D} \langle F, d\ell \rangle = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(\vartheta)), \gamma'(\vartheta) \rangle \, d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\vartheta+\sin\vartheta & 3\cos\vartheta+2\sin\vartheta & 5\cos\vartheta-3\sin\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(-\sin\vartheta\cos\vartheta - \sin^2\vartheta + 3\cos^2\vartheta + 2\sin\vartheta\cos\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \left(\sin\vartheta\cos\vartheta - 1 + 4\cos^2\vartheta \right) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta}_{0} - 1 + 2 + \underbrace{2\cos 2\vartheta}_{0} \Big) d\vartheta =$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi R^2$$

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} -3-4 \\ 1-5 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{dS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot r \, d(r,\vartheta)$$

$$\iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{dS} \rangle = \iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \iint_D \begin{pmatrix} -7 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 2 \iint_D dS = 2\pi R^2$$

teda je overené $\boxed{\oint_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{d\ell} \rangle = \iint_D \langle \nabla\times\vec{F}, \vec{dS} \rangle}$

2017b

kval 3 úloha 4

vekanal 3 (4)

(6)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2=4 \;,\; z \in [0,h] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 4 \right\}$$

$$F = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad \nabla \times F = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x \\ 2 \end{pmatrix}$$

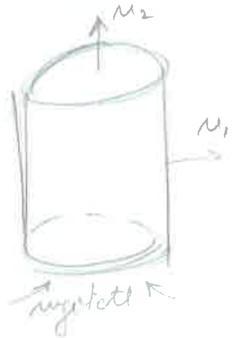
$$\iint_M \langle \nabla \times F, dS \rangle = \oint_{\partial M} \langle F, dl \rangle = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta & 2\cos\vartheta & 4\cos^2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\sin\vartheta \\ 2\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} d\vartheta$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \cdot 4 \qquad \text{általánosan } 2\pi R^2$$

③ $x^2+y^2=4$ hengerpalást

legyen $F(x,y,z) = \begin{pmatrix}-y\\x\\x^2\end{pmatrix}$ vektorpotenciál függvény

legyen $G(x,y,z) = \mathrm{rot}\, F = \begin{pmatrix}0\\-2x\\2\end{pmatrix}$ áramlást leíró vektormező



Egyik oldal:

$$\iint_S \langle G(x,y,z), d\underline{S}\rangle = ?$$

ha $x=\frac{1}{2}$

$$S_1(u,v) = \begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\v\end{pmatrix} \quad (u,v)\in[0,2\pi)\times[0,h]$$

$$S_2(u,v) = \begin{pmatrix}u\\v\\h\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial u}\times\frac{\partial S_1}{\partial v} = \begin{pmatrix}-R\sin u\\R\cos u\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\0\end{pmatrix}; \quad \frac{\partial S_2}{\partial u}\times\frac{\partial S_2}{\partial v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iint_{S_1}\langle G, d\underline{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{h}(0,-2R\cos u,2)\begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\0\end{pmatrix}dv\,du = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} -2R^2\sin u\cos u\, dv$$

$$= -hR^2\int_0^{2\pi}\sin 2u\,du = 0$$ Matlabbal ellenőrizze!

$$\iint_S\langle G, d\underline{S}\rangle = \iint_D(0,-2u,2)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}d(u,v) = 2\iint_D d(u,v) = 2\cdot\pi R^2 = 2\pi R^2$$

Másik oldal:

$$\int_\Gamma\langle G, d\underline{l}\rangle = ? \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix}R\cos(t)\\R\sin(t)\\0\end{pmatrix} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}-R\sin t\\R\cos t\\0\end{pmatrix}$$

$$\oint_\Gamma\langle F, d\underline{l}\rangle = \int_0^{2\pi}\langle F(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi}(-R\sin t, R\cos t, R^2\cos^2 t)\begin{pmatrix}-R\sin t\\R\cos t\\0\end{pmatrix}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t\; dt = 2\pi R^2$$

HF számoljátok ezt le Matlab segítségével!

syms x y z real

F = [-y ; x ; x^2]

help subs, simplify

matlabFunction

F = @(x,y) [-y ; x ; x^2]

F(1,2) == [-2 ; 1 ; 1]

integral / integral2 / integral3

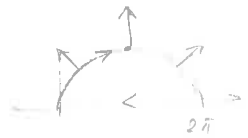
Vektoranal... Stokes/Green

Cikloi...

⑥ Cikloid ív alatti terület

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t-\sin t) \\ a(1-\cos t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma(t)^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}$$

$$T = \iint_{D} d(u,v) = \iint_D \operatorname{div}\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) d(u,v)$$



$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Green T: $\displaystyle\iint_D F'_{1x} + F'_{2y}\, d(u,v) = \oint_{\partial D} \langle F, \underline{n} \rangle dl = \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)^{\perp} \rangle dt +$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \left\langle F(t,0), \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}(t-\sin t, 1-\cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} dt +$$

$$+ \int_{2\pi}^{0} \frac{1}{2}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} -t\sin t + \sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t \, dt =$$

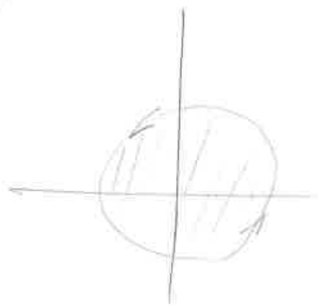
$$= \frac{a}{2}\int_0^{2\pi} 2 - t\sin t + \cancel{2\cos t}\, dt = 2a\pi + \int_0^{2\pi} t(\cos t)'\, dt = \frac{a}{2}\, t\cos t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + 2a\pi =$$

$$= 2a\pi + \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi) = 3a^2\pi$$

⑧ $F(x,y) = (-y^3, x^3)$. Igazoljuk, hogy $\oint_C \langle F, dl \rangle > 0$ $\forall$ pos irányítású görbe mentén

$$\oint_C \langle F, dl \rangle = \oint_C F_1\, dx + F_2\, dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, d(x,y) =$$

$$= \iint_D 3x^2 + 3y^2\, d(x,y) = 3\underbrace{\iint_D x^2 + y^2\, dx\, dy}_{\geq 0}$$



Green T: Legyen C egy + irányítású irányítású...

$$\oint_C L\, dx + M\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) d(x,y)$$

Green tétel

DIV-tétel: $\oiint_{\partial M} \langle \vec F, \vec n \rangle \, dS = \iiint_M \nabla F \, d(x,y,z)$

$$\oint_{\partial D} \langle \vec F, \vec n \rangle \, dl = \iint_D \nabla F \, d(x,y)$$

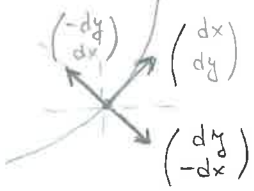
vagyis
$$\oint_{\partial D} F_1 n_1 + F_2 n_2 \, dl = \iint_D \left(F'_{1x} + F'_{2y}\right) d(x,y)$$

$$\vec n \, dl = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix} \qquad d\vec l = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \qquad \vec n \, dl = \begin{pmatrix} +dy \\ -dx \end{pmatrix}$$

vagyis
$$\boxed{\oint_{\partial D} F_1 dy - F_2 dx = \iint_D F'_{1x} + F'_{2y} \, d(x,y)}$$

vagyis
$$\boxed{\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \underbrace{-P'_y + Q'_x}_{\text{ha ez ettől } 1 \text{, akkor}} \, d(x,y)}$$
← előjelhiba?

területszámítás



I. $P = -y$, $Q = 0$: $\quad -\oint_{\partial D} y \, dx = A(D)$

II. $P = 0$, $Q = x$: $\quad \oint_{\partial D} x \, dy = A(D)$

III. $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$: $\quad \frac{1}{2} \oint -y dx + x dy = A(D)$

ha $y \cdot \dot x$ egyszerűbb alakú, akkor I

ha $x \dot y$ akkor II

ha $x \dot y - y \dot x$ akkor III

2017b

Green T

Anal3 gyak 4

vektanal 3

(7) Cikloid:

$$x = a(t - \sin t) \qquad \dot{x} = a(1 - \cos t)$$
$$y = a(1 - \cos t) \qquad \dot{y} = a \sin t$$

$$x\dot{y} = a^2 (t \sin t - \sin^2 t)$$
$$y\dot{x} = a^2 (1 - 2\cos t + \cos^2 t) = a^2 \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right)$$

$$\oint_{\partial M} y\,dx = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t \right) dt = 3\pi a^2 = 3a^2\pi$$

(8) Deltoid:

$$x = 2a\cos t + a\cos 2t \qquad \dot{x} = -2a\sin t - 2a\sin 2t$$
$$y = 2a\sin t - a\sin 2t \qquad \dot{y} = 2a\cos t - 2a\cos 2t$$

$$x\dot{y} = 4a^2\cos^2 t + 2a^2\cos 2t\cos t - 4a^2\cos t\cos 2t - 2a^2\cos^2 2t$$
$$y\dot{x} = -4a^2\sin^2 t + 2a^2\sin 2t\sin t - 4a^2\sin t\cos 2t + 2a^2\sin^2 2t$$

$$\oint_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \iint_M -P'_y + Q'_x \,dx \qquad P = -\frac{1}{2}y \qquad Q = \frac{1}{2}x$$

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 4a^2 - 2a^2(\cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t) - 2a^2$$
$$= 2a^2(1 + \cos 2t\cos t - \sin 2t\sin t)$$
$$\cancel{= 2a^2(1 + (2\cos^2 t - 1)\cos t - 2\sin^2 t\cos t)}$$
$$\cancel{= 2a^2(1 + 2\cos^3 t - \cos t - 2\sin^2 t\cos t)}$$
$$= 2a^2(1 + (1 - 2\sin^2 t)\cos t - 2\sin^2 t\cos t)$$
$$= 2a^2(1 + \cos t - 2\sin^2 t\cos t - 2\sin^2 t\cos t)$$

ezt az egésznek felével kell, mert $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$

$$J = 2a^2 \int_0^{2\pi} 1 + \cos t - 4\sin^2 t(\sin t)'\,dt = 4a^2\pi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3}\sin^3 t \right)' dt = \underline{4a^2\pi}$$

$$A(\Delta) = \frac{1}{2}J = \underline{2a^2\pi}$$

$$\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t = (1 - 2\sin^2 t)\cos t + 2\sin^2 t\cos t = \cos t$$

tehát $\cos 2t\cos t + \sin 2t\sin t = \cos t$

2017b

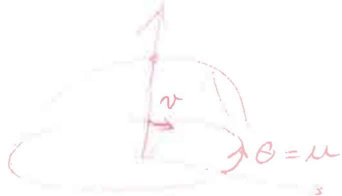
$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$$
$$= 2\cos^2 t - 1$$

vektanal 3

Anal3 gyak 4
Cikloid, Deltoid

2. heti Házi feladat (2016)

(HF) $S(u,v)=\begin{pmatrix} R\sin v\cos u\\ R\sin v\sin u\\ R\cos v\end{pmatrix}$



$(u,v)\in[0,2\pi)\times[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\frac{\partial S}{\partial u}\times\frac{\partial S}{\partial v} = -R^2\begin{pmatrix}\cos u(\sin v)^2\\ \sin u(\sin v)^2\\ (\sin v)^2\end{pmatrix} = -R(\sin v)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$ befelé mutat

$$d\underline{S} = \frac{\partial S}{\partial v}\times\frac{\partial S}{\partial u} = +R(\sin v)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

GÖMBI POLÁR KOORDINÁTA

Felület integrál

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$dS = \|d\underline{S}\| = |R(\sin v)|\,R = R^2\sin v$$ mivel $v\in[0,\pi]$ SŐT: MOST $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$F=\begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$$

$$\iint_S\langle F, d\underline{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\langle F(S(u,v)), \left(\frac{\partial S}{\partial v}\times\frac{\partial S}{\partial u}\right)\right\rangle dv\,du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(R\sin u\sin v,\ R\cos u\sin v,\ R\cos v)\cdot\begin{pmatrix}R\cos u\sin v\\ R\sin u\sin v\\ R\cos v\end{pmatrix} R\cdot\sin v\, dv\,du$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} +R^3\sin v\cos^2 v + 2R^3\cos u\sin u\sin^3 v\, dv\,du =$$

$$= -R^3\int_0^{2\pi}du\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 v(\cos v)'\,dv + R^3\overbrace{\int_0^{2\pi}\sin 2u\,du}^{=0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\,dv =$$

$$= 2\pi R^3\frac{\cos^3 v}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + R^3\underbrace{\frac{-\cos 2u}{2}\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 v\,dv$$

$$= -2\pi R^3\frac{1}{3}(0-1) = +2\pi\frac{R^3}{3}$$

Matlabbal ellenőrizve

Velkaud 3

Anal 3 gyak 2 HF kidolg

2. heti házi feladat

(8) $M: x^2+y^2=4$, $z\in[0,4] \Rightarrow R=2$

S_1: $\underline{s}_1(u,v)=\begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ v\end{pmatrix}$ $\quad d\underline{S}=\begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0\end{pmatrix}$

$(u,v)\in[0,2\pi)\times[0,4]$ $\quad dS=R\;(=\|d\underline{S}\|)$

$\underline{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0\end{pmatrix}$

$S_{2,3}$: $s_2(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0\end{pmatrix}$ $\quad s_3(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ 0\end{pmatrix}$

$d\underline{S}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix}$ $\quad d\underline{S}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$

bal oldal

$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow F\perp d\underline{S}$ $\quad S_{2,3}$ esetén $\Rightarrow \langle F, d\underline{S}\rangle=0$

$$\oiint_{\partial M}\langle F,d\underline{S}\rangle=\iint_{S_{2,3}}\langle F,d\underline{S}\rangle+\iint_{S_1}\langle F,d\underline{S}\rangle=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^4 (R^2\cos^2 u, R^2\sin^2 u, 0)\begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0\end{pmatrix} dv\,du=$$

$$=R^3\underbrace{\int_0^{2\pi}(\cos^3 u+\sin^3 u)\,du}_{=0}\int_0^4 dv=0$$

$$\iiint_M \nabla F\,dV=\iiint_M 2x+2y\,dV \overset{(*)}{=} 2\int_0^4 dv\int_0^R r\,dr\underbrace{\int_0^{2\pi}(\cos u+\sin u)\,du}_{=0}=0$$

Szelben: (áttérünk hengeres koordinátákra)

$$(*) = 2\int_0^4 dv\int_0^R r\,dr\int_0^{2\pi}\cos u+\sin u\,du=0$$

r: Jacobi mátrix det

(folyt)

tétel 3
gyak 2
HF 10 feladat

rehaud 3

(folyt.) - 2 heti hf. 8

alsó körlap súlyfüggvénye megadása:

$$S_2(u, r) = \begin{pmatrix} r\cos u \\ r\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\underline{S} = \frac{\partial S_2}{\partial u} \times \frac{\partial S_2}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} \Rightarrow dS = R$$

3*

$$f(r) = \frac{1}{r} \quad ; F = \operatorname{grad} f = -\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\operatorname{div} F = (3x^2+3y^2+3z^2)\frac{1}{\|\underline{r}\|^5} - \frac{3}{\|\underline{r}\|^3} = 0 \quad \text{ha } \underline{r \neq 0}$$

$$\oint\!\!\oint_C \langle F, d\underline{S}\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\langle F(S(u,v)), \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\rangle R^2 \sin v \, dv\, du =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{r^3}\cdot r^2 \cdot \frac{1}{R}\cdot R^2 \sin v \, dv\, du = -4\pi$$

$r = R = 1$ (az egység sugarú gömbön)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\underline{r}}{r^3}, \quad r \stackrel{\text{jel}}{=} \|\underline{r}\|$$

Maxwell I. egyenlete:

$$\oint\!\!\oint_{\partial M} \langle E, d\underline{S}\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

vektoranal 3

Anal 3
gyak 2
D3* [illegible]