Vektormező jelölés: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$F(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

vektormezőket nagy betűvel jelöljük

Jelölés $"\frac{\partial F}{\partial x}" = \boxed{DF}$

Def: F derív. ha $\forall f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható

$\Updownarrow$

Def: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffható $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ha $\exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = A \Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

vagyis $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) - A \Delta x\|}{\|\Delta x\|} = 0$

$$DF(x_0) = A$$

Lánc: $D(F \circ G)(x) = D(F(G(x))) = DF(G(x)) \cdot DG(x)$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tfh. $\exists F^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffható

$$DF^{-1}(F(a)) = (DF(a))^{-1}$$

(M) F vektormező, ami diff $a \in \mathbb{R}^n$-ben és annak környezetében

$\Updownarrow$

$DF(a)$ teljes rangú

pld: $F(r)=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$ $\quad \nabla\times F = \begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

↳ ennek minden pontjában z szerint rotálódik és mindenhol egyformannyira.

angolban $\boxed{curl = rot}$

Vektormező: → áramlás:

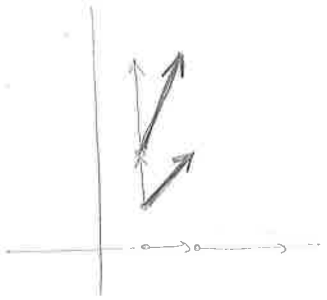
→ erőtér

→ elektromos tér : $\nabla B = 0$

→ mágneses tér

Skalármező: → potenciál

legyen pld: $F(r)=(x\ \ y^2\ \ 0) \rightsquigarrow \nabla F(r) = 1+2y$

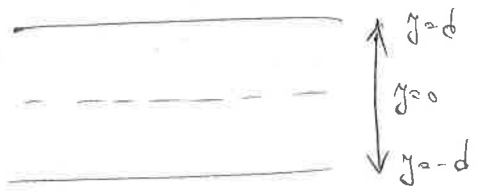


legyen pld: $\vec{E} = k_e \frac{Q}{\|r\|^3}\vec{r} = k_e Q\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = k_e Q\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}2x^2 + k_e Q(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$=$

Folyó áramlása:



$F(x,y,z) = \left[v_0\left(1-\frac{y^2}{d^2}\right), 0, 0\right]$

$\nabla\times F = \left(0, 0, \frac{2}{d^2}y\right)$

legyen $F(x,y) = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\operatorname{div} F = 1+1 = 2$

legyen $F(x,y) = \frac{1}{(}$

„$\vec{F}$ cirkulációja" : $\oint \vec{F}\, d\vec{l}$

$\boxed{\text{Felületintegrál}}$

Def: (Felület)

$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ típusú fv

$D \subset \mathbb{R}^2$

$S: \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \} \subset \mathbb{R}^3$

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Def: S sima (diffható), ha $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diffható

Spec. eset:

$x(u,v) = u$

$y(u,v) = v$

$z(u,v) = f(u,v)$

pld: egységgömb felülete (gömbi polárkoordináták)

$u \sim \theta$

$v \sim \varphi$ (z tengellyel bezárt szög)

$$\begin{cases} x(u,v) = \sin v \cos u \\ y(u,v) = \sin v \sin u \\ z(u,v) = \cos v \end{cases}$$

$D: [0, 2\pi) \times [0, \pi]$

Adott $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező

„$\iint_S f(x,y,z)\, dS$" $=$ $\iint_D f(s(u,v)) \cdot |s'_u \times s'_v| \, d(u,v)$

Jelentés: s'_u és s'_v = az érintősíkot kifeszítő bázisvektorok

$s'_u \times s'_v \equiv$ normálvektora

$\boxed{\text{az integrál értéke független } S \text{ paraméterezésétől}}$

Spec. eset: $S = \{ (u, v, f(u,v)) : (u,v) \in D \}$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D \underbrace{f(u, v, f(u,v))}_{\text{sűrűségfv.}} \underbrace{\sqrt{1+f_u'^2+f_v'^2}}_{\text{felület nagysága}}\, d(u,v)$$

A vektorokat $\underline{n}$ így jelöli!

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$S \subset \mathbb{R}^2$

Def: F FLUXUSA-a:

$$\boxed{\iint_S \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\text{egységnyi normálvektor}}\, dS \overset{\text{jel}}{=} \iint_S F\, d\underline{S}}$$

pld 1. $F(x,y,z) = \underline{r}$

S gömbfelület: R sugarú gömb.

$$\phi = \iint_S F\, d\underline{S} \qquad \underline{n} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\langle F, n \rangle = (x,y,z) \cdot \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R$$

$$n = \iint_S R\, dS = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

pld 2. $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S \equiv$ 

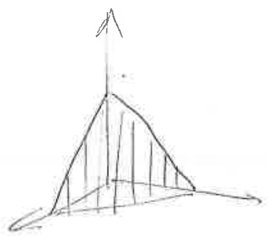
$S \perp F(x,y,z) \Rightarrow \phi = 0$

---

pld 3. $F = \underline{i}$

$S = \{ x+y+z = 1$, az első térnyolcadba eső rész $\}$

$$S(u,v) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\iint_S F \cdot \underline{n}\, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}}\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Megj Fluxus a síkon: $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

sima görbe $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ $\quad \underline{n}$ normálvektor

$$\phi = \int_\Gamma F \cdot \underline{n}\, dl$$

Felület integrál és vektor potenciálok

Newton Leibniz formula:

$f: [a,b] \to$ diffható (folytonosan)

$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$

(T) Divergencia tétel (Gauss – Osztrogradszkij)

Adott $M \subset \mathbb{R}^3$ korlátos térrész

Tfh. ∂M felület (sima felület)

Adottak $\underline{n}$ felület normálvektorai.

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffható folytonosan

$$\iiint_M \nabla F(x,y,z)\, d(x,y,z) = \oiint_{\partial M} F \cdot \underline{n}\, dS$$

Biz: $F = (f_1 \ f_2 \ f_3)^T$

$$\iiint_M (f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z})\, d(x,y,z) = \oiint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)\, dS$$

Tagonként igazoljuk

$$\iiint_M f'_{3z}\, d(x,y,z) = \iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS$$

Tfh. M egy egyszeresen összefüggő térrész

$$\partial M = \begin{cases} \partial M_{top} & n_3 > 0 \\ \partial M_{side} & n_3 = 0 \\ \partial M_{bottom} & n_3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{j.o.} = \iint_{\partial M} f_3 n_3\, dS = \overbrace{\iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3\, dS}^{1} + \overbrace{\iint_{\partial M_{bottom}}}^{2}$$

Tfh. $\partial M_{top} = \{(x,y,t(x,y)) \mid x,y \in D\}$

(ugyanígy)

$$1 = \iint_D f_3(x,y,t(x,y))\, d(x,y)$$

$$2 = -\iint_D f_3(x,y,b(x,y))\, d(x,y)$$

MINT:

$$M = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ b(x,y) \le z \le t(x,y)\}$$

$$\iiint_M d(x,y,z) = \iint_D \int_{b(x,y)}^{t(x,y)} f'_{3z}\, dz\, d(x,y)$$

$$= \iint_D \big(f(x,y,t(x,y)) - f(x,y,b(x,y))\big)\, d(x,y)$$

Gauss Osz. Biz.

Anal 3.
2. előadás
2016.09.30

Tfh. F vektorpotenciálos vagyis $\exists G$ u.h. $F = rot(G)$

$$div(F) = div(rot(G)) = 0$$

Ekkor

$$\oiint_{\partial M} F \cdot \underline{n}\, dS = \iiint_M div(F)\, dV = 0$$

tehát ha vektorpotenciálos, akkor: $\oiint_S F \underline{n}\, ds = 0 \quad \forall\ S$ sima, zárt felü

Lehet-e M lyukas: tórusz ✓ ∂M egy felülettel megadható

Gömbhéj esetén: $S_{R_1R_2} = S_{R_1} \setminus S_{R_2}$

$S_{R_1R_2}$

$$\iint_{S_{R_1R_2}} F\, \underline{n}\, dS = \oiint_{S_{R_1}} F d\underline{S} - \oiint_{S_{R_2}} F d\underline{S}$$

$$div(rot F) = \nabla(\nabla \times F) = \begin{vmatrix} \nabla \\ \nabla \\ F \end{vmatrix} = 0$$

tehát $\boxed{\vec{a}^T(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^T \\ \vec{b}^T \\ \vec{c}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \text{determináns!}}$

G-O. 2D-ben: $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$

$$div\, F(x,y) = P'_x + Q'_y$$

$M \subset \mathbb{R}^2$ korlátos ∂M: zárt görbe, 1D. sokaság

$\underline{n} \perp \partial M$-re

∂M: pozitív irányítás: balra van a közrezárt terület.

$$\int_{\partial M} P(x,y)\, dy - Q(x,y)\, dx = \iint_M P'_x + Q'_y\, d(x,y)$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S F(x,y,z)\, d\underline{S} = \iint_D \langle F(s(u,v)),\, s'_u \times s'_v \rangle\, d(u,v)$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\underline{\vec{S}}_m \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle\, dS$$

Skalármezők felületi integrálja

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(s(u,v)) \cdot \| s'_u \times s'_v \|\, d(u,v)$$

Egy rövid példa

$F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad S =$ egységgömb felső fele (a sugara)

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta \sin\varphi \\ a\cos\vartheta \cos\varphi \\ a \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$s'_u \times s'_v = \Big(a$

$$u = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\langle F, u \rangle = \frac{1}{a}(x^2+y^2+z^2) = a$$

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_S \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle\, dS = a \iint_S dS = a \cdot A$$

↳ félgömb felülete

Második pld

$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k$ $\quad ; \quad S =$ hengerfelület egy darabja:

$$S = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 = 1 \}$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{F}, \vec{u} \rangle = 0$$

tehát $\displaystyle\iint_S \langle \vec{F}, \vec{u} \rangle\, dS = 0$

Anal 3 2017 II

vektoranal 2 | 2. ea

(T) Gauss–Osztrogradszkij / Divergencia tétel

$M \subset \mathbb{R}^3$ térrész aminek határa ∂M sima felület.

$F: R \to \mathbb{R}^3$ $M \subset R \subset \mathbb{R}^3$ diff-ható vektormező

akkor: $\oiint_{\partial M} F(x,y,z)\, d\underline{S} = \iiint_M \operatorname{div} F(x,y,z)\, d(x,y,z)$

Biz Spec eset: M = normáltartomány

$$\oiint_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)\, dS \overset{?}{=} \iiint_M (f'_{1x} + f'_{2y} + f'_{3z})\, d(x,y,z)$$

tagonként egyenlőek.

$$\iint_{\partial M} f_3 n_3 \, dS = \iiint_M f'_{3z} \, d(x,y,z)$$

EZT a BIZONYÍTÁST ÁT KELL VENNI!

$$M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D ,\ b(x,y) \le z \le t(x,y) \}$$

Stokes T:

$$\iint_M F\,dS = \oint_{\partial M} \text{rot}\,F\,d\vec{l}$$

$M \subset \mathbb{R}^3$ felület

∂M sima görbe

$\underline{n} \perp M$

T érintőtere ∂M-nek } kompatibilisek

ha F vektorpot: $\nabla F = 0$

$$\boxed{\iint_M \overset{\text{rot}(F)}{F} \cdot \underline{n}\, dS = \underbrace{\oint_{\partial M} \overset{F}{\cancel{\text{rot}(F)}} \cdot \underline{T}\, dl}_{\text{cirkuláció}}}$$

Biz:

J.O.: $\oint_{\partial M} F\,T\,dl = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} dt =$

$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\,dt = -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} + \cancel{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,dt} = -\pi$

Green Tétel

Adott $D \subset \mathbb{R}^2$ korl. terület

C zárt görbe: $C = \partial D$

$P, Q : D \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\iint_D Q'_y - P'_x \, d(x,y) = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy}$$

Anal. 3. ea.

2016.09.27

Variációszámítás

Bernoulli probléma (1696) — Brachistochrone

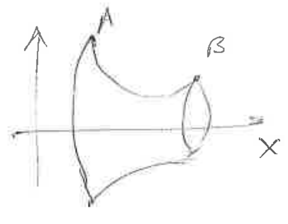
(1) 

Egy anyagi pont melyik görbe mentén ér el A-ból B-be a legrövidebb idő alatt.

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)-y_0}}\,dx$$

(ebben a konkrét esetben)

(cikloid ív)

(2) 

Forgástest felszín minimalizálása.

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

(láncgörbe)

tehát $\min\limits_{\substack{y(x)\\ y(x_1)=y_1\\ y(x_2)=y_2}} S(y)$

(3) $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid G(x,y,z)=0\}$

$P_0, P_1 \in \mathcal{F}$

$\Gamma : \gamma[t_0,t_1] \to R^3$ $\quad \gamma(t_0)=P_0$

$\gamma(t_1)=P_1$

$G(\gamma(t))=0 \quad (\gamma(t)\in\mathcal{F})$

$\gamma(t)$ hossza minimális.

Vagyis min $\displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_{t_0}^{t}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$

Alapfeladat:

Def: Adott egy $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ rögzített pont.

Megengedhető függvények:

$$\mathcal{C} = \{ \phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \text{, kétszer f. diffható} ;\ \phi(x_0) = y_0 ;\ \phi(x_1) = y_1 \}$$

Speciális funkcionál: $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, dx$$

3 vált., 2 szer diffható

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi)$$

Szükséges feltétel:

Tfh. $u \in \mathcal{C}$ optimális: $\min = I(u)$

$\mathcal{C}_0 = \{ \eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, kétszer f. diffható, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \}$ → Ez egy vektortér

$\forall \eta \in \mathcal{C}_0 :\quad I(u) \le I(u + \eta)$ → fixáljuk le η-t (tetszőleges)

$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta)$ → nullában lokális minimuma. $G'(0) = 0$

$$\frac{dG(\varepsilon)}{d\varepsilon} = I'(u + \varepsilon\eta) \cdot \eta$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} G(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \nabla F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ \eta' \end{pmatrix} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta') \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')\, \eta'\, dx = 0$$

$$\frac{dG(0)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}(x, u, u')\, \eta + \frac{\partial F}{\partial u'}(x, u, u')\, \eta'\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u} \eta\, dx + \cancel{\frac{\partial F}{\partial u'} \eta \Big|_{x_0}^{x_1}} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} \cdot \eta\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} \right) \eta\, dx = 0$$

nullának kell lennie $\forall \eta \in \mathcal{C}_0$ ez csak akkor lehetséges, ha

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

Lemma Ha valamely $C(x)$ függ

$$\int_{x_0}^{x_1} C(x)\,\eta(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$$

η folyt

Akkor $C(x) \equiv 0$

Köv: az optimális u fv-re teljesül:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \qquad \text{Euler egyenlet}$$

$$L[u] = 0 \qquad \text{Euler operátor}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = \nabla \frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{1} \\ u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

Példa: adott (x_0, y_0), (x_1, y_1) ahol összekötő egyenes legrövidebb.

$$\gamma(t) : \int_{P_0}^{P_1} |\dot\gamma(t)|\,dt = \int_{x_1}^{x_1} \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

$$I(\phi) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\phi'(x)^2}\,dx$$

$$F(x, \phi, \phi') = F(\cancel{x}, \cancel{u}, u') = \sqrt{1+u'(x)^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial u}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\frac{2u'(x)}{2\sqrt{1+u'(x)^2}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}} = 0 \quad \Big| \int_{x_0}^{x_1} dx \implies \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}} = \text{konst} \implies u'(x) = C$$

$$u(x) = Cx + D$$

$$\cancel{\left.\frac{u'(x)}{\sqrt{1+u'(x)}}\right|_{x_0}^{x_1} = x_1 - x_0 \implies \frac{u'(x_1)}{\sqrt{1+u'(x_1)}} - \frac{u'(x_0)}{\sqrt{1+u'(x_0)}} = x_1 - x_0}$$

Spec esetek

① $F(x,u,u') = F(x,u) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u'} = 0$

$\hookrightarrow L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \rightarrow$ u-ra ez egy implicit függvény

② $F(x,u,u') = F(x,u')$

$\hookrightarrow L[u] = -\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u'} = \text{const} \Rightarrow u' = g(x, \text{const})$

③ $F(x,u,u') = F(u,u')$ energia függvény (leggyakoribb)

$\hookrightarrow L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0 \cancel{\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u} - \partial^2 F}$

$$f(u,u',u'') = 0 \qquad E = F - u'\frac{\partial F}{\partial u'}$$

$$F'_u - F''_{uu'}u' - F''_{u'u'}u'' = 0$$

$$E = F - u'F'_{u'}$$

$$E(x) = F(x,u,u') - u'F'_{u'}(..)$$

$$\cancel{E'(x) = F'_u \cdot u' - u''F'_{u'} - u'F''_{u'u'} \cdot u''}$$

$$E'(x) = \nabla F \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} - u''F'_{u'}(..) - u' \cdot \nabla F'_{u'} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}$$

$$= u'\left(F'_u - F''_{uu'}u' - F''_{u'u'}u''\right) = u' \cdot L[u] = 0$$

vagyis $E(x) = \text{konst}$

② Minimális forgástest felszíne

$y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ $\qquad \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

$\cancel{F = \sqrt{1+u'(x)^2}}$

$$F(y,y') = y(x)\sqrt{1+y'(x)^2} \Rightarrow F_{y'}' = y\,\frac{2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}$$

$$E(y,y') = F(y,y') - y' F_{y'}'(y,y') = y\sqrt{1+y'^2} - y'\left(y\,\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}}\left(1+u'^2 - 2u'^2\right) = c$$

$$= \frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = c \Rightarrow u^2 = c^2(1+u'^2)$$

$$\sqrt{\frac{u^2}{c^2}-1} = u' \quad \cancel{\Rightarrow u = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{u^2-c^2}\,dx}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{c^2}\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\frac{u'}{\sqrt{u^2+c^2}}\,dx$$

$$\frac{x-x_0}{c^2} = \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$\frac{x-x_0}{c^2} = \operatorname{arch}\left(\frac{u(x)}{c}\right) - \operatorname{arch}\left(\frac{u(x_0)}{c}\right)$$

Anal 3 ea.
4. hét
Konz…

Korlátozásos feladat

$$\{G(x,y,z)=0\} = S \subset \mathbb{R}^3$$

Min. hossz. út: $\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$

Pl: henger - alapja egységkör

S = palást

$$\gamma(\theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$ a két keresett függvény: $\theta(t)$, $z(t)$

Görbe mentén a táv: $\int_0^1 \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, dt =$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-\sin\theta)^2\cdot\dot\theta^2 + (\cos\theta)^2\dot\theta^2 + \dot z^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}\, dt$$

$$I(\theta, z) = \int_0^1 \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}\, dt$$

$$F = F(\dot\theta, \dot z) = \sqrt{\dot\theta^2+\dot z^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \theta} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot\theta} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial \dot\theta} = C_1 \Rightarrow \dfrac{\dot\theta}{\sqrt{\dot z^2+\dot\theta^2}} = C_1 \Rightarrow \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial F}{\partial \dot z} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial F}{\partial \dot z} = C_2 \Rightarrow \dfrac{\dot z}{\sqrt{\dot z^2+\dot\theta^2}} = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot\theta^2 = C_3(\dot z^2+\dot\theta^2) \\ \dot z^2 = C_4(\dot z^2+\dot\theta^2) \end{cases} \Rightarrow \ldots \quad \begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + C_5 t \\ z(t) &= z_0 + C_6 t \end{aligned}$$

$\downarrow$

Geodetikus görbék

Anal 3

Ált. eset:

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u, u', u'')\, dx \quad , \; u: \text{4x diffható}$$

min $I(u)$ - t

Szükséges felt.:

$$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u+\varepsilon\eta, \ldots)\, dx \quad \Big| \frac{d}{d\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \cancel{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta' + \frac{\partial F}{\partial u''}\eta''\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u}\eta\, dx + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'}\eta - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial u'} \ldots$$

(T) $I(u)$ első variációja $= 0$

$$\boxed{L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial u''} = 0}$$

4. rd [rendű] ODE

Variációszámítás 3.-rész

Geodetikus görbék: adott egy felület $G(\underline{r}) = 0$

Adott $P_1, P_2 \in \mathcal{F}$ $\quad \gamma$: legrövidebb görbe

$$I(r) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^{2} + \dot{y}^{2} + \dot{z}^{2}}\, dt$$

$$I(y,z) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx$$

Mo: felület paraméterezésével

másik típusú korlátozás: Integrál alakú!

$$\boxed{\begin{aligned} &\min I(\phi); \quad \phi \in \mathcal{T} \\ &I(\phi) = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\phi,\phi')\, dx \qquad (1) \\ &\text{feltéve: } \int_{x_1}^{x_2} G(x,\phi,\phi')\, dx \end{aligned}}$$

→ Dido hercegnő problémája

$u: [0,1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diffható

$$\boxed{\begin{aligned} &u(0) = u(1) = 0 \\ &\int_0^1 \sqrt{1+u'(x)}\, dx = L \\ &\min \int_0^1 u\, dx \qquad (2) \end{aligned}}$$

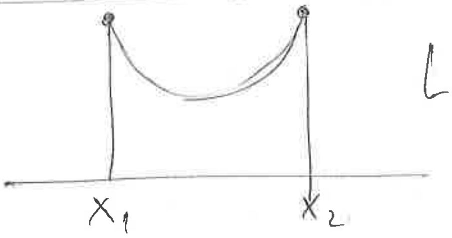
← konkrét pld.

T Tfh. u opt. megoldása (1)-nek, akkor az stacionárius megoldása lesz az $(I - \lambda J)(u) = \int_{x_1}^{x_2} (F - \lambda G)(x,u,u')\, dx$ funkcionálnak.

Variációszámítás 3.
Lagrange mult.
6. tétel

(2)-re: $I - \lambda J = \int_0^1 \left[u - \lambda\sqrt{1+u'^2}\right] dx$

Feladat: Adott két pont:



L hosszú kábel
$L > x_2 - x_1$

Mi lesz az alakja?

Ahol a potenciális energia minimális.

Sűrűsége: $\sigma \Rightarrow$ Pot energia: $\sigma g \int_\gamma y\,ds = \underline{\sigma g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx}$ minim

s.t.: $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx = L$

Feladat: $I^*(y) = \int_{x_1}^{x_2} (y \pm \lambda)\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$\boxed{F^*(x,y,y') = (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow (y-\lambda)\sqrt{1+y'^2} - y'(y-\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Izoperimetrikus feladat

→ Adott kerület ⇒ maximális terület
→ Adott terület ⇒ minimális kerület

} Feladatok egymás DUÁLISAI

Pl. legyen a zárt görbe az origó körül

$$\gamma(t) = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

kerület: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = K$

$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x^2 + y^2)\,dt$ (Green T-ből következik)

Stac. pont: (folyt)

Stacionárius pontját keressük:

$$I(x,y) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\right)}_{F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})} dt$$

$F - \dot{x}F'_{\dot{x}} - \dot{y}F'_{\dot{y}} = C$
Energia független

$$x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \dot{x}\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} - \dot{y}\frac{\lambda\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C$$

$$x^2+y^2+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - \lambda\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = C$$

$x^2+y^2 = C \Rightarrow$ kör

Többdimenziós variáció

Feladat: $D \subset \mathbb{R}^2$

$u: D \to \mathbb{R}$

Mikor lesz u felszíne minimális

$$F = \iint_D \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}\, d(x,y) \qquad (3)$$

+ boundary condition!

$\mathcal{C}: \{u: D\to\mathbb{R}$, kétszer diffható : $u(x,y) = u_0(x,y)\ \forall (x,y)\in\partial D\}$

↳ Szappanhártya

Általános feladat: $I(u) = \iint_D F(x,y,u,u_x',u_y')\, d(x,y) \to$ min / max $\quad (4)$

$u \in \mathcal{C} \to$ boundary conditions

ahol $F: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

T $u\in\mathcal{C}$ optimális akkor u eleget tesz Euler egyenletnek:

$$\boxed{L[u] = F_u' - \frac{\partial}{\partial x}F'_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F'_{u_y} = 0}$$

PDE

Variációszámítás 3.
Lagrange mult.
6. hét

(3)-ra kapom: (min. felszín)

$$F = \sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}$$

$$\cancel{\frac{\partial F}{\partial u}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x'} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y'} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{u_y'}{\sqrt{1+u_x'^2+u_y'^2}} = 0}$$ ← másodfokú PDE

Ha u_x' és u_y' „kicsi", akkor $L[u]=0 \approx \Delta u = 0$
harmonikus fv.

A Laplace egyenlet általában a nyugalmi állapotban lévő fizikai rendszereket írja le.

Alkalmazás

m tömegű l hosszú húr, nyílik => elhanyagolt rezegni

$\forall t$ időpontban $x \longmapsto u(t,x)$, $x \in [0,l]$

Húr mozgásának egyenlete

Hamilton elve: $\int T - V \, dt \to$ min (minimal action)

t időpontban a mozgási energia:

$$T = \frac{m}{2l}\int_0^l u_t'^2 \, dx$$

helyzeti energia:

$$V = \tau \int_0^l \left(\sqrt{1+u_x'^2} - 1\right) dx$$

rugalmassági tényező megnyúlás?

$$\min \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \underbrace{\left(\frac{m}{2l} u_t'^2 - \tau\sqrt{1+u_x'^2} + \tau\right)}_{L(t,x,u,u_t',u_x')} dx\,dt$$

Euler

$$u_{tt}'' = \frac{m}{2l}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x'}{\sqrt{1+u_x'^2}}$$

$$\boxed{u_{tt}'' \cong \frac{m}{2l} u_{xx}''}$$ Wave eq.

Sokaságok (Th. Garrity 84old és 126old)

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ k dim sokaság $k < n$, ha $\forall p \in M$

$\exists\ \mathcal{U}$ környezet

$\exists\ F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$

$\exists\ V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz

Vagyis a sokaság lokálisan leírható k darab paraméterrel

$\mathbb{R}^k$: paraméter tér

Igaz, hogy $F^{-1}(M \cap \mathcal{U}) = V$, vagyis $\boxed{F(V) = M \cap \mathcal{U}}$

F diffható és Jacobi mátrixa teljes rangú

Ezen definíció alapján a sokaság alapvetően nyílt halmaz

$$DF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial u_k} \end{bmatrix} =$$

pld 1 egységkör:

$$M = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$DM = \frac{\partial M}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \text{ teljes rangú}$$

7. hét

DIFFGEO

Cél: Általános Stokes tétel

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega}$$

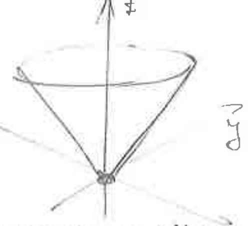
ω → differenciál forma

$d\omega$: külső derivált. (valamilyen mértékű

pld 2. kúp $\subset \mathbb{R}^3$

$F(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2+v^2}\right)$ → 2 dim sokaság kivéve a $(0,0,0)$-ban

$\nexists\ DF(0,0,0)$



$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{pmatrix}$$

Differenciálgeo

7. hét

(M) 0- dim. sokaság $\equiv M$ ha $|M|$ véges

Def Sokaság lezárása, határa:

$$M \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists (x_n) \subset M, \lim_{n \to \infty} x_n = x\}$$

↳ lezárt

$\partial M = \overline{M} \setminus M$ határa

pld S^1 = egységkör

$\partial S^1 = \emptyset$

és $\overline{S^1} = S^1$

pld: $\cancel{t}(1,2) \to \mathbb{R}^2$

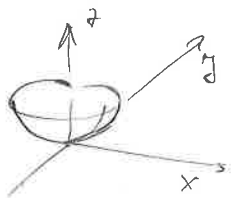
$r(t) = (t, t^2)$

$M = \{r(t) \mid t \in (1,2)\}$

$\partial M = \{(1,1), (2,4)\}$

$(u,v) \in S^2$ egységkörlap (csak a belseje)

$F(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ $\quad DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$ ✓

M: 

$F: R \to \mathbb{R}^3$

$R = \{(u,v) \mid u^2+v^2 < 1\}$

2- dim. sokaság

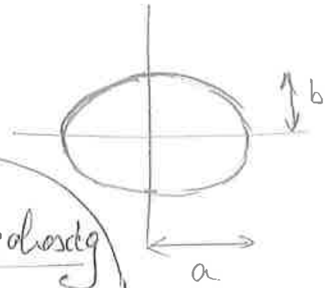
$\overline{M} : M \cup \partial M$; ∂M = vonal

↓ határkörlap

$\partial M = \{\cos t, \sin t, 2\}$

8. heti (első diffgeom)

$\boxed{HF_1}$



I Def: (2.1.1) Paraméteresen megadott sokaság

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim !diffható! sokaság, ha $\forall p \in M$-re $\exists \mathcal{U}_p$ környezet amelyre megadható egy diffható paraméterezés.

Vagyis $\forall p \in M$-re $\exists \mathcal{U}_p$ környezet

$\exists \Phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ diffható leképezés

$\exists V_p \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, hogy $\boxed{\Phi(V_p) = \mathcal{U}_p \cap M}$

és $D\Phi$ Jakobi mátrix teljes rangú

↳ ennek alapján igazoljuk hogy az ellipszis 1.-dim. sokaság.

tehát: „M = ellipszis"

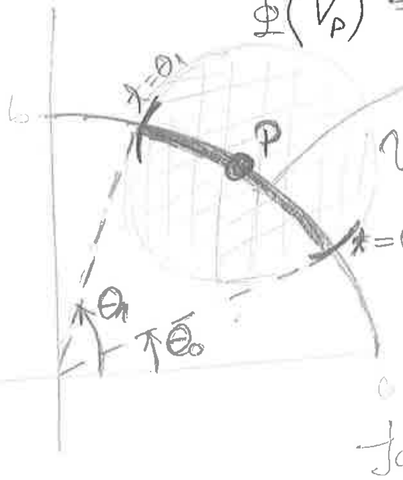
$\forall p \in M \cancel{\setminus \{(a,0)\}}$-ra $\exists \mathcal{U}_p \subset \mathbb{R}^2$ környezet úgy, hogy:

$\exists \Phi(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}$ diffható, $D\Phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}}$ teljes rangú $\forall t \in V_p = (\theta_0, \theta_1)$

$\exists V_p = (\theta_0, \theta_1) \subset (0, 2\pi + \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$

és valóban $\Phi(t)$, $t \in (0, 2\pi)$ az ellipszis pontjait adják, vagyis

$\Phi(V_p) = \mathcal{U}_p \cap M$



ha $p = (a, 0)$, akkor

$\exists \mathcal{U}_p$

$\exists \Phi(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix}$ diffható

$\exists V_p \subset (0, 2\pi)$

$D\Phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -b \sin t \end{pmatrix}$ teljes rangú $\forall t \in V_p$

Így sem rossz CSAK redundáns!

Anal 3 8. heti gyak.
HF_1

(folyt)

II Def. 2.1.8 Implicit megadású sokaság

$M \in \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság, ha megadható n-k db n változós függvény zérushelyeként, vagyis $\exists\ g_1, \dots, g_{n-k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffható fv-ek amelyekre:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\}$$

máshogy:

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0 \ \forall\, i = \overline{1, n-k} \ (i = 1, \dots, n-k)\}$$

És $Dg = \begin{pmatrix} \nabla g_1 \\ \vdots \\ \nabla g_{n-k} \end{pmatrix}$ teljes rangú!

↳ Ezzel a megadással biz. be, hogy az ellipszis sokaság (1-dim)

$\mathbb{R}^2$-ben vagyunk $(n=2)$, 1-dim $(k=1)$ ⟹ 1 db implicit fv. kell $(n-k=1)$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \to \text{előtanulmányaink alapján}$$

$$\hookrightarrow g_1(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \to \text{diffható}$$

$$Dg = \nabla g_1 = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix} \to \text{1 rangú, nyilván teljes rangú!}$$

Pl. Projektív terek.

$\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$

$r_1=(x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2)=r_2$ ha $\exists\, \lambda\in\mathbb{R}$ $r_1=\lambda r_2$

$P^2 = \mathbb{R}^3\setminus\{0\}/_\sim \equiv$ 2 dim sokaság

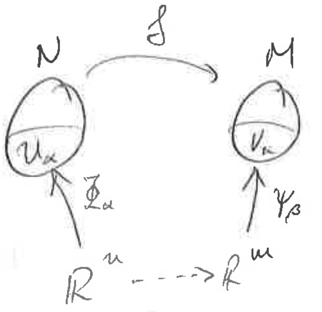
(Jegyzet + gyakorlat)

$P^n = \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/_\sim$ → ekvivalencia osztályok halmaza

Projektív sík.

(M) Kiterjesztés: Adott két sokaság: N, M alterekkel

$f: N\to M$ diff-e?



(U_α, Φ_α) N-beli

(V_β, Ψ_β) M-beli

$\Psi_\beta^{-1}\circ f\circ \Phi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\mathbb{R}^n$-beli sokaság

Ha $M\subset\mathbb{R}^n$ k-dim. sokaság $\forall p$-ben T_p : k-dim. altér

N_p : n-k-dim altér

Def: M : k dim. sokaság, ha $\forall p\in M$

$\exists U$ $\exists$ n-k db fv. $g_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ diffható és ΔS teljes rangú (gradiensek lin. ftlen)

$$M\cap U = \{x\in\mathbb{R}^n \mid g_j(x)=0 \ \forall j=\overline{1,n-k}\}$$

↳ Sokaság implicit megadása

Pld: S^1 esetén: $g(x,y) = x^2+y^2-1$

$$M = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

Áll: $N_p = \{\nabla g_j : j = \overline{1,k}\}$

↳ kifeszített altér

Ugyanis itt szintvonalak vannak!

Egy adott $g(x) = 0$ egy $n-1$ dimenziós sokaság,

itt a normálvektor egyértelmű: $\nabla g(x)$

Irányítás $\equiv N_p$ (T_p)

Def: egy vektortér irányítása!

V két bázisa: $(v_1, , v_n)$

$(w_1, \dots, w_n)$

$\exists A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ úh. $v_i = Aw_i$

$\det A \neq 0$

Bázisok két osztályra, két ekvivalencia osztály.

$$[v] = \{w \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{ha } v = Aw, \det(A) > 0\}$$

Mérték M-en: k-dim. sokaság

Vonal integrál:

$$\int_\Gamma f(r)\, d\ell = \int_\Gamma f(r)\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\int_\Gamma F(r)\, d\underline{\ell} = \int_\Gamma F(r)\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} =$$

$$= \int_\Gamma \underbrace{F_1(r)\,dx + F_2(r)\,dy}_{\omega} \quad \cancel{\text{Stokes}}$$

$$\cancel{= \int_{\partial\Gamma} d(F_1(r)\,dx + F_2(r)\,dy)}$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(dx_i \wedge dx_I)$$

ha $\omega = f\, dx_I$

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I$$

ezt nem értem!

ha $\omega = f\,dx + g\,dy$

$$d\omega = f'_x\, dx\wedge dx + f'_y\, dy \wedge dx$$
$$+ g'_x\, dx\wedge dy + g'_y\, dy\wedge dy =$$
$$= (g'_x - f'_y)\, dx\wedge dy$$

tehát: $\int_{\partial\Gamma} d(f\,dx + g\,dy) = \underline{\int_{\partial\Gamma} (g'_x - f'_y)\, dx\wedge dy}$

ezt hogy kell értelmezni?

$$\cancel{\int_D f(x)\,dx = \int_{\partial D} f}$$

$\omega : \mathbb{R}^{n\cdot k} \to \mathbb{R} \implies (v_1, \dots, v_k) \mapsto |v|$

$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ k-formák vektortere

↳ wedge

↓

bázist alkotnak az elemi k-formák

$$\dim\left(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)\right) = \binom{n}{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \bigwedge_{i=1}^{k} dx_{\sigma_i} \\ \lambda &= \bigwedge_{j=1}^{k} dx_{\varrho_j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau\wedge\lambda = \bigwedge_{j=1}^{k} dx_{\sigma_j} \wedge \bigwedge_j dx_{\varrho_j}$$

Tanárnak:

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= f'_{x_1}\Delta x_1 + \dots + f'_{x_n}\Delta x_n + o(|\Delta x|)$$

Anal 3. 9.
differenciál-formák

Sima
~~Vonal~~ integrál

$$\int_D f(x)\,dx \quad ; \quad D=[a,b)$$

$D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\in(a,b)\}$

es egy 1 dim. szakasz az $\mathbb{R}^1$-ben
⇓ nincs multiplic. megoldás
⇓ ∄ normálvektor!

tfh. $\exists\, F(x)$ u.h. $F'(x)=f(x)$

$$\int_D F'(x)\,dx = \int_D d(F(x)) = \int_{\partial D} F(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

Vonalintegrál

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(x)\,d\underline{l} = \int_\Gamma f(x,y)dx+g(x,y)dy = \int_\Gamma d(v(x,y)) = \int_{\partial\Gamma} v(x,y)$$

tfh. $\exists\ \cancel{\Phi}(x,y)$ u.h. $d(v(x,y)) = f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy$
vagyis $F(x)$ potenciálos.

$$\int_\Gamma f(x)dl = \int_\Gamma f(x)\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_D f(\gamma(t))\sqrt{d(x(t))^2+d(y(t))^2} =$$

$$= \int_D f(\gamma(t))\sqrt{x'(t)^2dt^2+y'(t)^2dt^2} = \int_D f(\gamma(t))\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}\,dt$$

$f(x,y,z)=f(r)$

$$df(x,y,z) = \underbrace{f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz}_{\text{gradiens}}$$

Felületintegrál

$$\int_S F(x)\,d\underline{S}$$

$T_0: \Lambda^0(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$

$T_1: \Lambda^1(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$

$T_2: \Lambda^2(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$

$T_3: \Lambda^3(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$

$T_1(d\omega) = \text{grad}\,T_0(\omega)$

$T_2(d\omega) = \text{rot}(T_1(\omega))$

$T_3(d\omega) = \text{div}(T_2(\omega))$

$$d(f\,dx+g\,dy+h\,dz) =$$
$$= f'_y\,dy\wedge dx + f'_z\,dz\wedge dx$$
$$+ g'_x\,dx\wedge dy + g'_z\,dz\wedge dy$$
$$+ h'_x\,dx\wedge dz + h'_y\,dy\wedge dz =$$
$$= -f'_y\,dx\wedge dy - f'_z\,dx\wedge dz$$
$$+ g'_x\,dx\wedge dy - g'_z\,dy\wedge dz$$
$$+ h'_x\,dx\wedge dz + h'_y\,dy\wedge dz$$
$$= (g'_x-f'_y)\,dx\wedge dy + (h'_x-f'_z)\,dx\wedge dz + (h'_y-g'_z)\,dy\wedge dz$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}dy\wedge dz-dz\wedge dy\\dz\wedge dx-dx\wedge dz\\dx\wedge dy-dy\wedge dx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}dydz\\dzdx\\dxdy\end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$-ben $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim sokaság

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ diff k-forma

$$\int_M \omega = ?$$

Spec esetek:

1) $k = n$ $\quad M =$ tér rész. $\quad \omega = f(x) \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{dV}$ $\Big\}$ $\int_M f(x)\, dV$ jól számítható!

1.1) $\mathbb{R}^3$-ban

$$\int_M \omega = \iiint_M f(x,y,z)\, dV$$

2) $n = 2$, $k = 1$

$M = \{ \gamma(t),\ t \in [a,b] \}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\omega = f\,dx + g\,dy = \underline{F}\,d\underline{l}$$

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma f\,dx + g\,dy = \int_\Gamma \underline{F}\,d\underline{l} = \int_a^b \underline{F}(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt$$

$(x,y) \longmapsto (x(t), y(t))$

$dx \longmapsto dx(\Delta\gamma)\, dt = x'(t)\, dt$ $\quad$ és $\quad dx\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u$

$\hookrightarrow$ dx-et alkalmazom $\Delta\gamma$-ra

$dy\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = v$

hud 3 e.G 10 ka...

utolsó diffgeo ← k-

$$F = (f, g, h)^T \longleftrightarrow \omega = f dx + g dy + h dz$$

$$\int_{\Gamma} F\, dR = \int_{\Gamma} \omega = \int_a^b f(\gamma(t))\, dx(\dot\gamma(t))\, dt + g(\gamma(t))\, dy(\dot\gamma(t))\, dt + h(\gamma(t))\, dz(\dot\gamma(t))\, dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\, dt$$

<u>Def</u> M k dim. sokaság

$\Phi : B \to \mathbb{R}^n$

$\Phi(B) = M$ egy-egy ért.

$D\Phi$: $n \times k$ dim.

$\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$; $\omega = f dX_I$

$$\int_M \omega = \int_B f(\Phi(u))\, dX_I(D\Phi(u))\, \underbrace{du_1 \dots du_k}_{\text{„}dV_u^{(k)}\text{"}}$$

(T) Stokes tétel:

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. sokaság

tfh. ∂M $k-1$ dim sokaság.

Adott ω diff. $k-1$ forma

Ekkor $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$

① Newton – Leibniz.

$n = 1, \; k = 1$

$M = (a,b)$

$\partial M = \{a, b\} \; ; \; d\omega = f'(x)\, dx$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \implies \int_{(a,b)} f'(x)\, dx = \int_{\{a,b\}} f(x)$$

② $n = 3, \; k = 2$

$M \subset \mathbb{R}^3 =$ felület

$M = \{ s(u,v) \mid (u,v) \in D \}$

$\partial M = \{ \gamma(t) \mid t \in (a,b) \}$

$\oint \omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz \equiv F$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \implies \iint_M \left\langle \operatorname{rot} F, \begin{pmatrix} dy\,dz \\ dz\,dx \\ dx\,dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\partial M}$$

③ $n = 3, \; k = 3$ G – O

④ $n = 2, \; k = 2$ Green

⑤ $n = 2, \; k = 1$ Poten ciál !

PDE: jelölés: $D^{(2,0)} u(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)$

$D^{(1,1)} u(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x,y)$

Lineáris : $\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u = 0$ homogén

Laplace : $\Delta u = 0$

hud 3 éa. 10 lat
ntelod diffgeom

$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ + kezdeti felt.

↳ ha F Lipschitzes, stb. stb., akkor $\exists!$ megoldás

Alapkérdések

1. van-e megoldás?
2. ha van egyértelmű-e?
3. ha egyért. folyt. függ-e a kezd. ért., paraméterértéktől?

nem feltétlenül

Az egyenlet jól kondicionált, ha 1, 2, 3.
„well-posed"

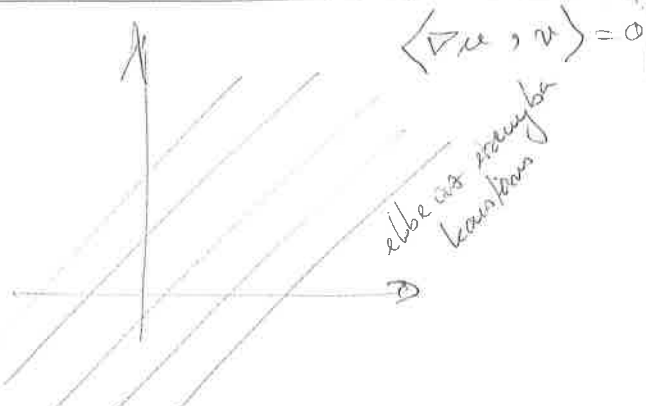
különben rosszul kond. ≡ „ill-posed"

ha nem létezik megoldás ami diffható, akkor $\exists$-het olyan meg, ami nem diffható

Transzport: (Homogén)

$$u'_t + b u'_x = 0$$

$$u(x,0) = g(x)$$



legyen $z(s) = u(x+sb, t+s)$

$$z'(s) = \underbrace{u'_x b + u'_t = 0} \Rightarrow z(0) = z(-t) = u(x-bt, 0) = g(x-bt)$$

tehát $z(0) = u(x,t) = g(x-bt)$

A megoldás szükséges felt. hogy $g(x)$ sima

Ha g nem sima, akkor $u(x,t) = g(x-bt)$ gyenge megoldás.

Inhomogén transzport egyenlet

$$\begin{cases} u'_t + b u'_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

→ homogén rész: $v'_t + b v'_x = 0$ (2), $v(x,0) = g(x)$

→ inhomogén rész: $w'_t + b w'_x = f(x,t)$ (3), $w(x,0) = 0$

ekkor $u = v + w$ megoldása (1)-nek.

$w(x,t) \rightsquigarrow z(s) = w(x+sb, t+s)$ és $z'(s) = w'_x b + w'_t = f(x+sb, t+s)$

$$z(-t) = 0$$

$$z(0) = \cancel{\int_{-t}^{0} f(x,t)\, ds} = \int_{-t}^{0} f(x+sb, t+s)\, ds = \int_0^t f(x+(u-t)b, u)\, du$$

$$t + s = u$$

$$\boxed{u(x,t) = g(x-bt) + \int_0^t f(x+(u-t)b, u)\, du}$$

Szuperpozíció elve

Több dimenzióban

$$\begin{cases} u'_t + \langle b, \nabla u \rangle = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$\to$ irány menti derivált.

Általánosabban:

$$a(x,t)\, u'_t + b(x,t)\, u'_x = 0$$

$\leftarrow$ modellinvertáló esetén fontos

Laplace egyenlet.

$u(x,y,z)$ hőmérséklet, potenciál, anyag sűrűség.

Egyensúly: nincs mozgás $\forall S \in \Omega$ zárt felületen

$$\oint\!\!\oint_S F\, d\underline{S} = 0 \quad (\text{fluxus} = 0)$$

vagyis $$\iiint_M \operatorname{div} F\, dV = 0 \quad \forall M \subset \Omega$$

Tfh. $F(x,y,z) = -a \operatorname{grad}(u(x,y,z))$

$\operatorname{div} F = -a \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x,y,z) = -a\, \underline{\Delta u = 0} \Rightarrow$

$$\Delta u = 0$$

Lemma: Tfh. $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\forall M \subset \Omega \quad \iiint_M \eta(x,y,z)\, dV = 0$$

Ekkor $\eta(x,y,z) = 0$

Laplace egyenlet: $\Delta u = 0$

+ peremfeltétele a $\partial\Omega$-n

pld. Dirichlet felt. $u(x) = f(x)$ $\forall x \in \partial\Omega$

Displacement problem: ← ez egy jól kondicionált feladat

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 0 \\ u(x) = f(x) \text{ ha } x \in \partial\Omega\end{array}}$$

Neumann feltétel $\partial_n u(x) = f(x)$ $\partial\Omega$

($\partial\Omega$-ra merőleges irányú deriváltja)

III. felt:

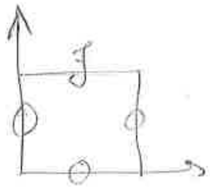
$$a u + b\, \partial_n u(x) = f(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 0 \\ \partial_n u(x) = f(x)\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\Delta u = 0 \\ a\,\partial_n u(x) + b\,u(x) = f(x)\end{array}}$$ ← jól kondicionált ah

$\boxed{n = 2}$ $u(x,y)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\begin{array}{l}u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \\ u(x,y) = f(x,y) \text{ ha } (x,y) \in \partial\Omega\end{array}}$$

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$



$u(x,0) = 0$

$u(0,1,y) = 0$

$u(x,1) = f(x)$

A megoldást ilyen keressük módon:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$X''Y + XY'' = 0$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

And 3 ea.
11. hét

$$X''(x) = \lambda X(x)$$

$$Y''(y) = -\lambda Y(y)$$

$u(x,0)=0 \Rightarrow X(x)\,Y(0)=0 \quad \forall x \Rightarrow Y(0)=0$

$u(0,y)=0 \Rightarrow X(0)\,Y(y)=0 \quad \forall y \Rightarrow X(0)=0$

$u(x,1)=0 \Rightarrow \cancel{Y}(1)=0$

lehangyeg: $\begin{cases} X''=\lambda X \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$ ha $\lambda>0$: $X''=\alpha^2 X$

$X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}$

$\begin{cases} X(0)=A+B=0 \\ X(1)=Ae^{\alpha}+Be^{-\alpha}=0 \end{cases}$ ↯

ha $\lambda<0 \Rightarrow \lambda=-\alpha^2$

$X(x)=C\cos(\alpha x)+D\sin(\alpha x)$

$X(0)=C=0$

stb..

$X(1)=D\sin(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=k\pi$

$\lambda=-(k\pi)^2$

$$Y''=(k\pi)^2 Y$$

$$Y(y)=Ae^{k\pi y}+Be^{-k\pi y}$$

$A=-B$

$u_k(x,y)=\sin(k\pi x)\,\mathrm{sh}(\cancel{k}\pi y)$ → megoldás jelölt.

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k u_k(x,y)$$

$$f(x)=u(x,1)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\pi x)\,\mathrm{sh}(k\pi)$$

ha f Fourier sorfejtés

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$$

$$b_k=\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,dx$$

$$\boxed{B_k=\frac{b_k}{\mathrm{sh}(k\pi)}}$$

PDE másodrendű, kétváltozós

Hővezetés véges rúdban : $u_t' = u_{xx}''$ $\quad t > 0$

$x \in (0,1)$

kezdeti felt.: $u(x,0) = f(x)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ (Peremfeltétel)

Megold.: $u(x,t) = X(x)\, T(t)$

$$X T' = X'' T$$

$$\frac{T'}{T} = + \frac{X''}{X} = \lambda \Rightarrow \underline{\mathrm{I}}\ \ X'' = \lambda X \qquad \lambda < 0$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

$$\underline{\mathrm{II}}\ \ T' = \lambda T$$

$\underline{\mathrm{I}}$ $\left.\begin{array}{l} X'' = -s^2 X \\ X(0) = X(1) \end{array}\right\} \Rightarrow X(x) = A \cos sx + B \sin sx$

$X(0) = A = 0$

$X(1) = B \sin s \Rightarrow s = n\pi$

$\underline{\mathrm{II}}$ $T' = -(n\pi)^2 T \Rightarrow T_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t}$

$$u_n(x,t) = e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = f(x)$$

Idő megfordítása

$t \mapsto -t$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{U}(x,t) = u(x,-t) \\ \mathcal{U}'_t = -u'_t \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{U}'_t = -\mathcal{U}''_{xx} \Rightarrow \mathcal{U}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x)$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall M > 0$-ra $\exists f$
amellyre $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \varepsilon$
mégis $\|\mathcal{U}(x,t)\| > M$ elegendően
nagy T-re

Hővezetés Neumann feltétellel

$u'_t = u''_{xx}$

$u(x,0) = f(x)$

Neumann felt

$u'_x(0,t) = u'_x(1,0) = 0$ (hőmérséklet nem megy ki)

Def. $I(t) = \int_0^1 u(x,t)\,dx$ összes hőmennyiség

Áll: $I(t)$ konstans

Biz: $I'(t) = \int_0^1 u'_t\,dx = \int_0^1 u''_{xx}\,dx = u'_x\big|_0^1 = u'_x(1) - u'_x(0) = 0$

HF* $u(x,t) \longrightarrow I = \int_0^1 f(x)\,dx = I(0) = I(t) = I$

Inhomogén hővezetés

$u'_t - u''_{xx} = f(x,t) \leftarrow$ külső gerjesztés

$u(x,0) = 0$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$

sok homogén egyenletet:

$u(x,t,\tau)$: $u'_t = u''_{xx} \quad t \geq \tau$

$u(x,\tau) = f(x,\tau)$

$$u(x,t) = \int_0^t u(x,t,\tau)\,d\tau$$

Duhamel's principle

Hullámegyenlet

végtelen húr esetén

$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$ (homogén egyenlet) → idő megfordítása esetén nem változna az egyenlet

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u'_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\} \text{kezdeti feltételek}$$

d'Alembert féle megoldás

$$\left.\begin{array}{l} \xi = x+ct \\ \eta = x-ct \end{array}\right\} \text{új koordináták} \Rightarrow \quad x = \frac{\xi+\eta}{2}, \quad t = \frac{\xi-\eta}{2c}$$

$$U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

$$U'_\xi(\xi,\eta) = u'_x\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)\cdot\frac{1}{2} + u'_t\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)\frac{1}{2c}$$

$$U''_{\xi\eta}(\xi,\eta) = u''_{xx}\frac{1}{4} + \cancel{u''_{xt}\left(-\frac{1}{4c}\right)} + \cancel{u''_{tx}\frac{1}{4c}} + u''_{tt}\left(-\frac{1}{4c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(u''_{xx} - u''_{tt}\frac{1}{c^2}\right) = 0$$

$$\boxed{U''_{\xi\eta}(\xi,\eta)=0} \Rightarrow U'_\xi(\xi,\eta) = f_0(\xi) \Rightarrow U(\xi,\eta) = F(\xi)+G(\eta)$$

ugyanígy $U'_\eta(\xi,\eta) =$

Állítás: $\forall$ megoldás $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, ahol F, G „szép" fv-ek

$$L[u] \longrightarrow L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L = L_1 L_2$$

$$\Downarrow$$

$$L[u] = L_1 L_2[u] = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} L_1[u]=0 & L_2[u]=0 \\ u'_t - c u'_x = 0 & u'_t + c u'_x = 0 \end{array}\right\} \text{transzport egyenlet}$$

anal3 13.

-?-

Kezdeti feltételek kielégítése

$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$	$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$
$v(x,0) = f(x)$	$w(x,0) = 0$
$v_t(x,0)$	$w_t(x,0) = g(x)$

Áll: d'Alembert formula:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

Köv: ez valóban megoldás, ha f, g sima függvények, ha nem simák, akkor gyenge megoldás.

Másodrendű kétvált. PDE típusai:

$$L[u] = \underbrace{a u''_{xx} + 2b u''_{xy} + c u''_{yy}}_{\text{fő rész}} + d u'_x + e u'_y + f u = g$$

operátor diszkriminánsa: $\delta L = \underline{a^2 - bc}$? $\boxed{ac - b^2}$

↳ elliptikus: $\delta L > 0$ Δu

↳ parabolikus $\delta L = 0$ $u'_x = u''_{yy}$

↳ hiperbolikus $\delta L < 0$ $u''_{xy} = 0$ v. $u''_{xx} - c^2 u''_{yy} = 0$

Áll: típus koordinátafüggetlen

$$L = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{\partial^3}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} + 1$$