PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyekben
Bevezetés az analízisbe
Differential Geometry
Diszkrét optimalizálás
Diszkrét matematikai feladatok
Geometria
Igazságos elosztások
Interaktív analízis feladatgyűjtemény matematika BSc hallgatók számára
Introductory Course in Analysis
Matematikai pénzügy
Mathematical Analysis-Exercises 1-2
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Optimális irányítások
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Szimmetrikus kombinatorikai struktúrák
Többváltozós adatelemzés

Besenyei Ádám
Komornik Vilmos
Simon László

PARCIÁLIS DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

∂

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Typotex

2013

Szerkesztő: Besenyei Ádám

Lektorálta: Horváth Miklós

ISBN 978 963 279 259 0
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Regionális Fejlesztési Alap társfinanszírozásával valósul meg.

KULCSSZAVAK: hővezetési egyenlet, hullámegyenlet, Laplace-egyenlet, másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet, disztribúció, alapmegoldás, Cauchy-feladat, peremérték-feladat, Szoboljev-tér, gyenge megoldás, vegyes feladat, Fourier-módszer

ÖSSZEFOGLALÁS: A jegyzet betekintést kíván nyújtani a másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek elméletébe. Az első részben röviden összefoglaljuk a későbbi fejezetek megértéséhez szükséges előismereteket. A második részben fizikai példákat mutatunk parciális differenciálegyenletek előfordulására, majd részletesen tanulmányozzuk a hővezetési és a Laplace-egyenletet klasszikus elméletét. Ezt követően a disztribúcióelmélettel foglalkozunk, és alkalmazzuk Cauchy-feladatok megoldására. Az utolsó részben bevezetjük a Szoboljev-féle függvénytereket és értelmezzük elliptikus, illetve időfüggő feladatok gyenge megoldásainak fogalmát. Minden fejezet végén önálló gondolkodásra kitűzött feladatok találhatók, amelyek egy részéhez megoldást is adunk a jegyzet végén.

Tartalomjegyzék

Előszó

> *A matematika a fizika része. A fizika kísérleti tudomány, a természettudomány része. A matematika a fizikának az a része, amelyben a kísérletek olcsók.*
>
> Vladimir Arnold (1937–2010)

Ennek a jegyzetnek az alapját Simon Lászlónak az Eötvös Loránd Tudományegyetemen több mint 40 éve matematikus hallgatók számára tartott előadásai képezik. Ezeket az előadásokat hallgatta Komornik Vilmos az 1970-es évek közepén, Besenyei Ádám pedig a 2000-es évek elején. Az előadások anyaga 1983-ban könyv formájában is megjelent Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek címmel. A 2000-es években a felsőoktatásban végbemenő változások folyamán a parciális differenciálegyenletek oktatása átalakult: egyrészt csökkent az óraszáma, másrészt a tárgy nemcsak a matematikus hallgatók képzésének része, hanem az alkalmazott matematikus, illetve elemző szakirányos hallgatók számára is kötelező, vagy kötelezően választható lett. A parciális differenciálegyenletek különböző szinteken való oktatása szükségessé tette az 1983-ban kiadott könyv jelentős átdolgozását. Célul tűztük ki, hogy a jelen jegyzet minél szélesebb kör számára hasznos segédanyag legyen, a műszaki egyetemek mérnökhallgatóitól kezdve a tudományegyetemek matematikus és fizikus hallgatóságáig. Jegyzetünk ezért több különálló részből épül fel:

- az első részben a fizika három alapegyenletének elemi tárgyalása szerepel, számos kidolgozott példával, amely a kevesebb előismerettel rendelkező hallgatók számára nyújt segítséget;
- a második részben a disztribúcióelmélet alapjait tárgyaljuk és alkalmazzuk az egyenletekhez kapcsolódó problémák megoldására;
- a harmadik részben a Szoboljev-terek elméletét, továbbá az elliptikus, illetve időfüggő feladatok Szoboljev-térbeli megoldhatóságának kérdéseit tárgyaljuk.

A jegyzet megírása során felhasználtuk Komornik Vilmosnak a Strasbourgi Egyetemen több mint 20 éve tartott előadásainak tapasztalatait. A jegyzetben számos feladat található, amelyek Simon László előadásaihoz tartott gyakorlatok anyagát ölelik fel. Aki írt már parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos munkát, az tudja, hogy a témáról tömören és hibák nélkül szinte lehetetlen írni. Jegyzetünkben bizonyára jó néhány elírás maradt, ezek jelzését örömmel vesszük a `badam@cs.elte.hu` címen.

I. rész

Fejezetek a klasszikus analízisből

1. fejezet

Topológia $\mathbb{R}^n$-ben

A matematika annak a művészete, hogyan adjunk különböző neveket azonos dolgoknak.

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

A fejezet tartalma. Röviden emlékeztetünk néhány topológiai alapfogalomra és állításra, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

A parciális differenciálegyenletek tanulmányozása során szükségünk lesz néhány egyszerű topológiai állításra, ezeket az alábbiakban röviden összefoglaljuk, illetve emlékeztetünk a felmerülő alapfogalmakra.

1.1. Jelölés. A továbbiakban $\mathbb{R}$ jelöli a valós számok, $\mathbb{R}^+$ a pozitív valós számok, $\mathbb{R}_0^+$ a nemnegatív valós számok és $\mathbb{R}^-$ a negatív valós számok halmazát. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén $|x|$ jelöli az x szám abszolút értékét.
Az $\mathbb{R}$ halmaz önmagával vett n-szeres direkt szorzatát a szokásos módon $\mathbb{R}^n$ jelöli, tehát $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n\}$, és általában $x \in \mathbb{R}^n$ esetén x_j jelöli az x vektor j-edik koordinátáját. Legyen

$$\mathbb{R}_+^{n+1} := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 > 0\},$$

amely nyílt féltér, továbbá

$$\mathbb{R}_0^{n+1} := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0,\ x_i \in \mathbb{R}\ (i > 0)\}.$$

Az $\mathbb{R}^n$ teret a szokásos euklideszi skalárszorzattal és az ebből származó metrikával látjuk el.

1.2. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \qquad |x-y| := \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|.$$

A skaláris szorzásra, ha nem okoz félreértést, akkor az egyszerűség kedvéért a „·" jelölést fogjuk használni.

A legegyszerűbb halmazok $\mathbb{R}^n$-ben a gömbök, amelyek segítségével a korlátos, illetve a nyílt halmaz fogalmát definiálhatjuk.

1.3. Definíció. Adott $a \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ esetén $B(a,r)$ jelöli az a középpontú, r sugarú *nyílt gömböt*, $\overline{B(a,r)}$ az a középpontú, r sugarú *zárt gömböt*, valamint $S(a,r)$ a $B(a,r)$ gömb felületét, vagyis

$$\begin{aligned} B(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| < r\}, \\ \overline{B(a,r)} &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \le r\}, \\ S(a,r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| = r\}. \end{aligned}$$

1.4. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *korlátos*, ha létezik $r > 0$ szám úgy, hogy $H \subset B(0,r)$.

1.5. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *nyíltnak* nevezünk, ha minden $x \in H$ esetén létezik $r > 0$ szám úgy, hogy $B(x,r) \subset H$. Egy halmaz *zárt*, ha $\mathbb{R}^n \setminus H$ nyílt.

Ha nem $\mathbb{R}^n$ az alaphalmazunk, hanem annak egy Ω részhalmaza, akkor értelmezhetjük relatív nyílt és zárt halmazok fogalmát.

1.6. Definíció. Legyen $H \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor a H halmaz *relatív nyílt* Ω-ban, ha létezik $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $H = \Omega \cap U$. A H halmazt *relatív zártnak* nevezzük, ha van olyan $V \subset \mathbb{R}^n$ zárt halmaz, amelyre $H = \Omega \cap V$. Ebből következően $H \subset \Omega$ pontosan akkor relatív nyílt Ω-ban, ha $\Omega \setminus H$ relatív zárt Ω-ban, hiszen $V = \mathbb{R}^n \setminus U$ egymásnak megfeleltethető választás.

Nyílt halmaz segítségével bevezethetjük a környezet fogalmát.

1.7. Definíció. Az $x \in \mathbb{R}^n$ pont egy *környezetén* olyan halmazt értünk, amely tartalmaz az x-et tartalmazó nyílt halmazt, azaz V környezete x-nek, ha létezik $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, amelyre $x \in U \subset V$.

Végül értelmezhetjük halmaz belsejét, határát és külsejét, továbbá lezártját.

1.8. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz. Ekkor H belseje, külseje és határa rendre

$$\begin{aligned} \operatorname{int} H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \text{létezik } r > 0 \text{ úgy, hogy } B(x,r) \subset H\}, \\ \operatorname{ext} H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \text{létezik } r > 0 \text{ úgy, hogy } B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus H\}, \\ \partial H &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \text{minden } r > 0\text{-ra } B(x,r) \cap H \ne \emptyset \text{ és } B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus H) \ne \emptyset\}. \end{aligned}$$

1.9. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz *lezártja* $\overline{H} := \operatorname{int} H \cup \partial H$.

Parciális differenciálegyenletek tanulmányozása kapcsán szükség van a tartomány fogalmának bevezetésére, ehhez először az összefüggőség fogalmát definiáljuk.

1.10. Definíció. Egy H halmaz *összefüggő*, ha minden diszjunkt $U, V \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra, amelyre $H \subset U \cup V$ teljesül, következik, hogy $H \cap U = \emptyset$ vagy $H \cap V = \emptyset$.

1.11. *Megjegyzés.* Az összefüggőség fogalma $\mathbb{R}^n$-ben ekvivalens az *útszerű összefüggőség* fogalmával, vagyis egy halmaz pontosan akkor összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető a halmazban haladó folytonos görbével, sőt, nyílt halmaz esetében töröttvonallal is.

1.12. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *tartománynak* nevezünk, ha nyílt és összefüggő.

A későbbiekben folytonos függvényekkel kapcsolatban fontos szerephez jutnak a kompakt halmazok.

1.13. Definíció. A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmazt *kompaktnak* nevezzük, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges nyílt fedés, azaz $K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ esetén, ahol I tetszőleges indexhalmaz és $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, létezik véges sok α_j $(j = 1, \ldots, k)$, amelyekre $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{\alpha_j}$.

Igazolható, hogy $\mathbb{R}^n$-ben a fenti definíció ekvivalens két könnyen ellenőrizhető tulajdonsággal.

1.14. Tétel. *A $K \subset \mathbb{R}^n$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

Kompakt halmazokkal kapcsolatban szükségünk lesz néhány egyszerűen igazolható állításra. Először emlékeztetünk halmazok távolságának fogalmára.

1.15. Definíció. Legyenek $H_1, H_2 \subset \mathbb{R}^n$ halmazok. Ekkor a két halmaz *távolsága*

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) := \inf\{|x - y| : x \in K_1, y \in K_2\}.$$

Amennyiben a két halmaz valamelyike egyelemű, például $K_1 = \{x_0\}$, akkor $\operatorname{dist}(K_1, K_2)$ az x_0 pont és a K_2 halmaz távolsága, és ekkor az egyszerűség kedvéért a $\operatorname{dist}(x_0, K_2)$ jelölést használjuk.

1.16. Állítás. *Legyenek $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ nem üres diszjunkt halmazok, amelyek közül az egyik kompakt, a másik pedig zárt. Ekkor* $\operatorname{dist}(K_1, K_2) > 0$.

1.17. Állítás. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz. Ekkor a K halmaz* átmérője

$$\operatorname{diam} K := \sup\{|x - y| : x, y \in K\} < \infty.$$

Ha K zárt is, akkor létezik $x_0, y_0 \in K$ úgy, hogy $\operatorname{diam} K = \operatorname{dist}(x_0, y_0)$.

1.18. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ és $\varepsilon > 0$ szám. Tekintsük a H halmaz ε sugarú H_ε környezetét, azaz*

$$H_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, H) < \varepsilon\}.$$

Ekkor H_ε nyílt, továbbá

$$\overline{H_\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, H) \leq \varepsilon\}.$$

1.19. Állítás. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és V korlátos, nyílt halmaz úgy, hogy $\overline{V} \subset U$. Ekkor létezik $W \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, amelyre $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset$ $\subset U$.*

Bizonyítás. Legyen $d := \operatorname{dist}(\overline{V}, \partial U)$, amely az 1.16. Állítás szerint pozitív, hiszen $\overline{V}$ zárt halmaz, valamint ∂U zárt és korlátos, tehát az 1.14. Tétel alapján kompakt. Tekintsük a $W := \overline{V}_{\frac{d}{2}}$ halmazt, vagyis a $\overline{V}$ halmaz $d/2$ sugarú nyílt környezetét. Állítjuk, hogy W megfelel a kívánalmaknak. Valóban, W korlátos (mert U is az), az 1.18. Állításból következően nyílt, továbbá $V \subset W$. Sőt, világos, hogy $\overline{W} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \overline{V}) \leq \operatorname{dist}(\overline{V}, U)/2\} \subset U$. $\square$

2. fejezet

Lebesgue-integrál, L^p- terek, paraméteres integrál

A matematika általános elméletekre lecsupaszítva gyönyörű forma lenne, tartalom nélkül. Rövid időn belül kihalna.

Henri Léon Lebesgue (1875–1941)

A fejezet tartalma. Összefoglaljuk a Lebesgue-integrálnak a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához szükséges alapvető összefüggéseit.

2.1. Lebesgue-integrál, L^pterek

Ismertnek tételezzük fel a Lebesgue-integrál elméletének alapvető fogalmait és tételeit, részletes bevezetés megtalálható például a [46, 72] könyvekben. Az alábbiakban csak a legszükségesebb összefüggésekre emlékeztetünk a hivatkozások egyszerűsítésének érdekében.
A fejezet további részében legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges nem üres halmaz.

2.1. Definíció. Az Ω halmazon értelmezett valós értékű mérhető és p-edrendben ($1 \le p \le \infty$) Lebesgue-értelemben integrálható függvények vektorterét $L^p(\Omega)$-val jelöljük, vagyis

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

amely téren a következő normát vezetjük be

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}. \tag{2.1}$$

A $p = \infty$ esetben legyen

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty\},$$

ahol

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup} |f| := \inf\{M \in \mathbb{R} : |f| \le M \text{ m.m. } \Omega\text{-n}\}. \tag{2.2}$$

2.2. Állítás. *A fenti* (2.1)*, illetve a* $p = \infty$ *esetben* (2.2) *normával ellátott* $L^p(\Omega)$ *tér minden* $1 \le p \le \infty$ *esetén teljes normált tér, más szóval Banach-tér.*

A későbbiekben szükségünk lesz az úgynevezett lokálisan integrálható függvények terére is.

2.3. Definíció. Az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény *p-edrendben lokálisan integrálható* Ω-n, ha minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazt véve $f|_K \in L^p(K)$. Az Ω-n p-edrendben lokálisan integrálható függvények vektorterét $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$-val jelöljük. A $p = 1$ esetben nyerjük a lokálisan integrálható függvények terét, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$-t.

Az L^p terekkel kapcsolatban az alábbiakban felidézünk néhány fontos, a későbbi fejezetekben alkalmazásra kerülő összefüggést.

2.4. Állítás (Hölder-egyenlőtlenség)**.** *Legyen* $f \in L^p(\Omega)$ *és* $g \in L^q(\Omega)$*, ahol* p *és* q konjugált kitevők*, azaz* $1/p + 1/q = 1$*. Ekkor* $fg \in L^1(\Omega)$ *és*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha f és g egymás konstansszorosai (beleértve azt az esetet is, amikor valamelyikük azonosan 0).

2.5. Lemma (Riesz)**.** *Ha* (u_j) *Cauchy-sorozat* $L^p(\Omega)$*-ban valamely* $1 \le p \le$ $\le \infty$ *esetén, akkor létezik m.m. konvergens részsorozata.*

2.6. Tétel (Monoton konvergencia tétele)**.** *Tegyük fel, hogy az* $\Omega \colon f_j \to \mathbb{R}$ *mérhető függvényekre* $0 \le f_j \le f_{j+1}$*. Ekkor*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_j,$$

ahol az integrálok értékeinek $+\infty$*-t is megengedünk.*

2.7. Tétel (Lebesgue-tétel)**.** *Tegyük fel, hogy az* $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ *mérhető függvényekre* $f_j \to f$ *m.m.* Ω*-n, továbbá létezik* $g \in L^1(\Omega)$*, amelyre* $|f_j| \le g$ *m.m.* Ω*-n minden* $j = 1,2\ldots$ *esetén. Ekkor* $f_j \to f$ *az* $L^1(\Omega)$ *normája szerint is.*

2.8. Tétel (Lebesgue-pontok tétele)**.** *Legyen* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*. Ekkor m.m.* $x \in$ $\in \mathbb{R}^n$ *esetén*

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x),$$

speciálisan

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0, \tag{2.3}$$

ahol $\mathrm{vol}(B(x,r))$ *a* $B(x,r)$ *gömb térfogatát jelöli. Azokat a pontokat, ahol a* (2.3) *összefüggés teljesül* Lebesgue-pontoknak *nevezzük. A tétel értelmében tehát* $\mathbb{R}^n$ *m.m. pontja Lebesgue-pont az* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ *függvényre nézve.*

Amint az a fenti tételből is látszik érdemes megadni az n-dimenziós gömbök térfogatát, illetve felszínét.

2.9. Állítás. *Jelöljük* ω_n*-nel az egység sugarú* n*-dimenziós gömbfelület felszínét. Ekkor az* r *sugarú* n*-dimenziós gömb térfogata* $\omega_n r^n/n$*, felszíne pedig* $\omega_n r^{n-1}$*. Megjegyezzük, hogy* $\omega_n = n\pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$*, ahol* Γ *a gamma-függvény.*

2.10. *Megjegyzés.* A 2.9. Állítás segítségével a (2.3) összefüggés a következő alakban is írható:

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0.$$

A gömb kapcsán megemlítjük a következő úgynevezett *co-area formulát*).

2.11. Állítás. *Legyen* $f \in L^1(B(x_0,R))$*, ahol* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *és* $0 \le R \le \infty$ *tetszőlegesek. Ekkor*

$$\int_{B(x_0,R)} f(x)\,dx = \int_0^R \left(\int_{\partial S(x_0,r)} f(x)\,d\sigma_x \right) dr.$$

2.12. *Megjegyzés.* A fenti 2.11. Állítás valójában egy sokkal általánosabb co-area formula speciális esete. A fentiekben kimondott speciális alak n-dimenziós polárkoordináták bevezetésével a Fubini-tételre könnyen visszavezethető.

2.13. Tétel (Fubini-tétel)**.** *Legyenek* $T_1 \subset \mathbb{R}^n$ *és* $T_2 \subset \mathbb{R}^m$ *téglák (azaz valós intervallumok direkt szorzatai), továbbá* $f \in L^1(T_1 \times T_2)$ *függvény (sőt elég, hogy* $\|f\|_{L^1(T_1\times T_2)} \le \infty$*). Ekkor*

$$\int_{T_1\times T_2} f = \int_{T_1}\int_{T_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{T_2}\int_{T_1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ismert, hogy az $f(x) := |x|^\alpha$ $(x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$ függvény a 0 körül pontosan akkor integrálható, ha $\alpha > -1$, a végtelenben pedig akkor, ha $\alpha < -1$. A coarea-formula segítségével igazolható ennek az állításnak az n-dimenziós változata.

2.14. Állítás. *Legyen $f(x) := |x|^\alpha$ $(x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0)$. Ekkor $f|_{B(0,1)} \in$ $\in L^1(B(0{,}1))$ pontosan abban az esetben, ha $\alpha > -n$, és $f|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \in$ $\in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B(0{,}1))$ pontosan akkor, ha $\alpha < -n$.*

Végül emlékeztetünk az alábbi nevezetes integrálra.

2.15. Állítás. *Ha $n \geq 1$ egész szám, akkor*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2}\, d\eta = \sqrt{\pi}^n.$$

2.2. Paraméteres integrálok

A paraméteres integrálok folytonosságával és differenciálhatóságával kapcsolatos állítások a későbbiekben fontos eszközként kerülnek elő a parciális differenciálegyenletek tanulmányozása során.

2.16. Tétel (Paraméteres integrál folytonossága)**.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz, továbbá $f\colon I \times H \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre m.m. $x \in H$ esetén az $t \mapsto f(t,x)$ függvények folytonos I-n, továbbá minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(t,x)$ függvény mérhető, valamint létezik $h \in L^1(H)$ függvény úgy, hogy $|f| \leq h$ az $I \times H$ halmazon. Ekkor az*

$$F(t) := \int_H f(t,x)\, dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.

2.17. Tétel (Paraméteres integrál differenciálhatósága)**.** *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $H \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mérhető halmaz, továbbá $f\colon I \times H \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre m.m. $x \in H$ esetén az $t \mapsto f(t,x)$ és $t \mapsto \partial_2 f(t,x)$ függvények folytonosak I-n, továbbá minden $t \in I$ esetén az $x \mapsto f(t,x)$ és $x \mapsto \partial_1 f(t,x)$ függvények mérhetők, valamint létezik $h \in L^1(H)$ függvény úgy, hogy $|f| \leq h$ és $|\partial_0 f| \leq h$ az $I \times H$ halmazon. Ekkor az*

$$F(t) := \int_H f(t,x)\, dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F\colon I \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és

$$F'(t) = \int_H \partial_1 f(t,x)\, dx.$$

Ha nemcsak az integrandus, de az integrálás határai is függnek a paramétertől, akkor az alábbi tétel érvényes.

2.18. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f: I \times I$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 f$ létezik és folytonos. Ekkor tetszőleges rögzített $a \in I$ esetén az*

$$F(t) := \int_0^t f(t,x)\,dx$$

hozzárendeléssel értelmezett $F: I \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és

$$F'(t) = f(t,t) + \int_a^t \partial_2 f(t,x)\,dx.$$

2.19. *Megjegyzés.* A paraméteres integrál differenciálásáról szóló fenti tételek természetesen módon általánosíthatók $t \in \mathbb{R}^n$ paraméter esetére is.

3. fejezet

A $C_0^\infty(\Omega)$ függvénytér

Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk!

Charles Hermite (1822–1901) 1893-ban Thomas Joannes Stieltjesnek (1856–1894) írott sorai

A fejezet tartalma. Bevezetjük a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvényeket, majd az egységapproximáció fogalmát értelmezzük.

A végtelen sokszor differenciálható (más szóval *sima*) kompakt tartójú függvények kiemelkedően fontos szerepet játszanak a disztribúciók (vagy más néven általánosított függvények) elméletében, amelyet a 9. fejezetben tárgyalunk részletesen. Az alábbiakban rövid áttekintést adunk a $C_0^\infty(\Omega)$ függvénytérrel kapcsolatos fogalmakról, majd ezt követően e függvények egy fontos alkalmazásával, az úgynevezett *egységapproximációval* foglalkozunk. A fejezet lezárásaként pedig az *egységosztás* tételét ismertetjük. Mindenekelőtt azonban ismerkedjünk meg a Laurent Schwartz által bevezetett úgynevezett *multiindexes* jelölésmóddal.

3.1. Multiindexek

Többváltozós függvények többszörös parciális deriváltjainak egyszerűbb írásmódja érdekében bevezetjük az úgynevezett multiindexeket.

3.1. Definíció. Egy α *multiindexen* egy nemnegatív α_j számokból álló vektort értünk, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, ahol N valamilyen pozitív egész szám. A multiindex *abszolút értéke* $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Multiindex segítségével formálisan értelmezhetjük az α rendű parciális deriválás operátorát (feltéve, hogy a parciális deriválások sorrendje felcserélhető).

3.2. Definíció. Legyen $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ multiindex. Ekkor $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N}$, azaz $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ esetén $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_N^{\alpha_N} f$ (amennyiben létezik).

Végül a többváltozós Leibniz-szabály kapcsán (lásd a 3.8. Állítást) szükségünk lesz multiindexek összegének, rendezésének és *faktoriálisának* fogalmára.

3.3. Definíció (Multindexek összege, rendezése)**.** Legyenek $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_N)$, illetve $\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_N)$ multiindexek. Ekkor $\alpha + \beta := (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N + \beta_N)$. Azt mondjuk, hogy $\alpha \geq \beta$, ha minden $0 \leq j \leq N$ esetén $\alpha_j \geq \beta_j$. Ebben az esetben értelmezhetjük az $\alpha - \beta$ multiindexet, mégpedig $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_N - \beta_N)$.

3.4. Definíció. Legyen $\alpha = (\alpha_1 \ldots, \alpha_N)$ multiindex. Ekkor $\alpha! := \alpha_1! \ldots \alpha_N!$.

3.2. A kompakt tartójú sima függvények tere

A fejezet további részében a feltételek egyszerűsítésének érdekében a következő megállapodással élünk.

3.5. Megállapodás. A továbbiakban, ha másképp nem jelezzük, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ tetszőleges nem üres nyílt halmazt jelöl.

3.6. Definíció. Az Ω-n értelmezett k-szor $(0 \leq k \leq \infty)$ folytonosan differenciálható valós értékű függvények osztályát $C^k(\Omega)$-val jelöljük. A függvények közötti szokásos összeadással és valós számmal való szorzással $C^k(\Omega)$ vektortér. Ha $k = \infty$, akkor kapjuk a $C^\infty(\Omega)$ teret, vagyis az Ω-n értelmezett akárhányszor differenciálható valós függvények terét, azaz $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\Omega)$. Ha $k = 0$, akkor a folytonos függvények vektorterét kapjuk, amelyet az egyszerűség kedvéért $C(\Omega)$-val jelölünk ($C^0(\Omega)$ helyett).

Az előbbiekben bevezetett függvényterek zárt halmazon is értelmezhetők.

3.7. Definíció. Jelölje $C(\overline{\Omega})$ az $\overline{\Omega}$ halmazon értelmezett valós értékű folytonos függvények vektorterét. Ekkor $C^k(\overline{\Omega})$ $(0 \leq k \leq \infty)$ azon $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ függvények vektortere, amelyekre $f \in C^k(\Omega)$, továbbá minden $|\alpha| \leq k$ multiindex esetén $\partial^\alpha f \in C(\overline{\Omega})$, pontosabban a $\partial^\alpha f$ parciális deriváltnak létezik folytonos kiterjesztése $\overline{\Omega}$-ra.

Két függvény szorzatának deriváltjait a következő általános *Leibniz-szabály* segítségével számolhatjuk, amelyet teljes indukcióval könnyen igazolhatunk.

3.8. Állítás (Leibniz-szabály)**.** *Legyen* $f \in C^k(\Omega)$ *és* $|\alpha| \le k$ *multiindex. Ekkor*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g),$$

ahol $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Folytonos függvényekkel kapcsolatban fontos szerepet tölt be a tartó fogalma.

3.9. Definíció. Legyen $f \in C(\Omega)$, ekkor f *tartóját* (angol nyelven *support*) a következőképpen értelmezzük:

$$\operatorname{supp} f := \Omega \setminus \{x \in \Omega\colon \text{létezik } U_x \subset \Omega \text{ környezete } x\text{-nek, hogy } f = 0 \text{ az } U_x\text{-en}\}. \tag{3.1}$$

3.10. *Megjegyzés.* A definíció alapján világos, hogy $\operatorname{supp} f$ zárt halmaz az Ω relatív topológiájában. Vigyázzunk tehát, folytonos függvény tartója az értelmezési tartományban relatív zárt halmaz, de $\mathbb{R}^n$-ben nem feltétlenül zárt. Természetesen $\Omega = \mathbb{R}^n$ esetén a relatív zárt halmaz egyben zárt is.
A tartó fogalmát tetszőleges $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre értelmezhetjük, ebben az esetben a (3.1) definícióban az $f = 0$ egyenlőséget U_x-en csak majdnem mindenütt követeljük meg.

3.11. Definíció. Legyen $0 \le k \le \infty$, ekkor $C_0^\infty(\Omega)$ jelöli az olyan $f \in C^k(\Omega)$ függvények vektorterét, amelyekre $\operatorname{supp} f$ kompakt (vagyis az 1.14. Tétel alapján korlátos és zárt) halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

Felmerül a kérdés, hogyan adhatunk meg konkrét $C_0^\infty(\Omega)$-beli függvényeket?

3.12. Példa. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ és tekintsük a következő hozzárendeléssel értelmezett $\eta_{a,r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$\eta_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp(-1/(r^2 - |x-a|^2)), & \text{ha } |x| < r, \\ 0, & \text{ha } |x| \ge r. \end{cases} \tag{3.2}$$

Vegyük észre, hogy $\eta_{a,r} = h \circ g$, ahol $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amelyre

$$h(t) := \begin{cases} \exp(-1/t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases},$$

továbbá $g(x) = r^2 - |x-a|^2$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Világos, hogy $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és az is könnyen látható, hogy $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ (lásd a 9.1. Feladatot), tehát a kompozíciójukra $\eta_{a,r} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ezenkívül világos, hogy $\operatorname{supp} \eta_r = \overline{B(0,r)}$, így $\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Végül még jegyezzük meg azt is, hogy $\eta_{a,r} \ge 0$.

A fenti (3.2) függvényből kiindulva egy sereg $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli függvényt adhatunk meg.

3.13. Példa. Legyen $\eta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a (3.2) hozzárendeléssel $a = 0$, $r = 1$ esetén nyert függvény, és válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Értelmezzük ekkor az $\eta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt az $\eta_\varepsilon(x) := \eta_1(\frac{x}{\varepsilon})/\varepsilon^n C_\varepsilon$, ahol $C_\varepsilon := \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1$. Foglaljuk össze az így kapott η_ε függvények néhány fontos tulajdonságát:

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \eta_\varepsilon \geq 0, \quad \operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1. \tag{3.3}$$

Az η_ε függvényeket az origóból az a pontba eltolva az $\eta_{a,\varepsilon}$ függvényekre a (3.3) tulajdonságok $B(0,\varepsilon)$ helyett a $B(a,\varepsilon)$ gömbön teljesülnek.

3.14. Definíció. A (3.3) tulajdonságokkal rendelkező függvényekről azt mondjuk, hogy *egységapproximációt* generálnak.

3.15. *Megjegyzés.* A (3.3) tulajdonságokból következően $\lim_{\varepsilon\to 0+} \eta_\varepsilon(x) = 0$, ha $x \neq 0$, továbbá $\lim_{\varepsilon\to 0+} \eta_\varepsilon(0) = \infty$, de ez utóbbi konvergencia az $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon$ összefüggés által bizonyos értelemben kontrollálva van.

Végül bizonyítás nélkül megemlítjük a $C(\Omega)$ tér és az $L^p(\Omega)$ terek egy fontos kapcsolatát. A bizonyítás megtalálható például a [46] könyvben.

3.16. Tétel. *Tegyük fel, hogy $1 \leq p < \infty$, ekkor a $C(\Omega)$ tér sűrű részhalmaza az $L^p(\Omega)$ térnek.*

3.17. *Megjegyzés.* Világos, hogy a 3.16. Tétel általában nem lehet igaz, hiszen például $L^\infty(\Omega)$-ban a konstans 1 függvénytől minden kompakt tartójú függvény legalább 1 távolságra van, mert minden ilyen függvény felveszi a 0-t a tartóján kívül.

3.3. Az egységapproximáció alkalmazása

A most következő szakaszban az egységapproximáció két alkalmazását mutatjuk be. Először belátjuk, hogy $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^p(\Omega)$-ban, ahol $1 \leq p < \infty$. Ehhez a következő tételt igazoljuk.

3.18. Tétel. *Legyen $f \in L^1(\Omega)$, továbbá $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és értelmezzük az $f_\varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt a következő hozzárendeléssel:*

$$f_\varepsilon(x) := \int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \quad (x \in \Omega), \tag{3.4}$$

ahol az η_ε függvények egységapproximációt generálnak. Ekkor az alábbiak teljesülnek:

a) *minden $\varepsilon > 0$ esetén f_ε értelmes és $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, továbbá ha $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ kompakt, akkor minden elég kis ε esetén $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$;*

b) *ha* $\varepsilon \to 0+$*, akkor* $f_\varepsilon \to f$ *m.m. az* Ω *halmazon;*

c) *ha* $f \in C(\Omega)$*, akkor* $f_\varepsilon \to f$ *lokálisan egyenletesen* Ω*-n (azaz egyenletesen az* Ω *halmaz minden kompakt részhalmazán);*

d) *ha* $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$*, akkor minden* $K \subset \Omega$ *kompakt halmazra* $\varepsilon \to 0+$ *esetén* $f_\varepsilon \to f$ *az* $L^p(K)$ *tér normája szerint.*

Bizonyítás. a) Mivel $|f(y)\eta_\varepsilon(x-y)| \le |f(y)|$ és f integrálható Ω-n, ezért f_ε értelmes. A végtelen sokszor való differenciálhatóság a paraméteres integrálok differenciálásáról szóló 2.17. Tételből következik, ugyanis az $y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)$ függvény végtelen sokszor folytonosan differenciálható, az f függvény pedig $L^1(\Omega)$-beli.
Tegyük fel most, hogy $\operatorname{supp} f = K$ az Ω kompakt részhalmaza és legyen $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ tetszőleges, továbbá $K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden rögzített $x \in \Omega \setminus K_\varepsilon$ esetén $y \mapsto f(y)\eta_\varepsilon(x-y) = 0$ azonosan 0 függvény, így $f_\varepsilon(x) = 0$. Valóban, $f(y)\eta_\varepsilon(x-y) \ne 0$, ha $y \in \operatorname{supp} f = K$ és $y \in \operatorname{supp}(z \mapsto \varepsilon(x-z)) = \overline{B(x,\varepsilon)}$, azonban $K \cap \overline{B(x,\varepsilon)} = \emptyset$, ha $x \in \Omega \setminus K_\varepsilon$.
b) A Lebesgue-pontok tételéből következően (lásd a 2.8. Tételt és a 2.10. Megjegyzést) m.m. $x \in \Omega$ esetén

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Rögzítsünk egy, a fenti tulajdonsággal rendelkező $x \in \Omega$ pontot. Mivel az η_ε függvényekre teljesül, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1$, ezért $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$ is érvényes, így

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy = \int_{B(x,\varepsilon)} f(x)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Ekkor felhasználva az η_ε függvények (3.3) tulajdonságát

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} (f(y) - f(x))\eta_\varepsilon(x-y) \right| dy \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)| \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\, dy \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0
\end{aligned}$$

adódik.

c) Tegyük fel, hogy $f \in C(\Omega)$, és legyen $K \subset U$ kompakt halmaz. Az előző rész mintájára

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} (f(y) - f(x))\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \right| \\ &\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \\ &= \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Mivel $f \in C(\Omega)$, ezért f egyenletesen folytonos a K kompakt halmazon, tehát adott $\nu > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $|x - y| < \delta$ $(x, y \in K)$ esetén $|f(x) - f(y)| < \nu$. Ekkor (3.5) folytán minden $\varepsilon \leq \delta$, $x \in K$ esetén

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \leq \nu \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \nu.$$

Ez azt jelenti, hogy $f_\varepsilon \to f$ egyenletesen a K halmazon.
d) Tegyük fel, hogy $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$, és legyen $V \subset \Omega$ tetszőleges korlátos nyílt halmaz, amelyre $\overline{V} \subset \Omega$. Az 1.19. Állításnak megfelelően válaszunk egy W korlátos nyílt halmazt, amelyre $\overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$. Megmutatjuk, hogy

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}. \tag{3.6}$$

Ez $p = 1$ esetén a Fubini-tételből (2.13. Tétel) egyszerűen következik, ugyanis ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi, akkor

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon\|_{L^1(V)} &= \left| \int_V \int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy \right| dx \\ &\leq \int_V \int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx \\ &= \int_V |f(y)| \left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,dx \right) dy \\ &= \int_V |f(y)|\,dy = \|f\|_{L^1(V)} \leq \|f\|_{L^1(W)}. \end{aligned}$$

A $p > 1$ esetben pedig a Hölder-egyenlőtlenség (2.4. Állítás) és a Fubini-tétel alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}|f_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\\ &= \int_\Omega |f(y)|\eta_\varepsilon^{1/p}(x-y)\cdot\eta_\varepsilon^{1/q}(x-y)\,dy\\ &\le \left(\int_\Omega |f(y)|^p\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1/p}\cdot\left(\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)|\,dy\right)^{1/q},\end{aligned}$$

ahol $1/p + 1/q = 1$. Ebből $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_V |f_\varepsilon(x)|^p\,dx &\le \int_V\left(\int_\Omega |f(y)|^p\eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right)dx\\ &= \int_V |f(y)|^p\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)\,dy\,dx\\ &= \int_V |f(y)|^p \le \int_W |f(y)|^p\,dy\end{aligned}$$

adódik, vagyis $\|f_\varepsilon\|^p_{L^p(V)} \le \|f\|^p_{L^p(W)}$.
Most emlékeztetünk arra a tényre (lásd a 3.16. Tételt), hogy $1 \le p < \infty$ esetén $L^p(\Omega)$-ban sűrű $C(\Omega)$, ebből következően bármely $\nu > 0$ esetén létezik $g \in C(W)$ függvény, amelyre

$$\|f-g\|_{L^p(W)} < \nu. \tag{3.7}$$

Képezzük a (g_ε) függvényeket g segítségével a (3.4) integrál mintájára. Ekkor a bizonyítás b) része alapján $g_\varepsilon \to g$ egyenletesen V-n, továbbá az előbbiekben igazoltuk, hogy $\|g_\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \|g\|_{L^p(W)}$, vagyis a (g_ε) függvényeknek van p-edrendben integrálható majoránsa, így a Lebesgue-tételből következően $g_\varepsilon \to g$ az $L^p(W)$ tér normája szerint is teljesül. Már csak annyi van hátra, hogy a szokásos „$\varepsilon/3$ módszert" alkalmazzuk, azaz

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &= \|(f_\varepsilon - g_\varepsilon) + (g_\varepsilon - g) + (g-f)\|_{L^p(V)}\\ &\le \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g-f\|_{L^p(V)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldalán (3.7) és $V \subset W$ miatt $\|f-g\|_{L^p(W)} \le$ $\le \|f-g\|_{L^p(W)} < \nu$, továbbá a $g_\varepsilon \to g$ egyenletes konvergencia folytán $\|g_\varepsilon - g\|_{L^p(V)} < \nu$, ha ε elég kicsi. Végül pedig a (3.6) becslés szerint

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p(V)} = \|(f-g)_\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \|f-g\|_{L^p(W)} < \nu.$$

Ebből következően (3.8) jobb oldala kisebb, mint 3ν, ha ε elég kicsi. Mivel ν tetszőlegesen kicsi lehet, ezért szükségképpen $f_\varepsilon \to f$ az $L^p(V)$ tér normája szerint, amely ugyanaz, mint $L^p(\overline{V})$ normája, ahol $\overline{V}$ tetszőleges kompakt halmaz lehet. $\square$

3.19. Következmény. *Legyen* $1 \le p < \infty$*. Ekkor a* $C_0^\infty(\Omega)$ *tér sűrű* $L^p(\Omega)$*-ban.*

Bizonyítás. Legyen $f \in L^p(\Omega)$ adott. Tekintsük az

$$\Omega^\delta := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega > \delta\} \cap B(0{,}1/\delta)$$

halmazokat, amelyek (ahogy a 3.18. Tétel bizonyításában megjegyeztük) elég kis δ esetén nem üresek. Jelölje χ_δ az Ω_δ halmaz karakterisztikus függvényét, azaz $\chi_\delta(x) = 1$, ha $x \in \Omega_\delta$ és 0 egyébként. Ekkor $\delta \to 0+$ esetén $f\chi_\delta \to f$ m.m. az Ω halmazon. Világos, hogy $\|f\chi_\delta\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}$, így a Lebesgue-tétel alapján $\delta \to 0+$ esetén $f\chi_\delta \to f$ az $L^p(\Omega)$ tér normája szerint. Ennek megfelelően válasszunk olyan $\delta > 0$ számot, amelyre $\|f\chi_\delta - f\|_{L^p(\Omega)} < \nu$, ahol $\nu > 0$ adott. Mivel $g := f\chi_\delta$ kompakt tartójú függvény (a tartója része a $B(0{,}1/\delta)$ gömbnek), így a 3.18. Tételnek megfelelően értelmezett g_ε függvényekre $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ és $\varepsilon \to 0+$ esetén $g_\varepsilon \to g$ az $L^p(\Omega)$ tér normája szerint. Ezért elég kis ε esetén $\|g_\varepsilon - g\|_{L^p(\Omega)} < \nu$, és így

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \le \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} < 2\nu,$$

ahol $\nu > 0$ tetszőleges. Ez azt jelenti, hogy f-et tetszőlegesen tudjuk közelíteni $C_0^\infty(\Omega)$-beli függvényekkel. □

3.20. *Megjegyzés.* A (3.4). integrált a konvolúció műveletének segítségével egyszerűbb alakban írhatjuk:

$$f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon.$$

(A függvények körében vett konvolúcióval és annak a disztribúciókra történő általánosításával a 9.6.2. szakaszban foglalkozunk részletesen.) Így a 3.18. Tétel alapján talán érthetővé válik, hogy honnan származik az egységapproximáció elnevezés. Az η_ε függvények segítségével elkészített $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$ függvényekre $f_\varepsilon \to f$ a megfelelő terekben, tehát olyan mintha az η_ε függvények a konstans egy függvényt approximálnák, és így a velük vett konvolúció az adott függvényhez tart.

3.21. *Történeti megjegyzés.* Az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy az angol nyelvű szakirodalomban az egységapproximáció neve *mollifier*. A mollify ige jelentése csillapít, enyhít, amely a 3.18. Tétel alapján ugyancsak logikus elnevezés, mert az f_ε sima függvények az f nem feltétlenül sima függvény közelítései, tehát „kisimítják" az f függvényt esetleges töréseit, szakadásait. Meglepő módon azonban nem emiatt kapták az angol nyelvű irodalomban a mollifier nevet. Az egységapproximációt Kurt Otto Friedrichs (1901–1982) német születésű, később Amerikába kivándorolt matematikus vezette be egy 1944-es cikkében (lásd [27]). Friedrichs nem kedvelte a Lebesgue-elméletet,

ahogy fogalmazott, „a Lebesgue-elméletben majdnem mindenütt azt kell írni, hogy majdnem mindenütt". Az egységapproximáció segítségével, mint láttuk, integrálható függvényeket sima függvényekkel approximálhatunk.
Peter D. Lax (1926–) magyar származású Amerikában élő matematikus szerint Friedrichs cikke a parciális differenciálegyenletek elméletének egyik kiemelkedő jelentőségű munkája, lásd az [57] könyvet. Ebben a műben ismerhetjük meg Laxtól a mollifier szó eredetét. Friedrichs kollégája volt Donald Alexander Flanders (1927–) amerikai matematikus, akivel szívesen beszélgetett az angol nyelvről, és meg is kérdezte tőle, hogyan nevezze el ezeket a függvényeket. Flanderst kollégái Mollnak becézték Daniel Defoe regényének hőse, Moll Flanders után. Flanders azt javasolta, hogy „róla" nevezze el a függvényeket. Friedrichsnek tetszett az ötlet, és így lett mollifier a függvények neve. Egyébként nem Friedrichs volt az első, aki ilyen típusú függvényeket használt, már 1938-ban Szergej Szoboljev a később róla elnevezett Szoboljev-térbeli beágyazási tételekről szóló cikkében (lásd [83]) előfordult az egységapproximáció.

Az egységapproximáció egy másik alkalmazásaként egy szemléletesen világos állítást látunk be, amelyet az egységosztás tételének bizonyításában fogunk felhasználni.

3.22. Állítás. *Legyen $K \subset \Omega$ kompakt halmaz. Ekkor létezik $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvény, amelyre $0 \le \varphi \le 1$, továbbá $\varphi = 1$ a K kompakt halmaz egy környezetében.*

Bizonyítás. Legyen $d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, amely az 1.16. Állítás folytán pozitív (esetleg végtelen), hiszen K kompakt, $\partial\Omega$ pedig zárt (esetleg üres), és diszjunktak (mert $K \subset \Omega = \operatorname{int}\Omega$). Ezenkívül definiáljuk a

$$\overline{K_{\frac{d}{2}}} := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, K) \le d/2\},$$

halmazt és az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{K_{\frac{d}{2}}}, \\ 0, & \text{ha } x \in \Omega \setminus K_{\frac{d}{2}}. \end{cases}$$

függvényt. Válasszunk egy $0 < \varepsilon \le \frac{d}{4}$ számot, amelyre a 3.18. Tétel alapján elkészített $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ függvény értelmes. Megmutatjuk, hogy a $\varphi := = f_\varepsilon$ függvényre $\varphi = 1$ a K kompakt halmaz egy környezetében, nevezetesen $K_{\frac{d}{4}}$-ben, ekkor készen leszünk. Valóban, ε választása miatt $x \in \overline{K_{\frac{d}{2}}}$ esetén $B(x, \varepsilon) \subset \overline{K_{\frac{d}{2}}}$, és így

$$f_\varepsilon(x) = \int_\Omega f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{K_{\frac{d}{2}}} 1 \cdot \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1.$$

Végezetül gondoljuk meg, hogy $0 \le f \le 1$ és $\eta_\varepsilon \ge 0$ folytán

$$0 \le f_\varepsilon(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = 1.$$

□

3.4. Az egységosztás tétele

Az egységapproximáció mellett a parciális differenciálegyenletek elméletének egy másik igen fontos szerepet betöltő eszköze az úgynevezett egységosztás tétele. Ennek segítségével lokálisan teljesülő tulajdonságokból tudunk következtetni globális tulajdonságokra.

3.23. Tétel (Egységosztás tétele)**.** *Legyen $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt halmaz, továbbá $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, m)$ nyílt halmazok, amelyekre $K \subset \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$. Ekkor léteznek $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ függvények úgy, hogy $\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1$ a K halmaz egy környezetében.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy léteznek G_j $(j = 1, \dots, m)$ korlátos nyílt halmazok, amelyekre $\overline{G_j} \subset \Omega_j$ és $K \subset \bigcup_{j=1}^m G_j$. Első lépésben a $K \setminus \setminus \bigcup_{j=2}^m \Omega_j$ kompakt és Ω_1 nyílt halmazhoz az 1.19. Állítás szerint található olyan G_1 nyílt halmaz, hogy $K \setminus \bigcup_{j=2}^m \Omega_j \subset G_1 \subset \overline{G_1} \subset \Omega_1$. Második lépésben a $G_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ halmazok közül Ω_2-höz választjuk meg a G_2 nyílt halmaz, amelyre $K \setminus (\bigcup_{j=3}^m \Omega_j \cup G_1) \subset G_2$ és $\overline{G_2} \subset \Omega_2$. Ezt az eljárást folytatva megkapjuk a kívánt G_j $(j = 1, \dots, m)$ halmazokat.
Most alkalmazzuk a 3.22. Tételt a $\overline{G_j} \subset \Omega_j$ halmazokra, így kapjuk a $\psi_j \in \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ függvényeket, amelyekre $\psi_j = 1$ a $\overline{G_j}$ halmaz egy környezetében. Definiáljuk a φ_j $(j = 1, \dots, m)$ függvényeket a következőképpen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \psi_1 \\
\varphi_2 &:= \psi_2(1-\psi_1) \\
&\ \vdots \\
\varphi_m &:= \psi_m(1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_{m-1}).
\end{aligned}$$

Nyilvánvalóan $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, továbbá vegyük észre, hogy $\psi_j = 1 - (1 - \psi_j)$ miatt

$$\varphi_j = (1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_{j-1}) - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_j).$$

Ebből következően

$$\sum_{j=1}^m \varphi = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\dots(1-\psi_m),$$

amelynek jobb oldala 1-gyel egyenlő az $\bigcup_{j=1}^m G_j$ nyílt halmazon (amely tartalmazza K-t). Valóban, $x \in \bigcup_{j=1}^m G_j$ esetén $x \in G_k$ valamilyen k-ra, és ekkor a ψ_k függvény definíciójából adódóan $\psi_k(x) = 1$, tehát

$$(1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \ldots (1 - \psi_m) = 0.$$

□

3.24. *Megjegyzés.* Az egységosztás tétele valójában sokkal általánosabban, topologikus terekben is igaz. Az $\mathbb{R}^n$ téren az erősebb tételt úgy fogalmazhatjuk, hogy az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz U_α ($\alpha \in I$, ahol I tetszőleges indexhalmaz) nyílt halmazokkal való fedéséhez léteznek φ_α ($\alpha \in I$) függvények úgy, hogy a következők teljesülnek:

(i) minden $\alpha \in I$ esetén $\varphi_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$;

(ii) minden $\alpha \in I$ esetén létezik $\beta \in I$ úgy, hogy $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\beta$;

(iii) a (φ_α) függvényrendszer lokálisan véges, azaz minden $K \subset \Omega$ kompakt halmazra véges sok φ_α függvény kivételével $\varphi_\alpha = 0$ a K halmazon;

(iv) minden $x \in \Omega$ esetén $\sum_{\beta \in J} \varphi_\beta(x) = 1$ (amely a (iii) feltétel miatt valójában csak véges összeg).

A (φ_α) függvényrendszert az (U_α) fedésnek *alárendelt egységosztásnak* nevezzük. Az általános egységosztás tételének bizonyítása egyszerű módon visszavezethető kompakt Ω esetére, részletesen lásd például az [1] könyvben.

II. rész

Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek

4. fejezet

Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, példák

A matematika kísérleti tudomány, nem a definíciók születnek először, azok csak később.

Oliver Heaviside (1850–1925)

A fejezet tartalma. Bevezetjük a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához szükséges alapfogalmakat, és az egyenletek főbb típusait. Értelmezzük továbbá a különböző mellékfeltételekkel nyert feladatok korrekt kitűzésének fogalmát. Ezt követően néhány példát mutatunk elemi módszerek segítségével megoldható parciális differenciálegyenletekre.

4.1. Motiváció

A természetben, illetve a mindennapi élet során végbemenő fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági stb. folyamatok különböző állapotváltozók segítségével írhatók le, amelyek rendszerint térben és időben folyamatosan változnak. Gondoljunk például egy szoba levegőjének hőmérsékletére, vagy egy gitár megpengetett húrjának alakváltozására, esetleg egy populáció egyedszámának növekedésére, csökkenésére, vagy a tőzsdei részvényárfolyamok ingadozására. Az ilyen és hasonló folyamatok állapotváltozói a legtöbb esetben olyan egyenleteknek tesznek eleget, amelyekben a változónak az idő és tér szerinti deriváltjai is szerepelnek, ezeket hívjuk *parciális differenciálegyenleteknek.*

Könnyen belátható, hogy az egyenletek önmagukban általában nem elegendőek az állapotváltozók egyértelmű meghatározására, hiszen például a szoba levegőjének mindenkori hőmérsékletéhez ismernünk kell a fal (más szóval a perem) hőmérsékletét is, és szükségünk van egy korábbi (más szóval kezdeti) időpontbeli hőmérsékleti adatra. Hasonlóan, egy megpengetett gitárhúr, vagy egy megrántott kötél alakjának egyértelmű leírásához egy kezdeti alakra, illetve egy kezdeti sebességeloszlásra is szükség van, továbbá a húr vagy kötél két végpontjának (peremének) viselkedését szintén ismernünk kell. A különböző folyamatokban számos egyéb feltételekre is szükségünk lehet, amelyeket összefoglaló néven *mellékfeltételeknek* hívunk. Az egyenletek a mellékfeltételektől függően különféle problémákat határoznak meg, amelyek megoldásait is, például differenciálhatóság szempontjából, többféle értelemben kereshetjük.
E fejezet célja a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához szükséges alapfogalmak bevezetése, illetve néhány egyszerűbb típusú parciális differenciálegyenlet elemi megoldási módszereinek bemutatása.

4.2. Alapfogalmak

Parciális deriváltak jelölésére a $\partial_1, \partial_2, \dots$ jeleket fogjuk használni, azonban egyes változók esetében, ha ez nem okoz félreértést, akkor a $\partial_t, \partial_x, \partial_y$ stb. jelölésekre térünk át. A többszörös parciális deriváltakat a szokásos $\partial_j\partial_k$, ∂_j^2, $\partial_j\partial_k\partial_\ell$ stb. módon jelöljük, magasabb rendű deriváltak esetében pedig gyakran (amikor maguk a változók nem olyan lényegesek) a tömörebb *multiindex* jelölést használjuk, amely Laurent Schwartz (1915–2002) francia matematikustól származik.

4.1. Jelölés. Legyenek $\alpha_j \geq 0$ $(j = 1, \dots, n)$ egész számok, ekkor $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ úgynevezett *multiindex*. Az α multiindex *abszolút értéke* $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.
Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, akkor legyen $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n} f$. Vegyük észre, hogy ekkor $|\alpha|$ éppen a parciális derivált rendje. Megállapodás szerint $|\alpha| = 0$ (azaz $\alpha = (0, \dots, 0)$) esetén $\partial^\alpha f = f$.

4.2.1. Parciális differenciálegyenlet fogalma

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ tartomány, vagyis összefüggő, nyílt halmaz. Jelölje N valamely adott m nemnegatív egész szám esetén azon $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multiindexek számát, amelyekre $|\alpha| \leq m$. Tekintsünk egy $(m + N$ változós) $F\colon \Omega \times G \to \mathbb{R}$ függvényt, amelynek simasági tulajdonságait a konkrét problémák során fogjuk megmondani. Keressünk ekkor olyan $u \in C^m(\Omega)$ függvényt, amelyre

$$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \ldots, \partial_n u(x), \ldots, \partial_n^m u(x)) = 0 \quad (x \in \Omega), \tag{4.1}$$

vagy tömörebben

$$F \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u, \ldots, \partial_n^m u) = 0. \tag{4.2}$$

A (4.1), illetve az egyenrangú (4.2) egyenletet *parciális differenciálegyenlet*nek nevezzük (gyakran tömören PDE), és az ezt kielégítő függvényeket a *parciális differenciálegyenlet klasszikus megoldásainak* mondjuk. Az m számot a parciális differenciálegyenlet *rendjének* hívjuk. Egy parciális differenciálegyenlet klasszikus megoldása tehát általában legalább annyiszor folytonosan differenciálható függvény, mint amennyi az egyenlet rendje. (Bizonyos esetekben nem követeljük meg a megoldás összes, legfeljebb m-edrendű parciális deriváltjának létezését és folytonosságát, hanem csupán azokét, amelyek a differenciálegyenletben előfordulnak.) A későbbiek során értelmezni fogjuk nem feltétlenül folytonosan differenciálható megoldások fogalmát is, ezeket *gyenge* vagy *általánosított megoldásoknak* fogjuk hívni.

4.2.2. Parciális differenciálegyenletek főbb típusai

A különféle alkalmazásokban előforduló parciális differenciálegyenletek alapján célszerű az egyenleteknek néhány speciális típusát megkülönböztetni. A számunkra fontos főbb típusok a következők.

- *Kvázilineáris parciális differenciálegyenletek*:

  $$\sum_{|\alpha|=m} \big(a_\alpha \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n^{m-1} u)\big) \partial^\alpha u = f \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n^{m-1} u),$$

  ahol $a_\alpha, f \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n^m} \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \le m$) adott függvények. Ezek az egyenletek tehát az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltak lineáris kombinációját tartalmazzák, ahol az együtthatófüggvények csak az egyenlet rendjénél alacsonyabb rendű deriváltaktól függhetnek.

- *Főrészükben lineáris* (más néven *szemilineáris*) *parciális differenciálegyenletek*:

  $$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial^\alpha u = f \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n^{m-1} u),$$

  ahol $a_\alpha \colon \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| = m$), $f \colon \Omega \times \mathbb{R}^{n^m} \to \mathbb{R}$ adott függvények. Az ilyen típusú egyenletek ugyancsak az egyenletben előforduló legmagasabb rendű deriváltak lineáris kombinációját tartalmazzák, ám az együtthatófüggvények csak a változótól függhetnek, a jobb oldal azonban függhet az egyenlet rendjénél alacsonyabb rendű összes deriválttól.

- *Lineáris parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

ahol $a_\alpha, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \leq m$) adott függvények. Az ilyen típusú egyenletekben tehát az összes legfeljebb m-edrendű derivált szerepelhet, és az együtthatófüggvények, illetve a jobb oldali függvény csak a változótól függhet. Amennyiben $f = 0$, akkor az egyenletet *homogénnek* hívjuk, egyébként *inhomogén egyenletről* beszélünk.

- *Állandó együtthatós lineáris parciális differenciálegyenletek*:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$ ($|\alpha| \leq m$) konstansok és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény. Ezek az egyenletek tehát a lineáris egyenletek speciális esetei.

4.2.3. Mellékfeltételek, korrekt kitűzésű feladatok

Egy parciális differenciálegyenlet megoldása általában nem egyértelmű, ezért rendszerint további feltételeket kell szabnunk a megoldásra nézve. A különböző folyamatokat leíró egyenletekhez különféle feltételeket írhatunk elő, ezeket összefoglaló néven *mellékfeltételeknek* nevezzük. E feltételek gyakran a fizikai meggondolásokból természetesen adódnak, mint ahogy ezt a bevetőben is említettük, és a későbbiekben konkrét példákon keresztül szintén látni fogjuk. A mellékfeltételek fontosabb típusai a következők.

- *Peremfeltétel*: ha előírjuk a megoldásnak vagy esetleg valamilyen rendig a deriváltjainak az értékeit a tartomány peremén vagy annak egy részén, akkor *peremfeltételről* beszélünk, és így kapjuk a *peremérték-feladatot.*

- *Kezdeti feltétel*: időtől függő folyamatok esetén előírhatjuk a megoldásnak és esetleg valamilyen rendig a deriváltjainak az értékeit egy kiindulási időpillanatban, ekkor *kezdeti feltételről* beszélünk, és így nyerjük a *kezdetiérték-feladatot*, más néven *Cauchy-feladatot.*

- *Kezdeti és peremfeltétel*: előfordulhat, hogy *kezdeti- és peremfeltételre* egyaránt szükség van, ekkor *vegyes feladatról* (esetleg *kezdeti-peremérték-feladatról*) beszélünk.

4.2. *Történeti megjegyzés.* A Cauchy-feladat elnevezés Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) francia matematikustól származik 1923-ból (lásd [37]).

Hadamard szerint a Cauchy-feladat a közönséges differenciálegyenletek elméletének kezdetiérték-feladatainak megfelelője parciális differenciálegyenletekre. A közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-feladatok elméletének megalapozója Augustin Louis Cauchy (1789–1857) francia matematikus volt (lásd például a jól ismert Cauchy-féle egzisztenciatételt), az ő tiszteletére használta Hadamard a Cauchy-feladat elnevezést.
Hadamard a matematika szinte minden ágában maradandót alkotott. A hatványsorok elméletéből mindenki számára jól ismert Cauchy–Hadamard-tétel is az ő nevét (is) viseli. Hadamard 1896-ban Charles Jean de la Vallée-Poussin (1866–1962) belga matematikussal egy időben, de tőle függetlenül igazolta prímszámtételt. Érdekes módon de la Vallée Poussin 96, Hadamard 97 éves korában hunyt el, és a két matematikus élete szinte ugyanazokra az évekre esett.

Egy konkrét egyenlet kapcsán gyakran nehéz feladat a megfelelő mellékfeltételek megadása, amellyel az egyenlet egy adott természeti folyamat reális modelljének tekinthető, vagyis bizonyos természetes módon elvárt feltételeknek eleget tesz. Általában az alábbi három alapvető feltételt célszerű megkövetelni.

(i) *Megoldás létezése*: a szóban forgó feladatnak *létezik megoldása* az adott függvényosztályban.

(ii) *Megoldás egyértelműsége*: a vizsgált feladat *megoldása egyértelmű* az adott függvényosztályban.

(iii) *Stabilitás*: a *megoldás folytonosan függ az adatoktól.* Ez azt jelenti, hogy a feladatban szereplő bizonyos adatokat (például a mellékfeltételeket vagy az egyenlet jobb oldalát) „kissé” megváltoztatva a kapott megoldás „sem változik túlzottan”. E feltétel az alkalmazások szempontjából fontos, hiszen az adatok általában mérési eredményekből származnak, tehát mérési hibát tartalmaznak, és elvárjuk, hogy kis mérési hibák a feladat megoldásának csak kis hibáját idézzék elő.

4.3. Definíció. Ha egy feladat kielégíti az (i)–(iii) feltételeket, akkor *korrekt kitűzésűnek* nevezzük.

4.4. *Történeti megjegyzés.* A korrekt kitűzésű feladat fogalmát ugyancsak Jacques Hadamard (1865–1963) francia matematikus vezette be 1902-ben. A következő nem korrekt kitűzésű feladat Hadamard-tól származik.

4.5. Példa (Hadamard)**.** Tekintsük az alábbi feladatcsaládot $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^+), \\ u(x,0) &= \frac{1}{k}\sin kx \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_2 u(0,y) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ekkor könnyen ellenőrizhetően $u(x,y) = \frac{1}{k}\sin kx \frac{e^{ky}+e^{-ky})}{2}$ megoldás (és ez egyértelmű, lásd a 4.11. Feladatot), amely minden rögzített $x \neq 2k\pi$ esetén $k \to \infty$ mellett tetszőlegesen nagy értékeket is felvesz, azonban a mellékfeltételben $\frac{1}{k}\sin kx \to 0$, tehát a stabilitás feltétele nem teljesül. A feladat valójában korrekt kitűzésűvé tehető, amennyiben a megoldást olyan függvények körében keressük, amelyek növekedésére bizonyos korlátot szabunk. További nem korrekt kitűzésű problémák szerepelnek a 4.12–4.14. Feladatokban.

4.3. Néhány elemi úton megoldható egyenlet

A következőkben néhány elemi módszert mutatunk parciális differenciálegyenletek megoldására. Nem törekszünk az általánosságra, hanem a módszereket a lehető legegyszerűbb példákon szemléltetjük.

4.3.1. Integrálható egyenletek

Az ilyen típusú egyenletek megoldásait az egyenletek többszöri integrálásával nyerhetjük.

4.6. Példa. Az elsőrendű

$$\partial_1 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

differenciálegyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = c(y)$$

alakúak, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény. Valóban, az egyenlet azt jelenti, hogy minden rögzített y esetén az $x \mapsto u(x,y)$ függvény deriváltja azonosan 0, tehát a függvény konstans. Ez a konstans minden y esetén más, így $u(x,y) = c(y)$.
Általában a lineáris

$$\partial_1 u(x,y) = f(x,y) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = \int f(x,y)\,dx + c(y)$$

alakúak, ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$. Valóban, $\int f(x,y)\,dx$ (egy tetszőleges eleme) az egyenlet egy partikuláris megoldása, és $c(y)$ a homogén egyenlet általános megoldása az előbbiek alapján.

4.7. Példa. A másodrendű

$$\partial_1\partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = c(x) + d(y)$$

alakúak, ahol $c, d \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvények. Valóban, $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ esetén $0 = \partial_1\partial_2 u = \partial_2(\partial_1 u)$, vagyis a 4.6. Példa szerint $\partial_1 u(x,y) = \tilde{c}(x)$, és így

$$u(x,y) = \int \tilde{c}(x)\,dx + d(y) = c(x) + d(y).$$

A 4.1–4.4. Feladatokban egyéb integrálható egyenletekre találhatunk példákat.

4.3.2. Közönséges differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek

Az ilyen típusú egyenletek integrálással vagy új ismeretlen függvény bevezetésével közönséges differenciálegyenletre vezethetők vissza.

4.8. Példa. Keressük meg a

$$\partial_1\partial_2 u(x,y) + 2x\partial_2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.4}$$

másodrendű lineáris egyenlet $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásit! Legyen y rögzített és definiáljuk a $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a $v(x;y) = \partial_2 u(x,y)$ hozzárendeléssel, ahol most y paraméter. Ekkor a (4.4) egyenlet a

$$v'(x;y) + 2xv(x;y) = x \tag{4.5}$$

alakot ölti, ahol „$'$" az x szerinti deriválást jelenti. A (4.5) egyenlet egy elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet, amelyet megoldhatunk például az Euler-féle integráló tényező módszerével. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát e^{x^2}-tel, ekkor

$$e^{x^2}v'(x;y) + 2xe^{x^2}v(x;y) = xe^{x^2}.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon éppen az $x \mapsto e^{x^2}v(x;y)$ függvény (x szerinti) deriváltja áll, a jobb oldalon pedig az $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$ függvény (x szerinti) deriváltja, így az egyenlet mindkét oldalát x szerint integrálva

$$e^{x^2}v(x;y) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c(y)$$

adódik. (Vigyázzunk, mivel y paraméter v-ben, ezért az integrálás során keletkező c konstans függ y-tól!) Innen rendezéssel $v(x;y) = \frac{1}{2} + c(y)e^{-x^2}$. Mivel $v(x;y) = \partial_y u(x,y)$, ezért végül a (4.4) egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x,y) = \frac{1}{2}y + C(y)e^{-x^2} + D(x)$$

alakúak, ahol $C, D \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények. Megjegyezzük, hogy úgy is eljárhattunk volna, hogy a kiindulási egyenletet először integráljuk y szerint, ekkor az $x \mapsto u(x,y)$ függvényre nézve kapjuk a (4.5) közönséges differenciálegyenletet.

4.3.3. Új változók bevezetésével megoldható egyenletek

Gyakran célravezető, hogy új független változókat vezetünk be, és az egyenletet egy könnyebben kezelhető alakra transzformáljuk.

4.9. Példa. Tekintsük az elsőrendű lineáris

$$\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.6}$$

egyenletet. Vegyük észre, hogy

$$0 = \partial_1 u - \partial_2 u = (\partial_1 u, \partial_2 u) \cdot (1,-1) = \partial_{(1,-1)} u,$$

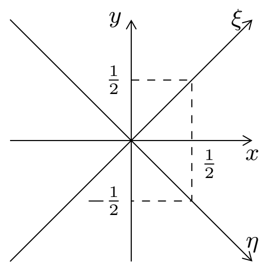
más szóval az u függvénynek az $(1,-1)$ irányban vett iránymenti deriváltja minden pontban 0. Ez azt jelenti, hogy az $(1,-1)$ irányú, tehát $x + y = c$ egyenletű egyenesek mentén u konstansfüggvény, így

$$u(x,y) = c(x+y),$$

ahol $c \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.
Az iménti érvelés adhatja az ötletet egy másik megoldásra, mégpedig az új $\xi = x + y$ független változó bevezetésére. A másik változót lényegében tetszőlegesen választhatjuk meg, a későbbiek szempontjából célszerű az $\eta = x - y$ helyettesítés (a transzformációt a 4.1. ábra szemlélteti). Vezessük be tehát a

$$\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases} \tag{4.7}$$

új független változókat, valamint a $v(\xi, \eta) = u(x,y)$ új ismeretlen függvényt, és nézzük meg, hogyan alakul v-re nézve a differenciálegyenlet (a továbbiakban az egyes változók megkülönböztetése céljából ∂_x, ∂_y és $\partial_\xi, \partial_\eta$ jelölésekre



$$\left.\begin{aligned}\xi &= x+y\\ \eta &= x-y\end{aligned}\right\}$$

4.1. ábra. Áttérés új koordinátákra

térünk át). A láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta v(\xi,\eta)) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} =$$
$$= (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta v(\xi,\eta)) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

ami azt jelenti, hogy

$$\begin{cases} \partial_x u = \partial_\xi v + \partial_\eta v \\ \partial_y u = \partial_\xi v - \partial_\eta v. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ebből következően $\partial_x u - \partial_y u = 2\partial_\eta v$, tehát a (4.6) egyenlet a $\partial_\eta v = 0$ alakot ölti. Ennek megoldása (a 4.7. Példa alapján) $v(\xi,\eta) = C(\xi)$, tehát

$$u(x,y) = C(x+y),$$

ahol $C \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges.

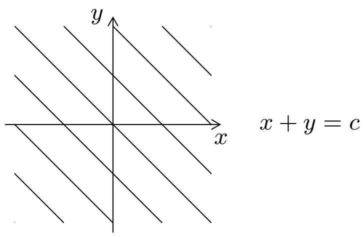
4.10. Példa. A 4.9. Példában alkalmazott (4.7) koordinátatranszformáció a

$$\partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.9}$$

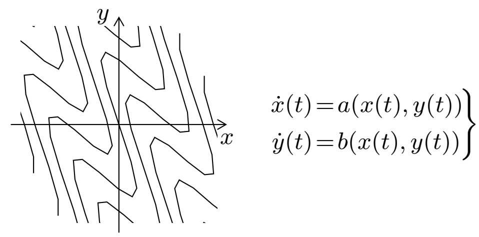
egyenlet megoldására is használható. A deriváltakra vonatkozó (4.8) összefüggések alapján

$$\partial_x^2 u = \partial_\xi(\partial_\xi v + \partial_\eta v) + \partial_\eta(\partial_\xi v + \partial_\eta v) = \partial_\xi^2 v + 2\partial_{\xi\eta} v + \partial_\eta^2 v,$$
$$\partial_y^2 u = \partial_\xi(\partial_\xi v - \partial_\eta v) - \partial_\eta(\partial_\xi v - \partial_\eta v) = \partial_\xi^2 v - 2\partial_{\xi\eta} v + \partial_\eta^2 v,$$

így $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 4\partial_{\xi\eta} v$, vagyis a (4.9) egyenlet alakja $\partial_{\xi\eta} v = 0$. Ennek megoldása (a 4.7. Példa alapján) $v(\xi,\eta) = c(\xi) + d(\eta)$, vagyis a (4.9) egyenlet



4.2. ábra. Karakterisztikák



4.3. ábra. Karakterisztikák

klasszikus megoldásai

$$u(x, y) = C(x + y) + D(x - y)$$

alakúak, ahol $C, D \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvények. Megjegyezzük, hogy a (4.9) egyenlet az úgynevezett *egydimenziós hullámegyenlet*, amellyel a későbbiekben részletesen is foglalkozunk.

4.3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek

Tekintsük ismét az elsőrendű lineáris

$$\partial_1 u(x, y) - \partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.10}$$

egyenletet. Amint a 4.9. Példában láttuk, az egyenlet megoldásai az $x + y = c$ egyenletű egyenesek mentén állandók (lásd a 4.2. ábrát). Ezeket az egyeneseket a (4.10) egyenlet *karakterisztikus görbéinek* vagy *karakterisztikáinak* hívjuk. (A karakterisztikus szó a matematikában mindig „invariáns módon kapcsolódót” jelent, a mostani esetben a karakterisztikák a koordinátarendszer választásától függetlenek.)
Általában az

$$a(x, y)\partial_1 u(x, y) + b(x, y)\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.11}$$

elsőrendű homogén lineáris egyenlet *karakterisztikus rendszere* a

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases} \tag{4.12}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amelynek $t \mapsto (x(t), y(t))$ megoldásgörbéit (trajektóriáit) a (4.11) egyenlet *karakterisztikus görbéinek* vagy *karakterisztikáinak* nevezzük (lásd a (4.3. ábrát). A (4.11) egyenlet megoldásai a karakterisztikus görbék mentén állandók, ugyanis

$$\frac{d}{dt}\big(u(x(t),y(t)\big) = \big(\partial_1 u(x(t),y(t)),\partial_2 u(x(t),y(t)\big)\cdot(\dot{x}(t),\dot{y}(t)) =$$
$$= a(x(t),y(t))\partial_1 u(x(t),y(t)) + b(x(t),y(t))\partial_2 u(x(t),y(t)) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a (4.11) egyenlet minden $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldása a (4.12) karakterisztikus rendszer *első integrálja*, vagyis a megoldásgörbéken állandó függvény. Megfordítva, ha $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ minden karakterisztikus görbén állandó, akkor u kielégíti a (4.11) parciális differenciálegyenletet.

4.11. Példa. Az elsőrendű homogén lineáris

$$y\partial_1 u(x,y) - x\partial_2 u(x,y) = 0 \qquad ((x,y)\in\mathbb{R}^2) \tag{4.13}$$

egyenlet karakterisztikus rendszere:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t). \end{cases}$$

A közönséges differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy ennek megoldása $x(t) = c\sin(t+t_0)$, $y(t) = c\cos(t+t_0)$, ahol a c és t_0 konstansok a kezdeti feltételtől függnek. Ez azt jelenti, hogy a rendszer megoldásgörbéi, vagyis a karakterisztikák origó középpontú körvonalak (lásd a 4.4. ábrát). A (4.13) egyenlet megoldásai tehát az origó középpontú körvonalak mentén állandók, vagyis a megoldás (x,y) pontbeli értéke csak az origótól vett távolságtól függ. Ebből következően $u(x,y) = c(x^2+y^2)$, ahol $c \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tetszőleges függvény Megjegyezzük, hogy az u első integrált a karakterisztikus rendszer megoldásainak ismerete nélkül is megtalálhattuk volna. Nevezetesen a karakterisztikus rendszer első egyenletét $x(t)$-vel, a másodikat $y(t)$-vel szorozva, majd a kapott egyenleteket összegezve

$$\dot{x}(t)x(t) + \dot{y}(t)y(t) = 0$$

adódik. Más szóval

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t)\right) = 0,$$

tehát $t \mapsto x^2(t) + y^2(t)$ konstansfüggvény, így $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ a rendszer egy első integrálja. Mivel első integrál tetszőleges függvénye is első integrál, az $u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$ alakú függvények a (4.13) egyenlet klasszikus megoldásai, ahol $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges függvény.

Tekintsük most az elsőrendű inhomogén lineáris

$$a(x,y)\partial_1 u(x,y) + b(x,y)\partial_2 u(x,y) = f(x,y) \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2) \tag{4.14}$$

egyenletet. Ennek *karakterisztikus rendszere* ugyancsak az

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y), \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer, amelynek $t \mapsto (x(t), y(t))$ megoldásgörbéi (trajektóriái) a (4.13) egyenlet *karakterisztikái.* A (4.11) egyenlet megoldásaira a karakterisztikák mentén a következő teljesül:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(x(t),y(t)\big) &= \big(\partial_1 u(x(t),y(t)), \partial_2 u(x(t),y(t)\big) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \\ &= a(x(t),y(t))\partial_1 u(x(t),y(t)) + b(x(t),y(t))\partial_2 u(x(t),y(t)) = \\ &= f(x(t),y(t)). \end{aligned}$$

Ezt integrálva

$$u(x(t),y(t)) - u(x(t_0),y(t_0)) = \int_{t_0}^{t} f(x(\tau),y(\tau))\,d\tau, \tag{4.15}$$

vagyis megkapjuk az u megoldás általános alakját egy $t \mapsto (x(t), y(t))$ karakterisztika mentén. Amennyiben ismerjük u értékét a karakterisztika egy $(x(t_0), y(t_0))$ pontjában, akkor ezen a karakterisztikán a megoldás már egyértelműen meg van határozva. Ebből következően, ha a (4.14) egyenlet megoldását előírjuk egy olyan kezdeti görbe mentén, amely minden karakterisztikus görbét pontosan egyszer metsz, akkor általában az egyenletnek egyértelmű klasszikus (és általában csak lokális) megoldását nyerjük (feltéve, hogy a karakterisztikák sem metszik egymást). (Az elsőrendű egyenletek elméletének precíz és részletes tárgyalása megtalálható például a [13, 3] könyvekben.)

4.12. Példa. Határozzuk meg a

$$\partial_1 u(x,y) - \partial_2 u(x,y) = x \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{4.16}$$

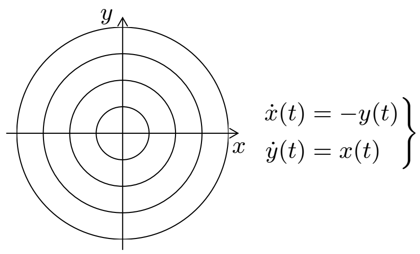
elsőrendű inhomogén lineáris egyenletet azon megoldását, amelyre

$$u(x,x) = x \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

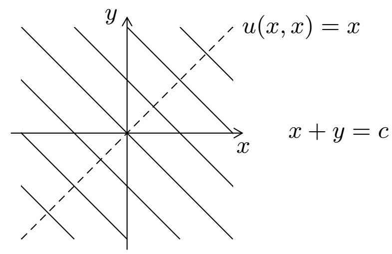
Láttuk, hogy az egyenlet karakterisztikái az $x + y = c$ egyenletű egyenesek, pontosabban az $\dot{x}(t) = 1$, $\dot{y}(t) = -1$ rendszer megoldásgörbéi, amelyeket például

$$(x(t), y(t)) = (t, c - t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

módon paraméterezhetünk. A (4.17) feltétel azt jelenti, hogy a megoldás értékeit előírjuk az $y = x$ egyenes mentén, amely minden karakterisztikát pontosan egyszer metsz (lásd a 4.5. ábrát). Egy rögzített karakterisztikán a $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$



4.4. ábra. Karakterisztikák



4.5. ábra. Kezdeti görbe

pontból integrálva a (4.16) egyenletet a (4.15) összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$u(t, c-t) = u\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right) + \int_{\frac{c}{2}}^{t} \tau \, d\tau = \frac{c}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Ebből következően

$$u(x,y) = \frac{x+y}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4},$$

amely valóban kielégíti a (4.16) egyenletet.

4.4. Feladatok

4.1. Adjuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1 u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_2 u(x,y) = xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

c) $\big(\partial_1 u(x,y)\big)^2 + \big(\partial_2 u(x,y)\big)^2 = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

4.2. Határozzuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1^2 u(x,y) = e^{x+y} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1 \partial_2 u(x,y) = xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

4.3. Adjuk meg a következő parciális differenciálegyenletek $u \in C^3(\mathbb{R}^3)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $\partial_1^3 u(x,y,z) = 0 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$,

b) $\partial_1 \partial_2 \partial_3 u(x,y,z) = xyz \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

4.4. Határozzuk meg azon $u \in C^n(\mathbb{R}^n)$ függvényeket, amelyek kielégítik a következő parciális differenciálegyenletet!

$$\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n u(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad ((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

4.5. Vezessük vissza a következő parciális differenciálegyenleteket elsőrendű közönséges differenciálegyenletekre, majd határozzuk meg az $u \in \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásaik általános alakját!

a) $\partial_1^2 u(x, y) + \partial_1 u(x, y) = y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1\partial_2 u(x, y) + 2y\partial_2 u(x, y) = x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

4.6. Írjuk fel az alábbi egyenletnek a megadott (ξ, η) koordináták bevezetése után kapott alakját, majd határozzuk meg az egyenletek klasszikus megoldásait!

a) $\partial_1^2 u(x, y) + 2\partial_1\partial_2 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) = x \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,
$\xi = 3x + y$, $\eta = x - y$,

b) $\partial_1^2 u(x, y) - 2\partial_1\partial_2 u(x, y) - 3\partial_2^2 u(x, y) = y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,
$\xi = x$, $\eta = x - y$.

4.7. Keressük meg a következő elsőrendű lineáris egyenletek klasszikus megoldásait! Rajzoljuk fel az egyenletek karakterisztikáit is, ahol tudjuk!

a) $x\partial_1 u(x, y) - y\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1 u(x, y) - y\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$,

c) $y^2\partial_1 u(x, y) + e^x\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$.

4.8. Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlet klasszikus megoldásai

$$u(x, y) = \frac{f(x) + g(y)}{x - y}$$

alakúak, ahol $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

$$\partial_1\partial_2 u(x, y) - \frac{1}{x - y}\partial_1 u(x, y) + \frac{1}{x - y}\partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y).$$

4.9. Adjuk meg azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ függvényeket, amelyekre teljesül a következő parciális differenciálegyenlet!

$$\partial_1 u(x, y) \cdot \partial_2 u(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

4.10. Keressük meg a következő feladatok $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásait!

a) $$\begin{cases} \partial_1\partial_2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2), \\ u(x,0) = x^2 \quad (x\in\mathbb{R}), \\ u(0,y) = 4y^2 \quad (y\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_1^2 u(x,y) - \partial_2^2 u(x,y) = 2 \quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2), \\ u(x,x) = \sin 2x + 5x^2 \quad (x\in\mathbb{R}), \\ u(x,-x) = \sin 2x - 7x^2 \quad (x\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

4.11. Igazoljuk, hogy a (4.3) Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\mathbb{R}\times{\mathbb{R}^+}_0)$ megoldása!

4.12. Legyen $\Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi peremérték-feladatnak nem létezik $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása!

$$\begin{cases} \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 1 \quad \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

4.13. Mutassuk meg, hogy az alábbi feladatnak végtelen sok $u \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_0^+)$ megoldása van!

$$\begin{cases} \partial_1 u - \partial_2^2 u = 0 \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = 0 \quad (x\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

4.14. Igazoljuk, hogy az alábbi kezdetiérték-feladat esetében nem teljesül a kezdeti értéktől való folytonos függés feltétele!

$$\begin{cases} \partial_1 u + \partial_2^2 u = 0 \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{k}\sin kx \quad (x\in\mathbb{R}). \end{cases}$$

5. fejezet

A matematikai fizika néhány parciális differenciálegyenlete

A természet elmélyült tanulmányozása a matematikai felfedezések legtermékenyebb forrása.

Joseph Fourier (1768–1830)

A fejezet tartalma. Levezetjük két fontos fizikai jelenség, a hővezetés és a hullámmozgás leírására szolgáló egyenleteket egy- és magasabb dimenzióban, majd számos további példát mutatunk parciális differenciálegyenletek, illetve rendszerek konkrét előfordulására.

5.1. Motiváció

A következőkben a másodrendű parciális differenciálegyenletek elméletének három alapegyenletével és azok fizikai motivációjával ismerkedünk meg. Az egyenletek két, mindenki számára jól ismert fontos fizikai jelenség, a hővezetés és a hullámmozgás matematikai leírásában játszanak szerepet. A fejezetben célunk e két folyamat matematikai vizsgálata egyszerű fizikai törvények alapján. Nem törekszünk a precizitásra, levezetéseink matematikailag egyáltalán nem lesznek szabatosak. Érveléseinkben rendszerint „kicsiny" (infinitezimális) mennyiségek bukkannak fel, és lépten-nyomon a következő közelítést fogjuk használni: ha δx kicsiny mennyiség, akkor

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} \approx f'(x).$$

Az érvelések természetesen precízzé tehetők (a differenciálszámítás középértéktételeinek segítségével, lásd a [80] könyvet), azonban a szabatosság háttérbe szorításával talán szemléletesebb képet kaphatunk az egyenletek jelentéséről. A fejezet végén számos egyéb fizikai példát sorolunk fel (a teljesség igénye nélkül), ahol parciális differenciálegyenletek és rendszerek fordulnak elő, ezzel is illusztrálva, hogy a természeti folyamatok számtalan érdekes és nehéz matematikai problémát vetnek fel, ahogy ezt a fejezet nyitó idézete is mondja.

A későbbi fejezetekben fő célkitűzésünk a megismert három alapegyenlet és az ezekből a különböző mellékfeltételekkel nyert problémák részletes tanulmányozása, elsősorban a megoldások létezésével és tulajdonságaival kapcsolatos kérdések vizsgálata, valamint az ehhez szükséges alapvető elméleti háttér megteremtése.

5.2. A hővezetés matematikai leírása

A *hővezetés* folyamata a hétköznapjaink szerves része, hiszen a levegő hőmérséklete szinte minden embert érdekel, nyáron leginkább a nyaralás, télen pedig lakásunk fűtése miatt. A hővezetés matematikai leírására szolgáló egyenletet két tapasztalati összefüggésre alapozva fogjuk levezetni. Az egyik, amelyet mindenki jól ismer, hogy a hő a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé áramlik. A másik Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikus és fizikus törvénye, amely szerint a hőáramlás sebessége arányos a hőmérséklet adott irányú deriváltjával. Pontosabban fogalmazva, egy adott x pontra illeszkedő δA felületdarabon keresztül δt idő alatt áramló hőmennyiség

$$\delta Q = -k(x)\partial_\nu u(x,t)\delta A \delta t,$$

ahol ν a felület normálvektora, amely a hőátadás irányába mutat (a magasabb hőmérséklet felől az alacsonyabb felé), $k(x)$ a belső hővezetési együttható és $u(x,t)$ a hőmérséklet az x pontban a t időpillanatban (lásd az 5.1. ábrát).

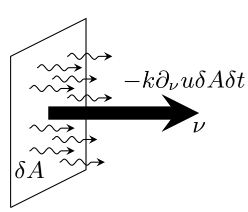
Fourier törvényét szemléletesen úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a hőáramlás sebességének iránya az állandó hőmérsékletű szintvonalakra (izotermákra) merőleges, és nagysága a hőmérsékleti gradiens nagyságának negatív számszorosa. Képzeljük el például, ahogy az eső lefolyik a dombtetőről, vagy a síelő lecsúszik a hegy tetejéről, úgy áramlik a hő a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé (lásd az 5.2. ábrát). E fizikai törvények segítségével az alábbiakban részletesen levezetjük az egy- és magasabb dimenziós hővezetési egyenletet, majd megvizsgáljuk, hogy milyen mellékfeltételek szükségesek a hőmérséklet egyértelmű meghatározásához.

5.1. *Történeti megjegyzés.* A hővezetési egyenletet először Fourier vezette le A hővezetés analitikus elemélete című művében (lásd [22]) az előbbiekben ismertetett tapasztalati törvény alapján. A művet 1812-ben írta meg, azonban nem engedték megjelenni, csak 1822-ben került kiadásra, amikor is Fourier a

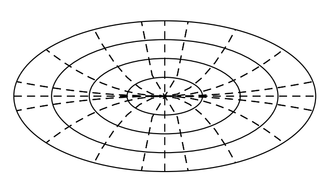
Párizsi Akadémia titkára lett, és engedélyezte saját könyve kiadását. A mű később a Fourier-sorok elméletének kiindulópontjává vált, a fizika fejlődésében szintén egy óriási mérföldkő volt, Lord Kelvin (1824–1907) például, saját bevallása szerint, 16 éves korában két hét alatt áttanulmányozta, és egész későbbi pályafutását meghatározta. Ahogy ő fogalmazott, a mű egy „nagyszerű matematikai költemény". Hasonlóan vélekedett a kiváló német fizikus Arnold Sommerfeld (1868–1951), aki a fizikusok bibliájának nevezte a művet.
Fourier fizikai kutatásai mellett egy ideig Alsó-Egyiptom kormányzója is volt, később a francia Isère megye prefektusaként tevékenykedett, és ezalatt készítette el egyiptológiai témájú áttekintő monográfiáját. Érdekességként megemlítjük, hogy az üvegházhatás felfedezése ugyancsak Fourier nevéhez köthető.

5.2.1. Hővezetés egy dimenzióban

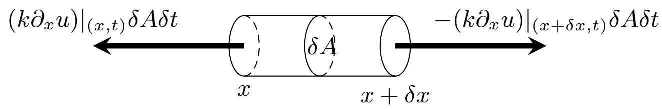
Tegyük fel, hogy adott egy vékony, L hosszúságú, henger alakú rúd, amelynek palástja szigetelt, tehát nem áramlik rajta keresztül hő. Mivel a rúd vékony, ezért a pontjait az $x \in [0, L]$ koordinátákkal jellemezhetjük, és jelölje $u(x, t)$ a rúd x koordinátájú pontjának hőmérsékletét a t időpillanatban.
Tekintsük a rúd egy $[x, x + \delta x]$ kicsiny szakaszát és vizsgáljuk meg a szakasz két végén végbemenő hőáramlást! Ha az $x+\delta x$ végpont egy kis környezetében a hőmérséklet csökken, akkor a rúd itt hőt ad le, ha pedig a hőmérséklet nő, akkor hőt vesz fel, hiszen a hő a magasabb hőmérsékletű helyről az alacsonyabb felé áramlik. Fourier törvénye szerint a hőáramlás sebessége negatívan arányos a hőmérséklet adott pontbeli x változó szerinti deriváltjával, jelölje $k(x)$ az arányossági tényezőt, amely függ(het) az adott ponttól és amelyet *hővezetési tényezőnek* szokás nevezni. Ekkor az $x + \delta x$ pontban a szakaszba befelé haladó hőáramlás sebessége $k(x + \delta x)\partial_x u(x + \delta x)$, a kifelé haladóé ennek (-1)-szerese.
Az x végpontban fordított a helyzet, ha a hőmérséklet lokálisan csökken, akkor hőt vesz fel a szakasz, ha pedig a hőmérséklet nő, akkor hőt ad le, így a befelé haladó hőáramlás sebessége $-k(x)\partial_x u(x, t)$, a kifelé haladó ennek (-1)-szerese, lásd az 5.3. ábrát.



5.1. ábra. Fourier törvénye



5.2. ábra. Izoterma és gradiens



5.3. ábra. Kifelé haladó hőáram vékony rúddarabban

Az előbbiek alapján azt mondhatjuk tehát, hogy az $[x, x+\delta x]$ végtelen kicsiny szakaszon δt idő alatt befelé áramló hőmennyiség közelítőleg

$$\delta Q_1 = \big(k(x+\delta x)\partial_x u(x+\delta x, t) - k(x)\partial_x u(x,t)\big)\delta A\delta t \approx$$
$$\approx \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\delta x\delta A\delta t,$$

ahol δA a henger keresztmetszetének területe. Tegyük fel, hogy a rúdban *hőforrások* és *hőnyelők* révén is keletkezik hőmennyiség (más szóval a rúd egyes pontjaival esetleg hőt közlünk, más pontokból pedig hőt vonunk el), jelölje $F(x,t)$ a hőforrások intenzitását ($F(x,t) > 0$ esetén hőforrásról, $F(x,t) <$ < 0 esetén pedig hőnyelőről van szó az x pontban). Ez azt jelenti, hogy az $[x, x+\delta x]$ végtelen kicsiny szakaszon δt idő alatt közelítőleg

$$\delta Q_2 \approx F(x,t)\delta x\delta A\delta t$$

hőmennyiség keletkezik hőforrások és nyelők útján. A szakaszon δt idő alatt a hőmérséklet-változás közelítőleg

$$u(x, t+\delta t) - u(x,t) \approx \partial_t u(x,t)\delta t,$$

amelyhez

$$\delta Q_3 \approx c(x)\varrho(x)\delta x\delta A\partial_t u(x,t)\delta t$$

hőmennyiség szükséges, ahol $c(x)$ a rúddarab fajhője és $\varrho(x)$ a sűrűsége az x pontban (a szükséges hőmennyiség a rúddarab tömegével és a hőmérséklet-változással arányos). Ekkor szükségképpen

$$\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2,$$

azaz

$$c(x)\varrho(x)\delta x\delta A\partial_t u(x,t)\delta t \approx \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t))\delta x\delta A\delta t + F(x,t)\delta x\delta A\delta t,$$

ahonnan a δx, δA és δt mennyiségekkel való osztás után a

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \partial_x(k(x)\partial_x u(x,t)) = F(x,t)$$

pontos egyenletet nyerjük, amely az *egydimenziós hővezetési egyenlet inhomogén közeg esetén.* Ha c, ϱ, k állandók, akkor a

$$\partial_t u(x,t) - \frac{k}{c\varrho}\partial_x^2 u(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\varrho},$$

vagy tömören a

$$\partial_t u - a\partial_x^2 u = f \tag{5.1}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$a = \frac{k}{c\varrho}$$

az úgynevezett *hőmérséklet-vezetési tényező.* Az (5.1) egyenletet röviden *inhomogén egydimenziós hővezetési egyenletnek* nevezzük, az f jobb oldalt pedig *forrástagnak.* Amennyiben $f=0$, akkor *homogén* egyenletről beszélünk.

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk most meg, hogy milyen mellékfeltételek szükségesek a hőmérséklet egyértelmű meghatározásához! Kézenfekvő, hogy megadjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását, illetve valamilyen formában a rúd peremén a hőmérséklet vagy a hőmennyiség időbeli változását.

- *Kezdeti feltétel.* Ha megadjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását, azaz

  $$u(x,0) = T_0(x) \quad (x \in [0,L]),$$

  akkor *kezdeti feltételről* beszélünk.

- *Első peremfeltétel.* Ha a rúd végeinek hőmérsékletét időben szabályozzuk, akkor

  $$u(0,t) = T_1(t), \quad u(L,t) = T_2(t) \quad (t \geq 0)$$

  úgynevezett *első peremfeltételt*, más néven *Dirichlet-féle peremfeltételt* írhatunk elő.

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a kifelé (vagy befelé) haladó hőáramot, azaz

  $$k(0)\partial_x u(0,t) = u_1(t), \quad -k(L)\partial_x u(L,t) = u_2(t) \quad (t \geq 0),$$

  amelyet *második* vagy *Neumann-féle peremfeltételnek* hívunk.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe a közeggel, akkor Newton lehűlési törvénye szerint a kifelé mutató hőáramlás sebessége arányos a rúd végpontja és a közeg T_k hőmérsékletének különbségével, így

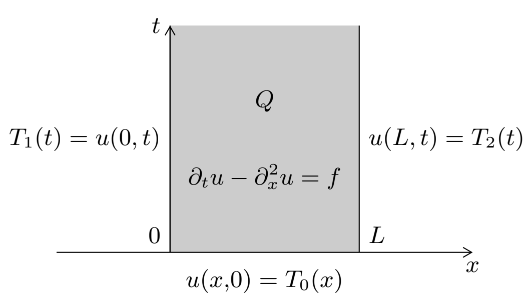
$$\begin{aligned} k(0)\partial_x u(0,t) &= \lambda(u(0,t) - T_{\mathrm{k}}(t)), \\ -k(L)\partial_x u(L) &= \lambda(u(L,t) - T_{\mathrm{k}}(t)) \quad (t \geq 0), \end{aligned}$$

  vagy ekvivalensen

$$\begin{aligned} k(0)\partial_x u(0,t) - \lambda u(0,t) &= -\lambda T_{\mathrm{k}}(t), \\ \lambda k(L)\partial_x u(L,t) + k(L)u(L,t) &= -\lambda T_{\mathrm{k}}(t), \end{aligned}$$

  amelyet *harmadik* vagy *Robin-féle peremfeltételnek* nevezünk.

A hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a kezdeti feltételt, valamint az első, második, harmadik peremfeltétel valamelyikét a *hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapjuk a $Q := (0, L) \times \mathbb{R}^+$ végtelen téglalap (kétdimenziós henger) lezártján, lásd az 5.4. ábrát.
Amennyiben a rúd végtelen hosszú, más szóval a perem hatása elhanyagolható, akkor nincs szükség peremfeltételre, csak az $u(x,0) = T_0(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ kezdeti feltételre, ekkor a *hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy más néven *Cauchy-feladatról* beszélünk.
E feladatokat matematikailag akkor fogalmaztuk meg pontosan, ha megadjuk azt a teret is, amelyben a megoldásokat keressük. A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük például $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \times C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^1(Q) \times C(\overline{Q})$ megoldásait, amelyre $\partial_x^2 u \in C(\overline{Q})$. Azt, hogy valójában mely terek választása esetén lesznek korrekt kitűzésűek a fenti feladatok, a későbbi fejezetekben vizsgáljuk meg.



5.4. ábra. Hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladat

5.2. *Történeti megjegyzés.* Isaac Newton (1642–1727) lehűlési törvényét 1701-ben publikálta a Királyi Társaság tudományos folyóiratában névtelenül megjelent hatoldalas cikkében. Ebben különböző anyagok lehűlését vizsgálta és megállapította, hogy a lehűlés sebessége arányos az anyag és a közeg hőmérsékletének különbségével.
A Dirichlet-féle peremfeltétel Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) német matematikusról kapta nevét. A Dirichlet-feladat szemléletes jelentésével a 7.3.3. szakaszban foglalkozunk.
A Neumann-féle peremfeltétel Carl Gottfried Neumann (1832–1925) német matematikusról kapta a nevét. Neumann 1870-es években írt potenciálelméleti, vagyis a Laplace-egyenlet megoldásaival foglalkozó cikkeiben gyakran jelenik meg a második peremfeltétel (a Laplace-egyenlettel a 7. fejezetben foglalkozunk). A funkcionálanalízisbeli Neumann-sor is az ő nevét viseli, ugyanis Neumann a peremérték-feladat megoldásait éppen ilyen sor alakjában adta meg.
Victor Gustave Robin (1855–1897) francia matematikus volt, aki többek között potenciálelmélettel is foglalkozott. Munkáiban azonban nem szerepel a harmadik peremfeltétel, a kissé félrevezető Robin-peremfeltétel elnevezés az 1950-es évektől terjedt el.

5.2.2. Hővezetés két és magasabb dimenzióban

Mielőtt tetszőleges dimenzióban felírnánk a hővezetés egyenletét, érdemes a kétdimenziós esetet is részletesen megnéznünk. Tekintsünk egy $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományban elhelyezkedő vékony szigetelt lemezt, amelynek pontjait jellemezzük az (x, y) koordinátákkal! Tegyük fel, hogy $u(x, y, t)$ jelöli a lemez (x, y) pontjának hőmérsékletét a t időpillanatban. Vegyük a lemez egy rögzített (x_0, y_0) középpontú kicsiny $N = [x, x + \delta x] \times [y, y + \delta y]$ résztartományát, és írjuk fel a δt idő alatt a peremen befelé haladó hőáramot, amelyet az egyes peremszakaszokon befelé haladó hőáramok összegeként nyerhetünk. Az x tengellyel párhuzamos oldalakon δt alatt befelé haladó hőáram közelítőleg

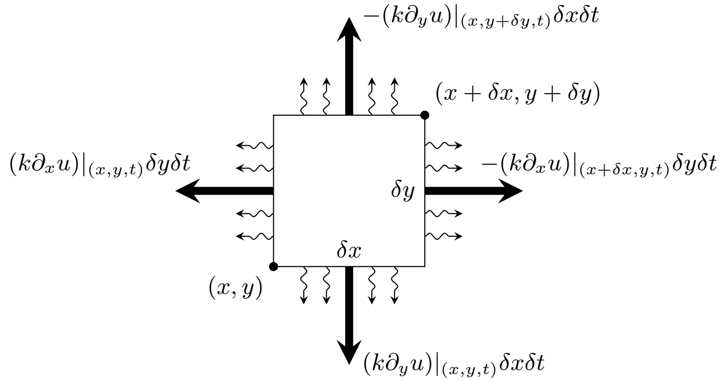
$$\begin{aligned}\big(k(x+\delta x, y)\partial_x u(x+\delta x, y, t) - k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\delta y\delta t \approx\\ \approx \partial_x\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\delta x\delta y\delta t,\end{aligned}$$

az y tengellyel párhuzamos oldalakon pedig

$$\begin{aligned}\big(k(x, y+\delta y)\partial_y u(x, y+\delta y, t) - k(x, y)\partial_y u(x, y, t)\big)\delta x\delta t \approx\\ \approx \partial_y\big(k(x, y)\partial_y u(x, y, t)\big)\delta y\delta x\delta t,\end{aligned}$$

így összességében a peremen közelítőleg

$$\begin{aligned}\delta Q_1 &= \Big(\partial_x\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big) + \partial_y\big(k(x, y)\partial_x u(x, y, t)\big)\Big)\,\delta x\delta y\delta t =\\ &= \operatorname{div}\big(k(x, y)\operatorname{grad} u(x, y, t)\big)\delta x\delta y\delta t\end{aligned}$$



5.5. ábra. Kifelé haladó hőáram téglalaptartományon

hőmennyiség áramlik befelé δt idő alatt. Tegyük fel, hogy a lemezen lévő hőforrások és nyelők intenzitását $F(x, y, t)$ sűrűségfüggvénnyel írhatjuk le, vagyis δt idő alatt az N végtelen kicsiny négyzettartományon közelítőleg

$$\delta Q_2 = F(x, y, t)\delta x\delta y\delta t$$

hőmennyiség keletkezik hőforrások és nyelők útján. A téglalapon δt idő alatt a hőmérséklet-változás közelítőleg

$$u(x, y, t + \delta t) - u(x, y, t) \approx \partial_t u(x, y, t)\delta t,$$

amelyhez

$$\delta Q_3 = c(x, y)\varrho(x, y)\delta x\delta y\partial_t u(x, y, t)\delta t$$

hőmennyiség szükséges, ahol c a lemez fajhője és ϱ a sűrűsége az (x, y) pontban. Ekkor

$$\delta Q_3 = \delta Q_1 + \delta Q_2,$$

azaz

$$c(x, y)\varrho(x, y)\delta x\delta y\partial_t u(x, y, t)\delta t \approx$$
$$\approx \operatorname{div}\big(k(x, y)\operatorname{grad} u(x, y, t)\big)\delta x\delta y\delta t + F(x, y, t)\delta x\delta y\delta t,$$

ahonnan a δx, δy és δt mennyiségekkel való osztás után a

$$c(x, y)\varrho(x, y)\partial_t u(x, y, t) - \operatorname{div}\big(k(x, y)\operatorname{grad}(u(x, y, t))\big) = F(x, y, t)$$

egyenletet nyerjük, amely a *kétdimenziós hővezetés egyenlete inhomogén közeg esetén*, forrástag jelenléte mellett. Ha c, ϱ, k állandók, akkor a

$$\partial_t u(x, y, t) - \frac{k}{c\varrho}\Delta u(x, y, t) = \frac{F(x, y, t)}{c\varrho},$$

kétdimenziós hővezetési egyenletet nyerjük, ahol

$$\Delta u(x,y,t) = \partial_x^2 u(x,y,t) + \partial_y^2 u(x,y,t)$$

a kétdimenziós *Laplace-operátor* (amelybe a t változót nem értjük bele). Hasonló módon nyerhető a háromdimenziós hővezetési egyenlet. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartományban elhelyezkedő *inhomogén közegben végbemenő háromdimenziós hővezetést forrástag esetén* az alábbi egyenlet írja le:

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \operatorname{div}\big(k(x)\operatorname{grad}(u(x,t)\big) = F(x,t).$$

Amennyiben c, ϱ, k állandó mennyiségek, akkor a

$$\partial_t u(x,t) - \frac{k}{c\varrho}\Delta u(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\varrho},$$

háromdimenziós hővezetési egyenletet nyerjük, ahol

$$\Delta u(x,t) := \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 u(x,t)$$

a háromdimenziós *Laplace-operátor* (amelybe a t változót nem értjük bele). Megemlítjük, hogy az előbbiek mintájára tetszőleges n pozitív egész esetén értelmezhető az n-dimenziós hővezetési egyenlet (közvetlen fizikai tartalom nélkül).

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk most meg, hogy az egydimenziós esetben ismertetett különböző mellékfeltételek hogyan adhatók meg az Ω korlátos tartományban végbemenő hővezetés esetében.

- *Kezdeti feltétel.* Megadjuk a rúd kezdeti hőmérséklet-eloszlását, azaz

  $$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

  ahol $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény.

- *Első peremfeltétel.* A tartomány peremének hőmérsékletét szabályozzuk, vagyis

  $$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

  ahol $\chi\colon \partial\Omega \times {\mathbb{R}^+}_0 \to \mathbb{R}$ adott függvény

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a (befelé vagy kifelé haladó) hőáramot, azaz

  $$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi \quad (t \geq 0),$$

  ahol $\chi\colon \partial\Omega \times {\mathbb{R}^+}_0 \to \mathbb{R}$ adott függvény.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe a közeggel, akkor

  $$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi$$

  alakú peremfeltételt adhatunk meg, ahol $\alpha, \beta, \chi\colon \partial\Omega \times {\mathbb{R}^+}_0 \to \mathbb{R}$ adott függvények.

A hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a kezdeti feltételt, valamint az első, második, harmadik peremfeltétel valamelyikét a *hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapjuk a

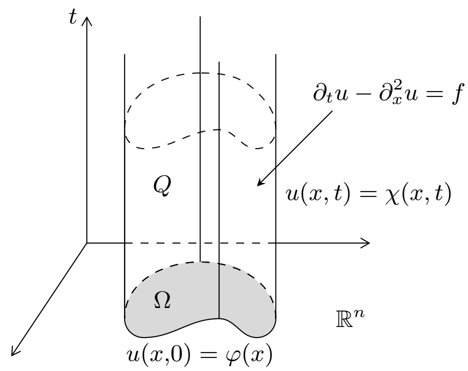
$$Q := \Omega \times \mathbb{R}^+$$

($(n+1)$-dimenziós) végtelen henger lezártján, lásd az 5.6. ábrát.
Amennyiben $\Omega = \mathbb{R}^n$, akkor nincs szükség peremfeltételre csak az $u(x,0) = \varphi(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltételre, ekkor a *hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy más néven *Cauchy-feladatról* beszélünk.
E feladatokat matematikailag akkor fogalmaztuk meg pontosan, ha megadjuk azt a teret is, amelyben a megoldásokat keressük. A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük például $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \times C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^1(Q) \times C(\overline{Q})$ megoldásait, amelyre $\partial_j^2 u \in C(Q)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Azt, hogy valójában mely terek választása esetén lesznek korrekt kitűzésűek a fenti feladatok, a későbbi fejezetekben vizsgáljuk meg.

5.3. *Megjegyzés.* A hővezetési egyenletet szokás *diffúziós egyenletnek* is nevezni, mert ugyanez az egyenlet írja le a *diffúzió* folyamatát. Ekkor $u(x,t)$ az anyag koncentrációját jelenti az x pontban és t időpillanatban. Ebben az esetben a levezetéskor Fourier törvénye helyett Fick törvényét kell alkalmaznunk a koncentráció változására, amely ugyanúgy szól, csak a hőmérséklet szót koncentrációra kell cserélnünk. A törvényt először Adolf Eugen Fick (1829–1901) német fizikus írta le, innen kapta a nevét.

5.2.3. Stacionárius hővezetés

A hővezetés folyamata során előfordulhat, hogy a hőmérséklet-eloszlás időben állandó, gondoljunk például arra, amikor a szoba hőmérséklete egy idő után nem változik. Ekkor *stacionárius hővezetésről* beszélünk. Mivel az u hőmérséklet időben konstans, ezért a hővezetés egyenletében $\partial_t u = 0$, így azt



5.6. ábra. Vegyes feladat n dimenzióban

kapjuk, hogy az u hőmérséklet-eloszlás, amely időtől független, kielégíti az alábbi egyenletet:

$$-\operatorname{div}\big(k(x,y)\operatorname{grad} u(x,y)\big) = F(x,y) \quad ((x,y) \in \Omega).$$

Ebből $k = 1$ állandó esetén a

$$-\Delta u = F$$

n-dimenziós Poisson-egyenletet nyerjük. (Számos könyvben a negatív előjeltől eltekintenek, mi azonban lényegesnek érezzük, többek között a fizikai tartalom miatt is.) Amennyiben $F = 0$, vagyis a tartományban nincsenek források és nyelők, akkor $k = 1$ esetén *Laplace-egyenletről* beszélünk:

$$-\Delta u = 0.$$

(Világos, hogy a mínusz előjelnek a Laplace-egyenlet esetében nincs jelentősége, azonban fontos szerepet töltenek be azok a függvények, amelyekre a Laplace-egyenletet egyenlőség helyett egyenlőtlenséggel teljesítik, és ekkor a negatív előjel már számít.)

Mellékfeltételek

Az Ω korlátos tartománybeli stacionárius hővezetés esetében a hőmérséklet egyértelmű leírásához nincs szükség kezdeti feltételre, csak a három peremfeltétel valamelyikére.

- *Első peremfeltétel.* A tartomány peremének hőmérsékletét állandó hőmérsékleten tartjuk, vagyis

$$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

ahol $\chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény

- *Második peremfeltétel.* Ha a peremen hőáramlás megy végbe, akkor megadhatjuk a (befelé vagy kifelé haladó) hőáramot, azaz

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

ahol $\chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ adott függvény.

- *Harmadik peremfeltétel.* Ha a peremen hőcsere megy végbe a közeggel, akkor

$$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi$$

alakú peremfeltételt adhatunk meg, ahol $\alpha, \beta, \chi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ adott függvények.

A stacionárius hővezetés (homogén vagy inhomogén) egyenletéhez hozzávéve a peremfeltételek valamelyikét, a Poisson-egyenletre vonatkozó Dirichlet-, Neumann- vagy Robin-feladatokat nyerjük.
E feladatokat matematikailag akkor fogalmaztuk meg pontosan, ha megadjuk azt a teret is, amelyben a megoldásokat keressük. A Dirichlet-feladat megoldásait például kereshetjük a $C^2(\overline{\Omega})$, vagy $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ terekben. Azt, hogy ezek közül mely terek választása esetén lesznek korrekt kitűzésűek a fenti feladatok, a későbbi fejezetekben vizsgáljuk meg.

5.4. *Történeti megjegyzés.* A Laplace-operátort először Pierre-Simon Laplace (1749–1827) francia matematikus és fizikus vezette le (méghozzá polárkoordinátás alakban) a csillagászati vizsgálódásai során. A Δ jelölést Robert Murphy (1806–1843) angol matematikus és fizikus használta először 1833-ban, a Laplace-operátor elnevezést pedig James Clerk Maxwell (1831–1879) a híres 1873-as Értekezés az elektromosságról és mágnességről című művében (lásd [54]). Laplace tanítványa, Siméon-Denis Poisson (1781–1840) az elektromosságtani vizsgálódásai során a $\Delta u = f$ egyenletet írta fel, ezt az ő tiszteletére nevezzük Poisson-egyenletnek.

5.2.4. A hővezetési egyenlet Einstein-féle levezetése

A hővezetési vagy diffúziós egyenlet egy másik igen fontos folyamat, a Brown-mozgás leírásában is felbukkan. Robert Brown (1773–1858) skót botanikus figyelte meg először a vízben lebegő mikroszkopikus virágporszemcsék szabálytalan, véletlenszerű mozgását 1827-ben. Albert Einstein (1879–1955) 1905-ben egy valószínűségi modellel, a részecskék véletlenszerű ide-oda „lökdösődésével” magyarázta meg a jelenséget. Az alábbiakban röviden ismertetjük Einstein gondolatmenetét (lásd [19]).
Tegyük fel, hogy a folyadékban lévő részecskék sűrűségfüggvénye $\varrho(x,t)$, ahol $x \in \mathbb{R}$ az egyszerűség kedvéért. Egy adott részecske elmozdulása kicsiny δt idő

alatt legyen ε, amelynek valószínűségi sűrűségfüggvénye $\varphi(\varepsilon)$. A φ függvény két természetes feltételnek tegyen eleget:

- φ páros függvény, azaz a részecske azonos valószínűséggel tér ki a két irány bármelyikébe,
- φ gyorsan lecsengő függvény, vagyis a részecske kitérése kis valószínűséggel lesz nagy.

Írjuk most fel a ϱ sűrűségfüggvényt a $t + \delta t$ időpillanatban! Világos, hogy az x pontban ekkor azok a részecskék lehetnek, amelyek t időpillanatban az $x - \varepsilon$ pontban voltak és δt idő alatt ε volt az elmozdulásuk, így

$$\varrho(x, t + \delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x - \varepsilon, t)\varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Felhasználva, hogy

$$\varrho(x - \varepsilon, t) = \varrho(x, t) - \varepsilon\partial_x \varrho(x, t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 \varrho(x, t) + o(\varepsilon^2),$$

ekkor

$$\varrho(x, t + \delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varrho(x, t) - \varepsilon\partial_x \varrho(x, t) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \partial_x^2 \varrho(x, t) + o(\varepsilon^2)\right) \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Most alkalmazzuk, hogy φ valószínűségi sűrűségfüggvény, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 1,$$

ezenkívül φ páros függvény, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\varphi(\varepsilon) d\varepsilon = 0,$$

továbbá φ gyors lecsengése folytán $n \geq 3$ esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \varphi(\varepsilon) d\varepsilon \approx 0,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\varrho(x, t + \delta t) = \varrho(x, t) + \delta t D \partial_x^2 \varrho(x, t) \frac{1}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Ebből δt-vel való osztás és $\delta t \to 0$ határátmenet után a

$$\partial_t \varrho = D\partial_x^2 \varrho$$

egyenletet nyerjük, ahol ahol

$$D := \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{2\delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Láthatjuk tehát, hogy a részecskék sűrűségfüggvénye kielégíti az egydimenziós hővezetési egyenletet. Természetesen a fenti levezetés heurisztikus, azonban a mai modern sztochasztikus folyamatok elméletének kiindulópontja.

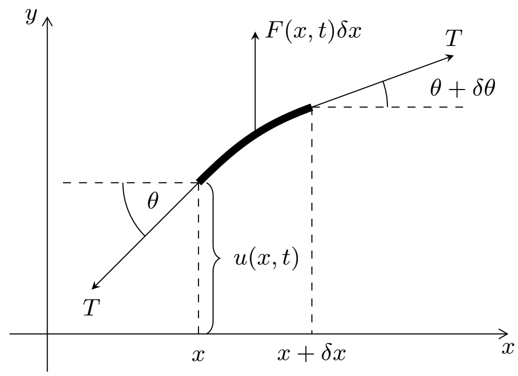
5.5. *Történeti megjegyzés.* Az 1905-ös év volt Einstein számára az *Annus Mirabilis* („csodák éve"), ugyanis ekkor születtek a Brown-mozgással, a fényelektromos hatással és a speciális relativitáselmélettel, és a tömeg-energia ekvivalenciával ($E = mc^2$) kapcsolatos eredményei. A fényelektromos hatás magyarázatáért Einstein 1921-ben megkapta a Nobel-díjat.

5.3. A hullámmozgás matematikai leírása

A hővezetés mellett egy másik, mindenki által jól ismert fizikai folyamat a hullámmozgás. Gondoljunk például egy kötélen végighaladó hullámra, vagy a megpengetett gitárhúr, vagy a dob membránja által keltett hangra, vagy a fényre, amelynek ugyancsak van hullám természete. Az alábbiakban a hullámmozgás egy- és többdimenziós matematikai leírását adjuk meg.

5.3.1. Az egydimenziós hullámegyenlet

Képzeljük el, hogy adott egy megfeszített húr vagy kötél, amelynek két végét egy-egy gyerek fel-le mozgatja, és kíváncsiak vagyunk ekkor, hogy milyen alakot vesz fel a mozgatás közben a húr. Ehhez szükségünk van néhány feltételezésre. Tegyük fel, hogy a húr csak kis kitéréseket végez a függőleges síkban, és a húr hosszának változása elhanyagolható, ezáltal a húrban állandó T nagyságú érintőirányú feszítő erő ébred. Jellemezzük a húr pontjait az $x \in \mathbb{R}$ koordinátával, és jelölje μ a húr (konstans) lineáris sűrűségét (ami azt jelenti, hogy tetszőleges ℓ hosszú húrdarab tömege $\mu\ell$). Legyen $u(x,t)$ a húr x koordinátájú pontjának az y tengely irányú (előjeles) kitérése a t időpillanatban (feltételeztük, hogy csak függőleges kitérése van minden pontnak). Végül tegyük fel, hogy a húrra $F(x,t)$ sűrűségű y tengely irányú külső erő hat, ami ismét azt jelenti, hogy tetszőleges végtelen kicsiny $[x, \delta x]$ húrdarabra $F\delta x$ nagyságú erő hat.
Tekintsük a húr x és $x + \delta x$ pontjai közötti δx hosszúságú végtelen kicsiny darabját, és tegyük fel, hogy az x végpontban az érintő θ szöget zár be az x tengellyel, míg az $x + \delta x$ pontban az érintő szöge $\theta + \delta\theta$ (lásd az 5.7. ábrát). Ekkor a húrdarabra ható erők függőleges komponenseire felírva Newton



5.7. ábra. Húrdarabra ható erők

második törvényét

$$T\sin(\theta+\delta\theta) - T\sin\theta + F(x,t)\delta x = (\mu\delta x)a_y, \tag{5.2}$$

ahol a_y a húrdarab y tengely irányú gyorsulása, amely a húrdarab infinitezimális hossza miatt közelítőleg $\partial_t^2 u(x,t)$. Másrészt, a húr csak kis kitéréseket végez, ezért $\delta\theta$ kicsiny szög, így alkalmazhatók a $\sin(\delta\theta) \approx \delta\theta$, $\cos(\delta\theta) \approx 1$ és

$$\sin(\theta+\delta\theta) = \sin\theta\cos(\delta\theta) + \cos\theta\sin(\delta\theta) \approx \sin\theta + \delta\theta$$

közelítések, amelyekkel az (5.2) egyenlet a következőképpen alakul:

$$T\delta\theta + F(x,t)\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u(x,t). \tag{5.3}$$

Vegyük még észre, hogy θ az érintő szöge, ezért $\operatorname{tg}\theta = \partial_x u$, amit x szerint deriválva az összetett függvény deriválása alapján $(1/\cos^2\theta)\partial_x\theta = \partial_x^2 u$ adódik. Ebből ismét a $\cos(\delta\theta) \approx 1$ közelítést használva, illetve a $\partial_x\theta$ deriváltat a $\delta\theta/\delta x$ különbségi hányadossal helyettesítve azt kapjuk, hogy $\delta\theta \approx (\partial_x^2 u)\delta x$. Ezzel az (5.3) egyenlet

$$(T\delta x)\partial_x^2 u + F\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u$$

alakot ölti, ahonnan rendezéssel

$$\partial_t^2 u - \frac{T}{\mu}\partial_x^2 u = \frac{F}{\mu} \tag{5.4}$$

adódik. Az (5.4) egyenletet *egydimenziós hullámegyenletnek* hívjuk, amelyet a *transzverzálisan rezgő húr* kis kitérései elégítenek ki. Ha $F = 0$, vagyis nem hat külső erő a húrra, akkor *szabad rezgésről* és *homogén egyenletről*, $F \neq 0$ esetén pedig *kényszerrezgésről* és *inhomogén egyenletről* beszélünk. Hasonló egyenlet írja le például egy vékony rúd, vagy a levegőoszlop hosszirányú (longitudinális) rezgéseit (gondoljunk például egy orgonasíp hangjára), ekkor $u(x, t)$ az x pont hosszirányú kitérését jelöli.

5.6. *Történeti megjegyzés.* Az egydimenziós hullámegyenletet először Brook Taylor (1685–1731) angol matematikus írta fel a mechanika törvényei alapján. Taylor lényegében a következőképpen érvelt, amikor felírta a hullámegyenletet. Az egyensúlyi helyzetéből kitérített húr igyekszik „kiegyenesedni”, és az így létrejövő visszatérítő erő a húr görbületével arányos (minél jobban kitérítettük, annál jobban ki akar egyenesedni). A görbület a húr alakját leíró $u(x, t)$ függvény (x szerinti) második deriváltjának konstansszorosa, így Newton második törvényéből kapjuk, hogy $\partial_t^2 u = a\partial_x^2 u$, ahol a alkalmas konstans. A Taylor-formula is Brook Taylorról van elnevezve, noha azt már James Gregory (1638–1675) skót matematikus korábban is ismerte.

Mellékfeltételek

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételekre van szükség a húr mozgásának egyértelmű leírásához! Fizikai szempontból világos, hogy szükség van kezdeti és peremfeltételekre egyaránt. Ezek a következők lehetnek.

- *Kezdeti feltételek.* A húr mozgásának leírásához ismernünk kell a húr *kezdeti alakját*, azaz

  $$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in [0, L]),$$

  továbbá a húr *kezdeti sebességeloszlását* is, vagyis

  $$\partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in [0, L]).$$

  E feltételeket *kezdeti feltételeknek* hívjuk.

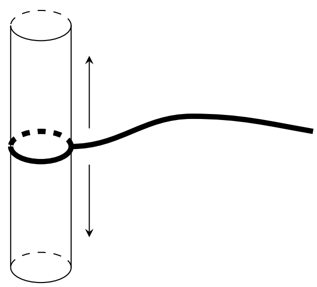
- *Peremfeltétel adott módon mozgó végek esetén.* Ha a húr végei adott módon mozognak, akkor

  $$u(0, t) = \chi_1(t), \quad u(L, t) = \chi_2(t) \quad (t \geq 0)$$

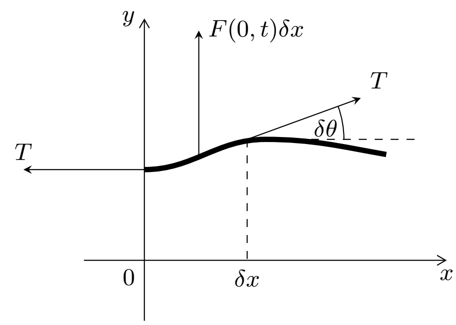
  alakú *első peremfeltételt*, más néven *Dirichlet-féle peremfeltételt* adhatunk meg. Ha a húr végei rögzítettek, akkor speciálisan a homogén

  $$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

  peremfeltételt írhatjuk elő.



5.8. ábra. Szabadon mozgó végű húr



5.9. ábra. Végpontra ható erők

- *Peremfeltétel szabad végek esetén.* Tegyük fel, hogy a húr végei szabadon mozoghatnak, de a húr továbbra is meg van feszítve. Ezt például úgy képzelhetjük el, hogy a húr végére egy (elhanyagolható tömegű) gyűrűt erősítünk, amely egy függőleges hengeren fel-le mozoghat súrlódásmentesen (lásd az 5.8. ábrát.) Ekkor a végpontokban a feszítőerő párhuzamos az x tengellyel (különben a feszítőerő függőleges komponense gyorsulást adna a húr végének), így a $[0, \delta x]$ szakaszra ható erők függőleges komponenseinek összege (lásd az 5.9. ábrát)

$$T \sin \delta\theta + F(0,t)\delta x,$$

és mivel $\delta\theta$ kicsiny szög, ezért alkalmazható a $\sin \delta\theta \approx \operatorname{tg} \delta\theta = \partial_x u(\delta x, t)$ közelítés. Ebből következően Newton második törvénye alapján

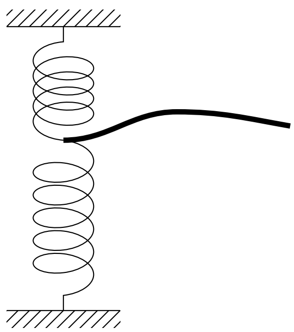
$$T\partial_x u(\delta x, t) + F(0,t)\delta x = (\mu\delta x)\partial_t^2 u(0,x).$$

Itt a δx mennyiséggel 0-hoz tartva $\partial_x u(0,t) = 0$ adódik. Az $x = L$ szabad végpont esetén hasonló módon a $-\partial_x u(L,t) = 0$ feltételt nyerhetjük, vagyis mindkét végén szabad húr esetén

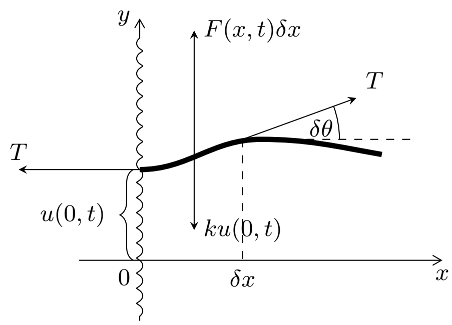
$$\partial_x u(0,t) = 0, \quad -\partial_x u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

alakú *második peremfeltételt*, más néven *Neumann-féle peremfeltételt* adhatunk meg.

- *Peremfeltétel rugalmasan rögzített végek esetén.* Képzeljük el, hogy a rúd végein a rögzítés Hooke törvénye alapján a kitéréssel arányos, azzal ellenkező irányú erővel hat (amit úgy képzelhetünk el, hogy a húr végét rugókhoz rögzítjük). Ekkor a szabad vég esetéhez képest az $x = 0$ végpontban megjelenik a $-ku(0,t)$ nagyságú erő is, így Newton második



5.10. ábra. Rugalmasan rögzített húr



5.11. ábra. Végpontra ható erők

törvénye szerint

$$T\partial_x u(\delta x, t) - ku(0,t) + F(0,t)\delta x = (\mu \delta x)\partial_t^2 u(0,x),$$

ahonnan $\delta x \to 0$ esetén $T\partial_x u(0,t) - ku(0,t) = 0$ adódik. Az $x = L$ végpontban hasonló módon a $-T\partial_x u(0,t) - ku(0,t) = 0$ feltételt nyerhetjük, vagyis mindkét végén rugalmasan rögzített húr esetén

$$\partial_x u(0,t) - \frac{k}{T}u(0,t) = 0, \quad -\partial_x u(L,t) - \frac{k}{T}u(L,t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

vagy általánosabban

$$\alpha_1 \partial_x u(0,t) + \beta_1 u(0,t) = \chi(t), \quad \alpha_2 \partial_x u(L,t) + \beta_2 u(L,t) = \chi_2(t) \quad (t \geq 0)$$

alakú *harmadik peremfeltételt*, más néven *Robin-féle peremfeltételt* írhatunk elő.

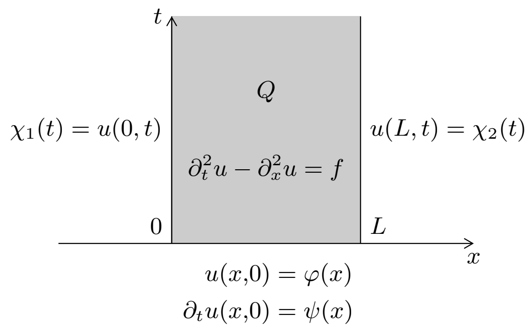
A hullámegyenlethez a kezdeti feltételeket és a peremfeltételek valamelyikét hozzávéve az *egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapunk a $Q := (0, L) \times \mathbb{R}^+$ végtelen téglalap (kétdimenziós henger) lezártján, lásd az 5.12. ábrát.

Gyakran előfordul, hogy a húr végpontjainak hatásaitól eltekinthetünk, más szóval a húr „végtelen” hosszú. Ekkor peremfeltétel megadására nincs szükség, csak az

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kezdeti feltételekre. Ilyenkor a *hullámegyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatról* vagy *Cauchy-feladatról* beszélünk.

A mellékfeltételekkel nyert különböző feladatok matematikailag csak akkor vannak pontosan megfogalmazva, ha azt is megadjuk, hogy milyen térben

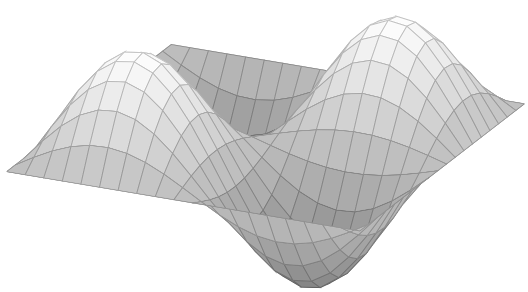


5.12. ábra. Hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladat

keressük a megoldásokat. Például az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük a Q hengeren $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \times C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^2(Q) \times C(\overline{Q})$ megoldását, amelyre $\partial_t u \in C(\overline{Q})$.

5.3.2. Hullámegyenlet két és magasabb dimenzióban

A kétdimenziós hullámegyenlet levezetéséhez képzeljük el, hogy adott egy vékony homogén lemez vagy membrán (például dob membránja), amely a hajlítással szemben nem, hanem csak a feszítéssel szemben fejt ki ellenállást. Rezegtessük meg a membránt, és vizsgáljuk meg az egyes pontjainak az egyensúlyi helyzettől való függőleges kitérését (lásd az 5.13. ábrát)!



5.13. ábra. Membrán rezgései

Jellemezzük ennek érdekében a membrán pontjait az (x, y) koordinátákkal, és tegyük fel, hogy $u(x, y, t)$ jelöli az (x, y) koordinátájú pont függőleges kitérését a t időpillanatban. Jelölje továbbá S a membrán felületi feszültségét, ami azt jelenti, hogy tetszőleges egység hosszúságú szakaszra S nagyságú, a szakaszra merőleges feszítő erő hat. Tekintsük most a felület egy kicsiny négyzettartományát, amelynek oldalai δx és δy nagyságúak és a tengelyekkel párhuzamosak. Ekkor az xz síkban ható erők nagysága $S\delta y$, az yz síkban pedig $S\delta x$ (lásd az 5.14. ábrát). Tekintsük a membrándarab xz síkkal párhuzamos metszetét (lásd az 5.15. ábrát), ezáltal az egydimenziós esetet nyerjük vissza, így e síkban $S\delta y\delta\theta_x$ nagyságú erő hat. Hasonlóan, az yz síkban a függőleges erő nagysága $S\delta x\delta\theta_y$. Jelölje σ a membrán egységnyi területre vonatkoztatott tömegét, ekkor felírhatjuk Newton második törvényét a négyzettartományra:

$$S\delta y\delta\theta_x + S\delta x\delta\theta_y = \sigma\delta x\delta y\partial_t^2 u.$$

Figyelembe véve, hogy $\delta\theta_x \approx \partial_x^2 u\delta x$ és $\delta\theta_y \approx \partial_y^2 u\delta y$, azt kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 u - \frac{S}{\sigma}\left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u\right) = 0.$$

A fenti egyenletet *kétdimenziós hullámegyenletnek* nevezzük, amely a membrán transzverzális rezgéseit írja le.
Háromdimenziós esetben a *hullámegyenlet* alakja

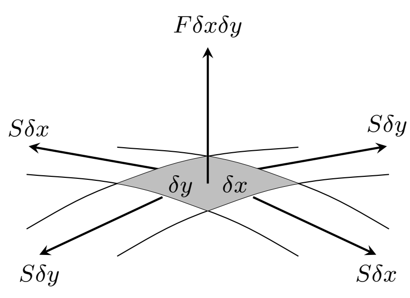
$$\partial_t^2 u - a^2(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \partial_z^2 u) = f,$$

amely például a hang terjedését írja le gázban.
Általában a

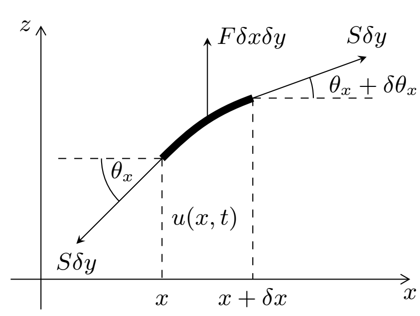
$$\partial_t^2 u - a^2\Delta u = f,$$

egyenletet *n-dimenziós hullámegyenletnek* nevezzük, ahol

$$\Delta u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x,t)$$



5.14. ábra. Membrándarabra ható erők



5.15. ábra. Membrán metszete

a *Laplace-operátor*.
Vegyük észre, hogy a hullámmozgás stacionárius eseteként, vagyis amikor a membrán alakja állandó, a Laplace-, illetve Poisson-egyenletet nyerjük.

Mellékfeltételek

Az egydimenziós eset mintájára röviden tekintsük át, hogyan néznek ki a mellékfeltételek az n-dimenziós hullámegyenlet esetében.
Szükség van két *kezdeti feltételre*,

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

továbbá

$$\partial_t u(x,0) = \psi(x) \quad (x \in \overline{\Omega}).$$

Ezenkívül szükséges a három *peremfeltétel* valamelyikének megadása is. Lehet *Dirichlet-féle peremfeltétel*,

$$u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

vagy *Neumann-peremfeltétel*,

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

vagy *harmadik peremfeltétel*,

$$\alpha(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} + \beta u|_{\partial\Omega} = \chi,$$

ahol $\alpha, \beta, \chi \colon \partial\Omega \times \mathbb{R}^+{}_0 \to \mathbb{R}$ adott függvények. A hullámegyenlethez a kezdeti feltételeket és a peremfeltételek valamelyikét hozzávéve az *n-dimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatot* kapunk a $Q := \Omega \times \mathbb{R}^+$ végtelen henger lezártján.
A mellékfeltételekkel nyert különböző feladatok matematikailag csak akkor vannak pontosan megfogalmazva, ha azt is megadjuk, hogy milyen térben keressük a megoldásokat. Például az n-dimenziós hullámegyenletre vonatkozó vegyes feladatnak első peremfeltétel esetén kereshetjük $u \in C^2(\overline{Q})$, vagy akár $u \in C^2(Q) \times C^1(\overline{Q})$ megoldásait, vagy esetleg olyan $u \in C^2(Q) \times C(\overline{Q})$ megoldását, amelyre $\partial_t u \in C(\overline{Q})$.

5.4. További példák

Számtalan egyéb fizikai folyamatot írhatunk le parciális differenciálegyenletek segítségével, ezek közül megemlítünk néhányat.

5.4.1. Lineáris egyenletek

- Transzportegyenlet:
$$\partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = 0,$$
amely a $v \in \mathbb{R}^n$ sebességgel áramló folyadékban lévő oldott anyag $u(x,t)$ koncentrációját írja le.

- Tricomi-egyenlet:
$$y\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2),$$
amely a gázdinamikában fordul elő hangsebesség körüli áramlások kapcsán, az $y < 0$ eset a hangsebesség alatti, az $y > 0$ a hangsebesség feletti mozgásnak felel meg. Az egyenlet Francesco Giacomo Tricomi (1897–1978) olasz matematikusról kapta a nevét.

- Schrödinger-egyenlet:
$$\mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = 0,$$
amely a kvantummechanika mozgásegyenletének tekinthető. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) osztrák fizikus a kvantummechanika egyik kiváló tudósa, aki 1933-ban Nobel-díjat kapott.

- Telegráf egyenlet:
$$\partial_t^2 u + d\partial_t u - \partial_x^2 u = 0,$$
amely egy áramkörben az u feszültséget írja le.

- Biharmonikus egyenlet:
$$\Delta^2 u = 0,$$
amely számos rugalmasságtani probléma leírására szolgál (lemezek elhajlása, deformációja). A rugalmasságtan matematikai egyenleteit először Marie-Sophie Germain (1776–1831) francia matematikusnő írta fel, aki ezirányú munkáiról talán kevésbé ismert (mint inkább számelméleti eredményeiről).

5.7. *Történeti megjegyzés.* A rezgő lemezek elmélete Ernst Chladni (1756–1827) német fizikus klasszikus 1789-es kísérletéig nyúlik vissza. A kísérletben Chladni üveglemezre szórt homokot hozott rezgésbe egy hegedűvonóval, és ezáltal a lemezen (a frekvenciától és a rögzítéstől függő) mintázatok alakultak ki. A kísérletet Chladni 1809-ben megismételte Napóleonnak, akire ez olyan hatással volt, hogy felajánlott egy 1 kilós aranyérmet annak, aki elméletileg megmagyarázza a kísérlet eredményét. Az Akadémia 1809-ben írta ki a felhívást, amelyre egyedül Germain nyújtott be pályázatot, kétszer is, 1811-ben és 1813-ban (akkor ráadásul névtelenül), de eredményeit fizikai elvekkel nem tudta megindokolni, ezért csak dicséretben részesült. A versenyt meghosszabbították, közben Siméon-Denis Poisson (1781–1840) írt több cikket is írt témában (például 1812-ben a róla elnevezett Poisson-formulát is ekkor írta le), de ő akadémiai tagsága miatt nem pályázhatott, helyette a bírálók között volt (többek között Lagrange mellett). Germain a cikkeket elolvasva egy újabb pályázatot nyújtott be 1816-ban, Poisson módszerét bírálva, a sajátját javasolva helyette. A díjat Germainnek ítélték, amely számára óriási elismerést jelentett. Germain írta fel. Megjegyezzük, hogy Germain autodidakta matematikus volt. 13 éves korában apja könyvtárában Arkhimédeszről olvasott, és ez annyira felkeltett érdeklődését, hogy önállóan latinul és görögül kezdett tanulni, és így később Newton és Euler munkáit olvasta.

5.4.2. Nemlineáris egyenletek

- Porózus közeg egyenlete:

$$\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0,$$

  amely porózus (lyukacsos) közegbeli diffúziót ír le, ahol u valamilyen sűrűségfüggvény és $\gamma > 1$. A porózus közeg egyenlete, a hővezetés (vagy diffúzió) egyenletével szemben, véges sebességű hatásterjedést ír le, ezért néha a hővezetés egyenleténél reálisabb modellnek tekinthető.

- Burgers-egyenlet:

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0,$$

  ahol u folyadék vagy gáz sebességét jelenti. A Burgers-egyenlet a folyadékmechanika fontos egyenlete, többek között gázok vagy közlekedés dinamikájának modellezésére is használják. Nevét Johannes Martinus Burgers (1895–1981) holland fizikusról kapta, aki először vizsgálta az egyenletet.

- Korteweg–de Vries-egyenlet:

$$\partial_t u + u\partial_x u - 6\partial_x^3 u = 0,$$

  amely sekély vízi hullámok terjedését írja le. Az egyenlet először Diederik Johannes Korteweg (1848–1941) és Gustav de Vries (1866–1934) holland matematikusok tanulmányozták, innen kapta a nevét.

- Eikonal egyenlet:

$$|\operatorname{grad} u| = 1,$$

  ahol $u(x)$ az a minimális idő, amely idő alatt a fény egy Ω tartomány határától az x pontig eljut. Az eikonal elnevezés a görög *ikon* (kép) szóból származik.

- p-Laplace-egyenlet:

$$\operatorname{div}\big(|\operatorname{grad} u|^{p-2} \operatorname{grad} u\big) = 0,$$

amely például nemlineáris rugalmasságtanban, illetve nem-newtoni áramlásokban fordul elő.

5.4.3. Egyenletrendszerek

Az egyenletek mellett számos folyamat parciális differenciálegyenlet-rendszerek segítségével modellezhető. Ezek közül két nevezetes rendszert említünk meg az alábbiakban.

- Maxwell-egyenletek, az elektrodinamika alapegyenletei:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \tag{5.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t B, \tag{5.7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t E, \tag{5.8}$$

ahol **E** az elektromos térerősség, **B** a mágneses indukció, **J** az áramsűrűség, ε_0 az elektromos permittivitás és μ_0 a mágneses permeabilitás, valamint $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ az úgynevezett „nablavektor”. Az egyenleteket így egyben először James Clerk Maxwell (1831–1879) a híres 1873-es *Értekezés az elektromosságról és mágnességről* című művében írta fel még kissé bonyolultabb módon: Maxwell 20 egyenletet írt fel és a nablavektorban kvaterniókat is használt. Az egyenletek mai alakjukat Oliver Heaviside (1850–1925) angol mérnök, matematikus és fizikus munkái nyomán érték el, aki számos egyszerűsítést hajtott végre.

Az (5.5) és (5.6) egyenletek Gauss-törvényei, amelyek azt fejezik ki, hogy az elektromos mező forrásai a töltések, a mágneses térnek nincsenek forrásai. Az (5.7) egyenlet Faraday-törvénye, az (5.8) egyenlet pedig Ampère törvénye, amely az elektromos mező által létrehozott mágneses tér rotációjáról szól. Tegyük fel, hogy $\varrho = 0$ és $\mathbf{J} = 0$ (például vákuumban), és vegyük ekkor az (5.6) és (5.8) egyenletek rotációját. Ekkor

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\partial_t \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{E},$$

valamint

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{B}.$$

Most használjuk fel, hogy

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \Delta \mathbf{V}, \tag{5.9}$$

így

$$\partial_t^2 \mathbf{E} - c_0^2 \Delta \mathbf{E} = 0, \tag{5.10}$$
$$\partial_t^2 \mathbf{B} - c_0^2 \Delta \mathbf{B} = 0, \tag{5.11}$$

ahol $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2{,}9979 \cdot 10^8 m/s$ a fénysebesség. Az (5.10) és (5.11) egyenletek hullámegyenletek, amelyeket *elektromágneses hullámegyenleteknek* szokás hívni. Ez mutatja például, hogy a fény hullámtermészetű.

- Navier–Stokes-egyenletek, amelyek a folyadékáramlást írják le. Egyszerűsített alakjuk a következő:

$$\varrho \partial_t \mathbf{u} + \varrho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} = -\nabla p + \mathbf{F},$$
$$\nabla \mathbf{u} = 0,$$

ahol $\mathbf{u}$ a folyadék sebessége, ϱ a sűrűsége, p a nyomás, $\mathbf{F}$ pedig a folyadékra ható erő. Claude-Louis Navier (1785–1836) francia hídépítő mérnök 1822-ben, később pedig Sir George Gabriel Stokes (1819–1903) ír matematikus 1842-ben írt le az egyenletek első formáját, innen kapta a nevét. Az egyenletek matematikai megértése, a megoldások létezésével és tulajdonságaival kapcsolatos kérdések egy része máig megoldatlan. A probléma szerepel a Clay Intézet által kitűzött Millenniumi Problémák között, amelyek bármelyikének megoldásáért 1 millió dollár jár.

Számos egyéb fizikai példa és levezetés található a [94, 95] könyvekben.

5.5. Feladatok

5.1. Tegyük fel, hogy egy folyadék $v \in \mathbb{R}^3$ sebességgel áramlik. Legyen a folyadék sűrűsége $\varrho(x,t)$ és a folyadékban lévő források intenzitása $f(x,t)$. Mutassuk meg, hogy ekkor érvényes az úgynevezett *kontinuitási egyenlet*:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = f(x,t).$$

5.2. Mutassuk meg, hogy $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$ egyenlet $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldásai az $x - y = c$ egyenletű egyenesek mentén állandók! Adjuk meg ennek alapján a megoldások általános alakját!

5.3. Adjuk meg a $\partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0)$ transzportegyenlet $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ megoldásainak általános alakját, ahol $v \in \mathbb{R}^n$.

5.4. Határozzuk meg a transzportegyenletre vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladat $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ megoldását, ahol $v \in \mathbb{R}^n, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = 0 \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ \qquad\qquad u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

5.5. Határozzuk meg a transzportegyenletre vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladat $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ megoldását, ahol $v \in \mathbb{R}^n, f \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ +_0), g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u = f \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ \qquad\qquad u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

5.6. Adjuk meg a transzportegyenletre vonatkozó alábbi kezdetiérték-feladat $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ megoldását, ahol $v \in \mathbb{R}^n, g \in C^1(\mathbb{R}^n), c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \operatorname{grad} u + cu = 0 \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ \qquad\qquad u(x,0) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

5.7. Mutassuk meg, hogy az

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} \left(b - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \beta \frac{|x|^2}{t^{2\beta}} \right)^{+\frac{1}{\gamma-1}} \qquad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

függvények, ahol a kitevőben a + jel a függvény pozitív részét jelenti (ami 0, ha $u < 0$ és u különben), továbbá

$$\alpha = \frac{n}{n(\gamma - 1) + 2}, \quad \beta = \frac{1}{n(\gamma - 1) + 2},$$

a porózus közeg egyenletének megoldása. (Ezeket a függvényeket szokás Barenblatt-megoldásoknak nevezni.)

5.8. Legyen Ω tetszőleges korlátos konvex tartomány $\mathbb{R}^n$-ben és jelölje $u(x)$ az $x \in \mathbb{R}^n$ pontnak az Ω peremétől vett távolságát. Mutassuk meg, hogy ekkor u kielégíti az eikonal egyenletet, azaz $|\operatorname{grad} u| = 1$.

5.9. Keressük meg a kétdimenziós eikonal egyenlet $u(x,y) = X(x) + Y(y)$ alakú megoldásait!

5.10. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B, C, D konstansok esetén az

$$u(x,y) = Axy + Bx + Cy + D$$

és

$$u(x,y) = A(3x^2 - x^3) + B(x^3 - xy^3) + C(6x^2y - y^4)$$

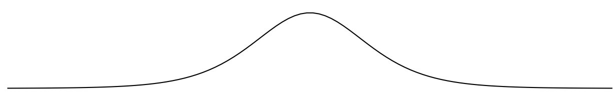
függvények kielégítik a Tricomi-egyenletet!

5.11. Tegyük fel, hogy az $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v(x,y) := xu(x,y)$ és $v(x,y) := (x^2+y^2)u(x,y)$ függvényekre $\Delta^2 v = 0$.

5.12. Mutassuk meg, hogy a Korteweg–de Vries-egyenletnek tetszőleges $\sigma > 0$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén megoldása az alábbi függvény:

$$u(x,t) = \frac{\sigma}{2}\operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x - \sigma t - c)\right),$$

ahol $\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh x$. (A fenti megoldás az úgynevezett *szoliton*, amely egy utazó hullám.)



5.16. ábra. Szoliton

5.13. Igazoljuk az (5.9) azonosságot!

6. fejezet

Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja

Nincs olyan tudomány, amely alkalmazott tudománynak hívható. Tudomány van és annak alkalmazásai, amelyek úgy kapcsolódnak össze, mint a fa a gyümölcsivel.

Louis Pasteur (1822–1895)

A fejezet tartalma. A másodrendű főrészükben lineáris és a másodrendű lineáris egyenleteket főrészük alapján osztályozzuk, ezt követően az állandó együtthatós esetben az egyenletek kanonikus (egyszerűbb) alakra való transzformációját tárgyaljuk.

6.1. Az egyenletek osztályozása

A különböző természeti folyamatok modelljei gyakran vezetnek másodrendű főrészükben lineáris, illetve másodrendű lineáris egyenletekre, amint ezt a korábban ismertetett fizikai példák is jól mutatják. A főrészükben lineáris másodrendű egyenletek általános alakja

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u = g \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u), \tag{6.1}$$

ahol $a_{jk} \colon \Omega \to \mathbb{R}$ és $g \colon \Omega \times G \to \mathbb{R}$, továbbá $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rögzített tartomány. A lineáris másodrendű egyenletek pedig

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u + cu = f \tag{6.2}$$

alakúak, ahol $a_{jk}, b_j, c, f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ adott függvények (amelyek simasági tulajdonságait a konkrét esetekben mondjuk meg). Amennyiben klasszikus, azaz $u \in C^2(\Omega)$ megoldást keresünk, akkor a Young-tétel miatt $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$ $(j, k = 1{,}2, \ldots, n)$, és így az együtthatók esetleges módosítása után feltehető, hogy $a_{jk} = a_{kj}$. A továbbiakban mindig ezzel a feltételezéssel élünk.
A másodrendű főrészükben lineáris és másodrendű lineáris egyenleteket a főrészük alapján osztályozzuk. Legyen $x_0 \in \Omega$ rögzített és jelölje $A(x_0)$ a (6.1), illetve (6.2)) egyenlet főrészének együtthatóiból képzett $n \times n$-es mátrixot:

$$A = A(x_0) := [a_{jk}(x_0)]_{j,k=1}^{n}.$$

Mivel $a_{jk}(x_0) = a_{kj}(x_0)$ $(j, k = 1{,}2, \ldots, n)$, ezért $A(x_0)$ szimmetrikus mátrix. A lineáris algebrából ismert főtengelytétel szerint egy valós szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós, és a megfelelő sajátvektorok páronként ortogonálisak (azaz merőlegesek). Az $A(x_0)$ mátrix sajátértékeinek előjele alapján különböző osztályba soroljuk az egyenleteket.

6.1. Definíció. Jelölje rendre n_+, n_-, n_0 az $A(x_0)$ valós szimmetrikus együtthatómátrix pozitív, negatív és 0 sajátértékeinek számát. A (6.1), illetve (6.2) egyenlet az x_0 pontban

- *elliptikus*, ha $n_+ = n$ vagy $n_- = n$ (azaz minden sajátérték azonos előjelű);
- *hiperbolikus*, ha $n_+ = 1$ és $n_- = n - 1$ vagy $n_+ = n - 1$ és $n_- = 1$ (azaz $n - 1$ sajátérték azonos előjelű és egy ettől különböző). Ha $n_0 = 0$ és $n_+ > 1, n_- > 1$, akkor szokás az egyenletet *ultrahiperbolikusnak* nevezni.
- *parabolikus*, ha $n_0 = 1$ és $n_+ = n - 1$ vagy $n_- = n - 1$ (azaz $n - 1$ sajátérték azonos előjelű és egy sajátérték 0). Amennyiben $n_0 > 0$, az egyenletet szokás *tágabb értelemben parabolikusnak* nevezni.

Azt mondjuk, hogy a (6.1), illetve (6.2) egyenlet az Ω tartományon *elliptikus, hiperbolikus, parabolikus*, ha a megfelelő feltétel az Ω tartomány minden pontjában teljesül.

6.2. *Megjegyzés.* Az ellipticitást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $A(x_0)$ együtthatómátrix definit. Ha minden sajátértéke pozitív, akkor pozitív definit, ami azt jelenti, hogy

$$\langle A(x_0)p, p\rangle \geq \min_{j=1,\ldots,n} \lambda_j(x_0)|p|^2 \quad \text{minden } p \in \mathbb{R}^n \text{ esetén.} \tag{6.3}$$

Egy mátrix pozitív definitsége ekvivalens azzal, hogy bal felső sarok aldeterminánsainak mindegyike pozitív. Negatív definit esetben a sarokaldeterminánsok váltakozó előjelűek. Természetesen (-1)-gyel való szorzással mindig elérhető, hogy egy elliptikus egyenlet együtthatómátrixa pozitív definit legyen. Ha a mátrixnak van 0 sajátértéke, akkor determinánsa 0, és ekkor az egyenlet tágabb értelemben parabolikus.

6.3. Példa. Az n-dimenziós Laplace-egyenlet (lásd az 5.2.3. szakaszt), azaz

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = 0,$$

minden pontban elliptikus, hiszen együtthatómátrixa az egységmátrix.
Az n-dimenziós hővezetési egyenlet (lásd az 5.2.2. szakaszt), azaz

$$\partial_t u - \Delta u = \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = 0,$$

valamint az n-dimenziós hullámegyenlet (lásd az 5.3.2. szakaszt), vagyis

$$\partial_t^2 u - \Delta u = \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u = 0,$$

(ahol t jelöli az $(n+1)$-edik változót, amelyet a Δ operátorba nem értünk bele), együtthatómátrixai rendre

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix},$$

így előbbi minden pontban hiperbolikus, utóbbi pedig parabolikus egyenlet.
Az

$$x^2 \partial_1^2 u(x,y) + 2xy \partial_1 \partial_2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet a $2xy\partial_1\partial_2 u = xy\partial_1\partial_2 u + xy\partial_2\partial_1 u$ azonosság felhasználásával az

$$x^2 \partial_1^2 u(x,y) + 2xy \partial_1 \partial_2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0$$

szimmetrikus alakba írható át, és így együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa x^2y^2. Ebből következően az egyenlet az x és y tengelyek kivételével az egész síkon elliptikus, a koordinátatengelyeken pedig az origó kivételével parabolikus.

Az elliptikus egyenletek egy fontos osztályát alkotják azon egyenletek, amelyek együtthatómátrixa a tartomány minden pontjában elliptikus, és a sajátértékeknek van (a tartomány pontjaitól független) pozitív alsó korlátja. Ekkor a (6.3) egyenlőtlenségben a sajátértékek minimuma helyett ezt az alsó korlátot vehetjük.

6.4. Definíció. A (6.1) és (6.2) egyenleteket az Ω tartományban *egyenletesen elliptikusnak* hívjuk, ha létezik $c_0 > 0$ szám, hogy

$$\langle A(x_0)p, p\rangle \geq c_0|p|^2 \quad \text{minden} \quad p \in \mathbb{R}^n \quad \text{és} \quad x_0 \in \Omega \quad \text{esetén.}$$

6.5. *Megjegyzés.* A későbbi fejezetekben gyakran célszerű lesz az elliptikus operátorokat

$$-\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u + cu$$

alakban írni. Ezeket egyenletesen elliptikusnak fogjuk nevezni abban az esetben, ha az (a_{jk}) együtthatókból képzett A mátrixra teljesül az egyenletes ellipticitás 6.4. Definícióban megfogalmazott feltétele.

6.6. Példa. Világos, hogy ha egy állandó együtthatós egyenlet a tartomány egy pontjában elliptikus, akkor a tartományon egyenletesen elliptikus.
Az

$$x\partial_1^2 u(x,y) + x\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in (0{,}1)^2)$$

egyenlet a $(0{,}1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ tartomány minden pontjában elliptikus, mert az $A(x,y)$ együtthatómátrix sajátértékei x, x. Az egyenlet azonban nem egyenletesen elliptikus a tartományon, hiszen $\langle A(x,y)p, p\rangle/|p|^2 = x$, ami tetszőlegesen kicsi lehet.

6.2. Az egyenletek kanonikus alakja

Megmutatjuk, hogy állandó együtthatós esetben a (6.1) alakú másodrendű, főrészükben lineáris egyenletek főrésze a három alapegyenlet, vagyis a Poisson, hullám- vagy hővezetési egyenlet főrészének valamelyikére transzformálhatók attól függően, hogy elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus-e az adott egyenlet a tartományon. Tekintsük először a másodrendű főrészében lineáris állandó együtthatós

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u = g \circ (\mathrm{id}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u) \tag{6.4}$$

egyenletet az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, ahol $a_{jk} \in \mathbb{R}$ és feltesszük, hogy $a_{jk} = a_{kj}$ $(j, k = 1{,}2, \ldots, n)$. A transzformáció lényegében azonos a lineáris algebrából jól ismert kvadratikus alakok négyzetösszegekké való alakításával.

Jelölje az A együtthatómátrix (amely most minden pontban ugyanaz) sajátértékeit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ és a hozzá tartozó ortonormált sajátvektorokat $s_1, \ldots, s_n$. Ekkor a lineáris algebra főtengelytétele szerint sajátvektorokból, mint oszlopvektorokból képzett $B = (s_1, \ldots, s_n)$ mátrix ortogonális, azaz $B^T = B^{-1}$, továbbá

$$B^T AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Legyen

$$D := \begin{pmatrix} d_{11} & & & \mathbf{0} \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad djj := \begin{cases} 1/\sqrt{|\lambda_j|}, & \text{ha } \lambda_j \neq 0, \\ 1, & \text{ha } \lambda_j = 0. \end{cases}$$

Ekkor a $C := BD$ mátrixra teljesül, hogy

$$C^T AC = (BD)^T A(BD) = D(B^T AB)D = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}\lambda_1 & & & \mathbf{0} \\ & \operatorname{sgn}\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \operatorname{sgn}\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Célszerű ezért bevezetni $x \in \Omega$ helyett az $y = C^T x$ új független változót, és u helyett a $v(y) = u(x)$ ismeretlen függvényt. Koordinátákkal kifejezve

$$y_p = \sum_{\ell=1}^{n} c_{\ell p} x_\ell \quad (p = 1, \ldots, n),$$

így a láncszabály alkalmazásával

$$\partial_j u(x) = \sum_{p=1}^{n} \partial_p v(y) \partial_j y_p = \sum_{p=1}^{n} \partial_p v(y) c_{jp} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{6.5}$$

amelyet ismét deriválva

$$\partial_j \partial_k u(x) = \sum_{p,q=1}^{n} \partial_p \partial_q v(y) c_{jp} c_{kq} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

Ezt a (6.4) egyenlet bal oldalába helyettesítve

$$\sum_{j,k=1}^{n} \partial_j \partial_k u(x) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \sum_{p,q=1}^{n} \partial_p \partial_q v(y) c_{jp} c_{kq} = \sum_{p,q=1}^{n} v(y) \sum_{j,k=1}^{n} c_{jp} a_{jk} c_{kq}.$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{j,k=1}^{n} c_{jp} a_{jk} c_{kq}$ nem más, mint a $C^T AC$ mátrix p-edik sorának q-adik eleme, vagyis $p = q$ esetén $\operatorname{sgn} \lambda_p$, különben pedig 0. Következésképpen a (6.4) egyenletet a v ismeretlen függvény bevezetésével az alábbi alakra transzformáltuk a $(C^T)^{-1}(\Omega)$ tartományban:

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_p) \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v). \tag{6.6}$$

A (6.6) egyenletet a (6.1) egyenlet *kanonikus alakjának nevezzük.*

6.7. *Megjegyzés.* Sok esetben célszerű az egyenletek bal oldalára, mint deriválás operátoraira gondolni. Az előbbi transzformáció valójában a következő operátoros alakban is írható. Vezessük be a $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ nabla operátort, amelyet sorvektornak tekintünk. Ekkor a (6.4) egyenlet bal oldala a

$$\nabla A \nabla^T u$$

alakba írható, másrészt pedig az

$$y = C^T x$$

koordinátatranszformációval kapott a (6.5) összefüggés az x és y változóban ható ∇_x és ∇_y operátorokkal kifejezve

$$\nabla_x = \nabla_y C^T,$$

vagyis az operátorok közötti áttérési mátrix éppen a koordinátatranszformáció áttérési mátrixának inverze. Következésképpen

$$\nabla_x A \nabla_x T = \nabla_y C^T A (\nabla_y C^T)^T = \nabla_y (C^T AC) \nabla_y^T,$$

ahol $C^T AC$ diagonális mátrix, amelynek főátlójában ± 1 számok állnak. Végül jegyezzük meg, hogy az $y = C^T x$ koordinátatranszformáció áttérési mátrixa $(C^T)^{-1} = BD^{-1}$, amelynek oszlopvektorai $\sqrt{|\lambda_1|} s_1, \ldots, \sqrt{|\lambda_n|} s_n$ ($\lambda_j = 0$ esetén a $\sqrt{|\lambda_j|}$ tényezővel nem szorzunk) az új bázisvektorok. Az előbbi operátoros felírás egy alkalmazását láthatjuk majd a 6.14. Példában.

6.8. Következmény. *A* (6.1) *egyenlet kanonikus alakja*

- *elliptikus* ($\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$) *esetben*

$$\sum_{p=1}^{n} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v),$$

  amelynek bal oldala éppen a Poisson-egyenlet bal oldala;

- *hiperbolikus* ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$) *esetben*

$$\partial_1^2 v - \sum_{p=1}^{n} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v),$$

  amelynek bal oldala az $(n-1)$*-dimenziós hullámegyenlet bal oldalának tekinthető, ha az első változót tekintjük az időnek (vagyis* t*-nek);*

- *parabolikus* ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$) *esetben*

$$\sum_{p=2}^{n} \partial_p^2 v = G \circ (\mathrm{id}, v, \partial_1 v, \ldots, \partial_n v),$$

  amelynek bal oldala az $(n-1)$*-dimenziós stacionárius hővezetési egyenlet bal oldalának tekinthető.*

Tegyük most fel, hogy az egyenletünk lineáris, állandó együtthatós:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \partial_j \partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j u + cu = f, \tag{6.7}$$

ahol $a_{jk}, b_j, c \in \mathbb{R}$ és $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$. Az egyenlet főrészének transzformációját az előbbiekben már ismertettük, ezért feltehető, hogy az egyenletünket egy alkalmas y független változó és $v(y) = u(x)$ ismeretlen függvény bevezetésével a következő alakra hoztuk:

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn} \lambda_p) \partial_p^2 v + \sum_{p=1}^{n} \beta_p \partial_p v + \gamma v = F.$$

Ismét egy új ismeretlen függvényt vezetünk be, amellyel próbáljuk elérni, hogy az elsőrendű és nulladrendű tagok együtthatói közül minél több nullával legyen egyenlő. Legyen

$$V(y) := v(y) \exp\left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell y_\ell \right),$$

ahol az α_ℓ paraméterek értékét később határozzuk meg. A láncszabály alkalmazásával

$$\partial_p v(y) = [\partial_p V(y) - \alpha_p V(y)] \exp\left(-\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell y_\ell\right),$$

illetve

$$\partial_p^2 v(y) = [\partial_p^2 V(y) - 2\alpha_p \partial_p V(y) + \alpha_p^2 V(y)] \exp\left(-\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell y_\ell\right).$$

Mindezeket a (6.7) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V(y) + \sum_{p=1}^{n} [\beta_p - 2\alpha_p(\operatorname{sgn}\lambda_p)]\partial_p V(Y) + \\ + \left[\gamma - \sum_{p=1}^{n} \beta_p\alpha_p + \sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn}\lambda_p)\alpha_p^2\right] V(y) = F(y) \exp\left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell y_\ell\right). \quad (6.8)$$

Ha valamely p esetén $\lambda_p \neq 0$, akkor $\alpha_p = \beta_p/(2 \operatorname{sgn}\lambda_p)$ választással a (6.8) egyenletben $\partial_p V$ együtthatója nullával egyenlő. Ezenkívül, ha van olyan p index, amelyre $\lambda_p = 0$, de $\beta_p \neq 0$, akkor V együtthatóját tehetjük nullává. Következésképpen az α_p paraméterek alkalmas megválasztása után a (6.7) egyenlet az alábbi alakok valamelyikére hozható:

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V + dV = G \quad (6.9)$$

vagy

$$\sum_{p=1}^{n} (\operatorname{sgn}\lambda_p)\partial_p^2 V + \sum_{\substack{p \\ \lambda_p = 0}} \beta_p \partial_p V = G. \quad (6.10)$$

A (6.9) és (6.10) egyenleteket a (6.7) egyenlet *kanonikus alakjának* nevezzük.

6.9. Következmény. *Az állandó együtthatós másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja*

- *elliptikus* ($\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$) *esetben*

$$\sum_{p=1}^{n} \partial_p^2 V + dV = G,$$

vagy rövidebben $\Delta V + dV = G$*;*

- *hiperbolikus* ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$) *esetben*

$$\partial_1^2 V - \sum_{p=2}^{n} \partial_p^2 V + dV = G,$$

amit rövidebben $\partial_t^2 V - \Delta V + dV = G$ *alakba is írhatunk, ha az első változót tekintjük az időnek (t-nek), amelyet a* Δ *operátorba nem értünk bele;*

- *parabolikus* ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$) *esetben*

$$\beta_1 \partial_1 V - \sum_{p=2}^{n} \partial_p^2 V = G,$$

A $\beta_1 = 0$ *eset érdektelen, hiszen ekkor egy* $(n-1)$*-dimenziós elliptikus egyenletet kapunk, amelyben az első változó csak paraméter. A* $\beta_1 \neq 0$ *esetben egy újabb koordinátatranszformációval, nevezetesen* $\tilde{y}_1 := \beta_1 y_1$ *helyettesítéssel elérhető, hogy* $\partial_1 V$ *együtthatója* 1 *legyen, így a kanonikus alak*

$$\partial_1 \tilde{V} - \sum_{p=2}^{n} \partial_p^2 \tilde{V} = \tilde{G},$$

ami a $\partial_t \tilde{V} - \Delta \tilde{V} = \tilde{G}$ *alakra egyszerűsödik, ha ismét az első változót tekintjük az időnek, amelyet a* Δ *operátorba nem értünk bele.*

6.10. Példa. Végezzük el a

$$4\partial_1\partial_2 u + 2\partial_2 u + u = x + y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

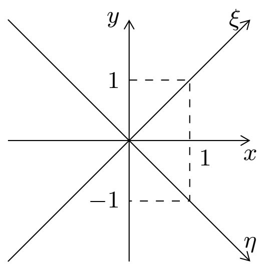
egyenlet kanonikus alakra való transzformációját! Az egyes változók megkülönböztetése érdekében célszerű áttérni a ∂_x és ∂_y jelölésekre:

$$4\partial_x\partial_y u + 2\partial_y u + u = x + y \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2). \tag{6.11}$$

Az egyenlet főrészének együtthatómátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

így a karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 - 4 = 0$, amelynek gyökei ± 2, a sajátértékek. Könnyen látható, hogy az $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorok ortonormált sajátvektorok. Szorozzuk mindkét sajátvektort a hozzá tartozó sajátérték abszolút értékének gyökével, és válasszuk az így kapott $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorokat az új



$$\left.\begin{aligned}\xi &= \frac{x+y}{2}\\ \eta &= \frac{x-y}{2}\end{aligned}\right\}$$

6.1. ábra. Koordinátatranszformáció

koordinátatengelyeknek (lásd a 6.1. ábrát), ekkor a transzformáció áttérési mátrixa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

amelyre

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján vezessük be a $(\xi, \eta) = S^{-1}(x, y)$ koordinátákat, azaz

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x+y}{2}, \\ \eta = \dfrac{x-y}{2}, \end{cases}$$

továbbá legyen $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ (valójában ennek a transzformációnak az inverzét hajtottuk végre a 4.10. Példában). Ekkor az új koordinátákra transzformált egyenlet főrészének együtthatómátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$(\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)) = (\partial_\xi v(\xi,\eta), \partial_\eta v(\xi,\eta)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) + \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta), \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi,\eta) - \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi,\eta) \right),$$

ami azt jelenti, hogy $\partial_y u = \frac{1}{2}\partial_\xi v - \frac{1}{2}\partial_\eta v$. Ezek alapján a kiindulási (6.11) egyenletünk a

$$\partial_\xi^2 v - \partial_\eta^2 v + \partial_\xi v - \partial_\eta v + v = 2\xi \tag{6.12}$$

alakot ölti. Hátra van még az alacsonyabb rendű tagok transzformációja. Vezessük be a $w(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\alpha\xi+\beta\eta}$ függvényt, vagyis $v(\xi,\eta)=w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}$, ahol az α,β konstansok értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}
\partial_\xi v(\xi,\eta) &= \partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \alpha w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\\
\partial_\xi^2 v(\xi,\eta) &= \partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - 2\alpha\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \alpha^2 w(\xi\,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},
\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}
\partial_\eta v(\xi,\eta) &= \partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \beta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta},\\
\partial_\eta^2 v(\xi,\eta) &= \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - 2\beta\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + \beta^2 w(\xi\,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta}.
\end{aligned}$$

Ezeket a (6.12) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}
&\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} - \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + (1-2\alpha)\partial_\xi w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} +\\
&+ (1-2\beta)\partial_\eta w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} + (1+\beta-\alpha-\beta^2+\alpha^2)w(\xi,\eta)e^{-\alpha\xi-\beta\eta} = 2\xi
\end{aligned}$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az $\alpha=\beta=1/2$ választás, hiszen ekkor az elsőrendű tagok kiesnek és a fenti egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} - \partial_\eta^2 w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} + w(\xi,\eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} = 2\xi$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a (6.11) egyenlet kanonikus alakja

$$\partial_\xi^2 w - \partial_\eta^2 w + w = 2\xi e^{\frac{1}{2}(\xi+\eta)} \quad ((\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2).$$

Egy másik példaként a 6.7. Megjegyzésben tárgyalt operátoros értelmezést alkalmazzuk másodrendű állandó együtthatós lineáris egyenletek megoldásainak meghatározására.

6.11. Példa. Határozzuk meg a

$$\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u - 3\partial_2^2 u = 0 \quad \mathbb{R}^2$$

másodrendű differenciálegyenlet $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját! Először is célszerű áttérni a

$$\partial_x^2 u - 2\partial_x\partial_y u - 3\partial_y^2 u = 0 \tag{6.13}$$

jelölésre, mert a későbbiekben koordinátatranszformációt fogunk végrehajtani. Vegyük észre, hogy a ∂_x és ∂_y operátorok segítségével a (6.13) egyenlet a

$$(\partial_x + \partial_y)(\partial_x - 3\partial_y)u = 0$$

alakba írható. Érdemes lenne tehát áttérni (ξ, η) koordinátákra úgy, hogy

$$\begin{cases} \partial_\xi = \partial_x + \partial_y, \\ \partial_\eta = \partial_x - 3\partial_y \end{cases} \tag{6.14}$$

teljesüljön, hiszen ekkor a (6.13) egyenlet $v(\xi, \eta) = u(x, y)$ függvényre a $\partial_\xi \partial_\eta v = 0$ alakot ölti, amely egyenletet a 4.7. Példában tárgyaltunk. Ezt η szerint integrálva $\partial_\xi v(\xi, \eta) = f(\xi)$, ahonnan η szerinti integrálással kapjuk, hogy $v(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi) + \tilde{g}(\eta)$. A (6.14) transzformáció mátrixos alakja

$$(\partial_\xi, \partial_\eta) = (\partial_x, \partial_y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

így a 6.7. Megjegyzésben foglaltak alapján

$$(x, y) = (\xi, \eta) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

azaz

$$x = \xi + \eta, \quad y = \xi - 3\eta,$$

ezért

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{3x + y}{4}, \\ \eta = \dfrac{x - y}{4}. \end{cases}$$

Végeredményben tehát $v(\xi, \eta) = \tilde{f}(\frac{3x+y}{4}) + \tilde{g}(\frac{x-y}{4})$, vagyis a (6.13) egyenlet klasszikus megoldásai $u(x, y) = F(3x + y) + G(x - y)$ alakúak, ahol $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ tetszőleges függvények.

6.12. *Megjegyzés.* A másodrendű, főrészükben lineáris együtthatós egyenletek $n > 2$ esetén általában nem transzformálhatók kanonikus alakra az egész tartományban. A kétdimenziós esetben azonban a kanonikus alakra hozatal elvégezhető egy úgynevezett karakterisztikus egyenlet (amely egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet), illetve a karakterisztikák segítségével. A részleteket illetően lásd a [13, 80] könyveket, illetve illusztrációként a 6.12. Feladatot.

6.3. Feladatok

6.1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenletek hol milyen típusúak!

a) $\partial_1^2 u + 6\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u = 0$ $\mathbb{R}^2$-ben,

b) $6\partial_1^2 u + 8\partial_1\partial_2 u + 8\partial_2^2 u + 2\partial_1\partial_3 u + +6\partial_2\partial_3 u + 10\partial_3^2 u = 0$ $\mathbb{R}^3$-ben,

c) $(x+y)\partial_1^2 u + 2\sqrt{xy}\partial_1\partial_2 u + (x+y)\partial_2^2 u = 0$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0)$.

6.2. Mutassunk olyan differenciálegyneletet, amely $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$-on elliptikus, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$-on és $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$-on hiperbolikus. Igaz-e, hogy egy ilyen differenciáloperátor $\{0\} \times \mathbb{R}^+$-on parabolikus? Igaz-e, hogy $\{0\} \times \mathbb{R}^+$-on tágabb értelemben parabolikus? Mi a helyzet, ha az együtthatófüggvények folytonosak $\mathbb{R}^2$-en?

6.3. Mutassunk olyan differenciálegyenletet folytonos együtthatófüggvényekkel, amely $\mathbb{R}^n$ minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus $\mathbb{R}^n$-en!

6.4. Adjunk meg $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciálegyenletet, amely az Ω tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus Ω-n!

6.5. Igazoljuk, hogy ha egy differenciálegyenlet együtthatófüggvényei $\overline{\Omega}$-on folytonosak, és az egyenlet $\overline{\Omega}$ minden pontjában elliptikus, akkor az egyenlet egyenletesen elliptikus Ω-n, sőt léteznek $c_0, c_1 > 0$ konstansok úgy, hogy

$$c_0|p|^2 \leq \langle A(x_0)p, p\rangle \leq c_1|p|^2 \text{ minden } p \in \mathbb{R}^n \text{ és } x_0 \in \Omega \text{ esetén!}$$

6.6. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u + b(x,y)\partial_1\partial_2 u + c(x,y)\partial_2^2 u = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen!

6.7. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u + b(x,y)\partial_1\partial_2 u + c(x,y)\partial_2^2 u = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet az $y = 1$ és $y = -2$ egyenletű egyenesek közötti végtelen nyílt sávban elliptikus, az $y > 1$ és $y < -2$ nyílt félsíkokban pedig hiperbolikus legyen!

6.8. Adjunk meg a, b nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az

$$a(x,y)\partial_1^2 u + x^2\partial_1\partial_2 u + y^2\partial_2\partial_1 u + b(x,y)\partial_2^2 u = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet elliptikus legyen a $B(0,1)$ körlap belsejében és az $\mathbb{R}^2 \setminus B(0,2)$ végtelen körgyűrű belsejében, továbbá hiperbolikus legyen a $B(0,2) \setminus B(0,1)$ körgyűrű belsejében, ahol $B(0,R)$ jelöli az origó középpontú R sugarú zárt körlapot a síkon.

6.9. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

a) $\partial_1^2 u + 2\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u + u = x - y \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_1^2 u + 4\partial_2^2 u + \partial_3^2 u + 4\partial_1\partial_2 u + 2\partial_1\partial_3 u + 4\partial_2\partial_3 u + 2u = 0$ $\mathbb{R}^3$-ben.

6.10. Határozzuk meg az alábbi másodrendű differenciálegyenletek $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ klasszikus megoldásainak általános alakját!

a) $3\partial_1^2 u - 5\partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u + 3\partial_1 u + \partial_2 u = 0$ $\mathbb{R}^2$-ben,

b) $\partial_1^2 u - 2\partial_1 u - 3\partial_2 u + 6u = 2e^{x+y}$ $\mathbb{R}^2$-ben.

6.11. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x,y) + 2\partial_1\partial_2 u(x,y) + \partial_2^2(x,y) + u(x,y) &= 1 + xy \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x,0) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_2 u(0,y) &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

6.12. A másodrendű, főrészében lineáris

$$\partial_1^2 u(x,y) - 2x\partial_1\partial_2 u(x,y) + x^2\partial_2^2 u(x,y) = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \tag{6.15}$$

egyenlet *karakterisztikus egyenlete* az elsőrendű

$$(\partial_1 w(x,y))^2 - 2x\partial_1 w(x,y)\partial_2 w(x,y) + x^2(\partial_2 w(x,y))^2 = 0 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

egyenlet.

a) Keressük meg a karakterisztikus egyenlet $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldásait!

b) Legyen $w \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a karakterisztikus rendszer egy megoldása. Ekkor a $\{w = 0\}$ görbét a másodrendű egyenlet *karakterisztikájának* nevezzük. Határozzuk meg a (6.15) egyenlet karakterisztikáit!

c) Legyen $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ a karakterisztikus rendszer egy megoldása. Mutassuk meg, hogy ekkor a $v(x,y) = u(x,\varphi(x,y))$ helyettesítéssel a (6.15) egyenlet kanonikus alakra hozható!

7. fejezet

A Laplace- és Poisson-egyenlet

Az élet csak két dologra jó: matematikát felfedezni és matematikát tanítani.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

A fejezet tartalma. Értelmezzük a Poisson-egyenletnél valamivel általánosabb elliptikus egyenletre vonatkozó klasszikus peremérték- és sajátérték-feladatokat, majd megvizsgáljuk a megoldások egyértelműségét. Egyszerű tartományok esetében meghatározzuk a Laplace-operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit, és ezek segítségével a peremérték-feladatok megoldásait Fourier-sor alakjában állítjuk elő. Foglalkozunk továbbá a Laplace-egyenlet megoldásaival, az úgynevezett harmonikus függvényekkel, az ezekre vonatkozó maximum- és minimumelvekkel és következményeivel, valamint a középérték-tulajdonsággal. Végül az alapmegoldás és a Green-függvény fogalmának felhasználásával formulát adunk peremérték-feladatok klasszikus megoldásaira.

7.1. Előkészületek

Mielőtt nekilátnánk a Laplace- és Poisson-egyenlet konkrét vizsgálatának, érdemes röviden összefoglalni az egyenletek fizikai hátterét, és néhány hasznos összefüggést, amelyek a későbbiekben segítségünkre lesznek. A kapcsolódó fizikai példák részletes tárgyalása az 5. fejezet 5.2. és 5.2.3. szakaszaiban találhatók meg.

7.1.1. Fizikai háttér

A fizikai példákról szóló 5. fejezetben megismerkedtünk az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban lévő inhomogén közegben végbemenő *stacionárius hővezetés* folyamatával. Ez azt jeleneti, hogy az Ω tartomány pontjainak hőmérsékletét leíró $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvény időben állandó, a hőmérséklet csak térben változik. Ekkor a folyamatot a következő parciális differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = f \quad \Omega\text{-ban},$$

ahol $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a hővezetési együtthatófüggvény és $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a forrástag, amely a tartományban lévő hőforrások és nyelők eloszlását adja meg ($f>0$ esetén az adott pontban hőforrás, $f < 0$ esetén hőnyelő található). Forrásra gondolhatunk például úgy, mint egy szobában elhelyezett radiátorra, vagy valamilyen (exoterm vagy endoterm) kémiai reakció során felszabaduló vagy elnyelődő hőre. A fenti egyenletből a $k = 1$ konstans esetben kapjuk a *Poisson-egyenletet*, azaz

$$-\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban},$$

ahol

$$u \mapsto \Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$$

a *Laplace-operátor*. A Poisson-egyenlet homogén jobb oldalú speciális eseteként a *Laplace-egyenletet* nyerjük:

$$-\Delta u = 0 \quad \Omega\text{-ban}.$$

Noha a negatív előjelnek tulajdonképpen nincs lényeges szerepe, főleg a Laplace-egyenlet esetében, azonban a fizikai motiváció miatt mégis fontosnak érezzük megtartani. Ez egyrészt a mögöttes fizikai tartalom miatt lehet célravezető, másrészt, ami talán ennél lényegesebb, a $-\Delta$, illetve az $u \mapsto -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$ differenciáloperátor a funkcionálanalízis szempontjából úgynevezett pozitív operátor, a sajátértékei nemnegatívak, és talán a pozitív tulajdonságokat jobban szeretjük a negatívaknál.

Ha a Poisson-egyenletben a negatív előjeltől eltekintünk, akkor a

$$\Delta u = f$$

egyenlet u megoldására úgy tekinthetünk, mint annak a vektormezőnek a potenciálja (például elektromosságtanban az elektromos mező potenciálja), amelynek divergenciája f (amely lehet például az elektromos töltéssűrűség).

7.1. *Történeti megjegyzés.* A Laplace-egyenlet Pierre-Simon Laplace (1749–1827) francia matematikus és fizikus nevét viseli, aki megmutatta, hogy forrásmentes vektormező potenciálja ezt az egyenletet elégíti ki. Laplace fő műve az *Égi mechanika*, amely a klasszikus mechanika elméletét a kalkulus nyelvére fordított le. Laplace tanítványa Siméon-Denis Poisson (1781–1840), aki megmutatta, hogy források esetén a potenciál a Poisson-egyenletnek tesz eleget.

Visszatérve a stacionárius hővezetés folyamatához, attól függően, hogy az Ω tartomány peremén milyen folyamat megy végbe, különböző *peremfeltételeket* adhatunk meg. Például előírhatjuk a peremen a hőmérsékletet, vagy a hőáramot az idő függvényében, illetve a peremen a közeggel hőcsere is végbemehet Newton lehűlési törvénye szerint. E peremfeltételeknek a stacionárius hővezetés egyenletéhez való csatolásával nyerjük a különböző *peremérték-feladatokat*.

A fejezetben fő célunk a Laplace- és Poisson-egyenletek és a hozzájuk kapcsolódó különféle peremfeltételek segítségével nyert peremérték-feladatok megoldásaival kapcsolatos egzisztencia (azaz létezés) és unicitási (azaz egyértelműségi) kérdések vizsgálata, továbbá a megoldások tulajdonságainak tanulmányozása. A megoldások létezése már e két egyszerűnek látszó egyenlet esetében is igen nehéz és rengeteg számolást igénylő probléma, ezért csak a főbb eredményekre fogunk kitérni. Az egyértelműségi kérdések viszont sokkal könnyebben kezelhetők, olyannyira, hogy célszerű a vizsgálódásainkban nem csupán a Laplace- és Poisson-egyenletekre szorítkozni, hanem egy kissé általánosabb alakú egyenlettípust tekinteni, méghozzá a

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \quad \Omega\text{-ban}, \tag{7.1}$$

alakú egyenleteket, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$ adott függvények. Látni fogjuk, hogy ez az egyenlettípus sok esetben, például a megoldások egyértelműsége, egyes tulajdonságai, vagy éppen a sajátértékekek szempontjából ugyanolyan módon kezelhető, mint a Poisson- vagy a Laplace-egyenlet.

A (7.1) egyenletre (és speciális eseteire) vonatkozó peremérték-feladatok tanulmányozása lényegében két fő összefüggésen fog múlni, amelyeket lépten-nyomon alkalmazni fogunk: ezek a *Green-formulák*. Mielőtt tehát nekilátnánk a (7.1) egyenletre vonatkozó problémák vizsgálatának, érdemes az

$$u \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

operátorra vonatkozó Green-formulákat megfogalmaznunk.

7.1.2. Green-formulák

A Green-formulák megfogalmazásához, illetve a későbbiekben is szükségünk lesz a szóban forgó tartományok peremének megfelelő simaságára. A sorra kerülő összefüggésekben általában elegendő, ha a tartomány pereme Lipschitz-folytonos, azaz minden pontja körül lokálisan egy Lipschitz-folytonos függvény grafikonjával azonosítható. Sok esetben azonban ilyen általános perem mellett a bizonyítások nehézkessé, technikássá válnak. Emiatt gyakran folytonosan differenciálható, vagy véges sok folytonosan differenciálható darabból álló peremet célszerű feltételezni. A továbbiakban e nehézségek elkerülésére (kissé pongyolán) egyszerűen *sima peremű* tartományokról fogunk beszélni,

amely alatt mindig azt értjük, hogy elegendően sima. A pontos feltételeket illetően az [1] monográfiát ajánljuk, amely részletesen tárgyalja a perem simaságának kérdését.
Az *első* (vagy más néven *antiszimmetrikus*) *Green-formula* (vagy *Green-tétel*) az egydimenziós parciális integrálás szabályának több változóra való általánosítása, amelyet kétféle alakban is megfogalmazhatunk. Az első Green-formula koordinátás alakja a következő.

7.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Ekkor minden $j = 1, \ldots, n$ esetén*

$$\int_\Omega v\partial_j(p\partial_j u) = -\int_\Omega p\partial_j u\partial_j v + \int_{\partial\Omega} pv\partial_j u\nu_j \, d\sigma. \tag{7.2}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a $g = vp\partial_j u$ függvényre, ekkor

$$\partial_j g = v\partial_j(p\partial_j u) + p\partial_j u\partial_j v,$$

így

$$\int_\Omega \big(v\partial_j(p\partial_j u) + p\partial_j u\partial_j v\big) = \int_{\partial\Omega} pv\partial_j u\nu_j \, d\sigma,$$

ahonnan átrendezéssel adódik a bizonyítandó összefüggés. □

Az első Green-formula koordinátás alakját az $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vektorértékű függvény koordinátafüggvényire alkalmazva, majd a $j = 1, \ldots, n$ indexekre összegezve, a divergencia definíciójának figyelembe vételével kapjuk Green első formulájának másik alakját (az irodalomban gyakran ezt hívják első Green-formulának, sőt leginkább csak a $p = 1$ speciális esetét).

7.3. Tétel (Green első formulája)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Ekkor*

$$\int_\Omega v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -\int_\Omega p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \int_{\partial\Omega} pv\partial_\nu u \, d\sigma.$$

7.4. *Megjegyzés.* A pontosság kedvéért jegyezzük meg, hogy egy dimenzióban $\Omega = (a, b)$ esetén egyrészt a tartomány peremének sima volta semmitmondó feltétel, másrészt pedig az u függvény a és b pontokbeli normális irányú deriváltja $-u'(a)$ és $u'(b)$ módon értelmezett. Ekkor az első Green-formula, vagy annak koordinátás alakja így írható

$$\int_a^b v(pu')' = -\int_a^b pu'v' + [vpu']_a^b,$$

ami nem más, mint a parciális integrálás tétele.

Az első Green-formula egyszerű következménye a *második* (vagy *szimmetrikus*) *Green-formula.*

7.5. Tétel (Green második formulája)**.** *Legyen $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ és $p \in C^1(\overline{\Omega})$, ahol $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Ekkor*

$$\int_\Omega \big(v \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - u \operatorname{div}(p \operatorname{grad} v)\big) = \int_{\partial\Omega} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v)\, d\sigma.$$

Az irodalomban, és a történeti hűség szempontjából, az előbbi tételeknek leginkább a Δ operátorra vonatkozó $p = 1$ speciális esetét szokás Green-formuláknak nevezni, ezért alább mi is kimondjuk így a tételt.

7.6. Tétel (Green-formulák)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Ekkor $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$ esetén*

$$\int_\Omega v\Delta u = -\int_\Omega \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u \, d\sigma.$$

Ha $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, akkor

$$\int_\Omega \big(v\Delta u - u\Delta v\big) = \int_{\partial\Omega} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v)\, d\sigma.$$

7.7. *Megjegyzés.* A későbbi alkalmazások szempontjából fontos megjegyezni, hogy a Green-formulák Lipschitz-tartományok esetében gyengébb feltevések mellett is érvényesek. Nevezetesen, ha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, Lipschitz-peremű tartomány, akkor Green első formulája abban az esetben is igaz, ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \in L^1(\Omega)$. Green második formulájában hasonlóan gyengítve az u-ra és v-re vonatkozó simasági feltételt, a tétel továbbra is érvényben marad.

7.8. *Történeti megjegyzés.* George Green (1793–1841) brit fizikus, akinek fő műve az 1828-ban kiadott *Esszé a matematikai analízisnek az elektromosság- és mágnességtanban való alkalmazásáról*, lásd [33]. Ebben fogalmazta meg többek között a Δ operátorra vonatkozó 7.6. Tételbeli Green-formulákat három dimenzóban, továbbá alkalmazta elektromosságtani és mágnességtani vizsgálatokban, amely e két tudományág kiindulópontjává vált. A művet mindössze 51 példányban adták el, főleg Green ismerősei körében, a jelentőségét csak Green halála után ismerte fel először 1846-ban William Thomson (Lord Kelvin).

Green életútja nem volt mindennapi, 40 éves koráig molnárként dolgozott Nottingham mellett, és ezalatt gyakran látogatta a nottinghami könyvtárat. Matematikai tudását valószínűleg ezalatt szerezte, és eközben írta meg fő művét. 40 éves korában iratkozott be egy főiskolára, amelyet el is végzett, majd ezt követően a Cambridge-i Filozófiai Társaság tagja lett. Green nem érte meg, hogy neve híressé váljon (ahogy még ma is az). 1845-ben, az akkor 21 éves William Thomson olvasta Robert Murphy elektromosságtanról szóló 1833-as művét (lásd [60]), amely idézte Greent (és Murphy ebben a műben vezette be a Δ jelölést a Laplace-operátorra). Thomson ekkor elolvasta Green 1828-as művét, és azonnal felmérte a jelentőségét.

7.2. Speciális megoldások

Általában egy konkrét egyenlet vizsgálatát gyakran célszerű valamilyen speciális alakú megoldás előállításával kezdeni, mert a konkrét megoldás vagy megoldássereg sokszor képet adhat az általános megoldásokról, illetve számos esetben az egyenlet általános megoldása előállítható speciális megoldások segítségével. A Laplace-egyenlet esetében természetesen többféle alakú speciális megoldásokat kereshetünk, ezzel kapcsolatban lásd a (7.2–7.4. Feladatokat. Számunkra a legfontosabb az úgynevezett *radiális* megoldások családja.

7.2.1. Radiális megoldások

A Laplace-egyenlet egy lényeges tulajdonsága az ortogonális transzformációra, vagyis tükrözések és forgatások kompozíciójára vonatkozó invariancia. Egy ilyen transzformációt egy $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix segítségével írhatunk le, ahol a mátrix oszlopvektorai jelentik az új ortonormált (vagyis egymásra merőleges és egység hosszúságú) bázisvektorokat, így $Q^TQ = I$ az $n \times n$-es egységmátrix. Az új bázisban a koordinátákat az $y = Q^{-1}x = Q^Tx$ transzformáció adja meg, így egy $u(x)$ függvény az új koordinátákban $u(x) = u(Qy) = U(y)$ alakú.

7.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $u\in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\Delta u(x)=0$ $(x\in\mathbb{R}^n)$. Legyen $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges ortogonális mátrix, és vezessünk be az $y=Q^{-1}x$ koordinátákat. Ekkor az $U(y) = u(x)$ függvényre $\Delta U(y)=0$ $(y \in \mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. Legyen $Q = (q_{ij})_{i,j=1}^n$. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\operatorname{grad} U(y) = \operatorname{grad} u(Qy) \cdot Q$$

így

$$\partial_k U(y) = \sum_{j=1}^n \partial_j u(Qy) q_{jk}, \tag{7.3}$$

amit ismét alkalmazva

$$\partial_k^2 U(y) = \partial_k \left(\sum_{j=1}^n \partial_j u(Qy) q_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=1}^n \partial_{\ell j} u(Qy) q_{\ell k} q_{jk}.$$

Ebből következően

$$\Delta U(y) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k^2 U(y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \partial_{\ell j} u(Qy) q_{\ell k} q_{jk} = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \partial_{\ell j} u(Qy) \sum_{k=1}^{n} q_{\ell k} q_{jk}.$$

Vegyük észre, hogy $\sum_{k=1}^{n} q_{\ell k} q_{jk}$ a Q mátrix j-edik és ℓ-edik sorának skalárszorzata, amely 0, ha $j \neq \ell$, és 1, ha $j = \ell$. Ezt az észrevételt felhasználva kapjuk, hogy

$$\Delta U(y) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(Qy) = \Delta u(Qy) = 0,$$

amit bizonyítani kellett □

7.10. *Megjegyzés.* A bizonyítást formálisan a $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ nablavektor segítségével is elvégezhetjük, ahogy ezt a 6.7. Megjegyzésben is tettük. Az $y = Q^{-1}x$ koordinátatranszformációval kapott (7.3) összefüggés azt jelenti, hogy az x és y változóban ható ∇_x és ∇_y operátorokra

$$\nabla_x = \nabla_y Q^{-1},$$

és így

$$\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x^T = \nabla_y Q^{-1} \cdot (\nabla_y Q^{-1})^T = \nabla_y (Q^T Q) \nabla_y = \nabla_y \cdot \nabla_y = \Delta_y.$$

A Laplace-egyenlet forgatásra és tükrözésre való invarianciája motiválja, hogy keressük meg az egyenlet *radiális megoldásait*, vagyis az $u(x) = U(|x|)$ alakú megoldásokat. Ehhez célszerű radiális függvényekre felírni a Laplace-operátort. A rövidség kedvéért a továbbiakban az

$$r := |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

jelölést fogjuk használni.

7.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $u(x) = U(|x|) = U(r)$ $(x \neq 0)$*, ahol* $U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^{n-1}} \left(r^{n-1} U'(r)\right)' \quad (r \neq 0). \tag{7.4}$$

Bizonyítás. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\partial_j r = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + \dots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x_j = \frac{x_j}{r} \quad (r \neq 0),$$

ezért $j = 1, \dots, n$ esetén

$$\partial_j u(x) = U'(r)\partial_j r = U'(r)\frac{x_j}{r},$$

így

$$\partial_j^2 u(x) = U''(r)\partial_j r r + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j}{r^2}\partial_j r\right) = U''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + U'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right).$$

Ebből következően

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 u(x) = \sum_{j=1}^{n}\left[U''(r)\frac{x_j^2}{r^2} + U'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}\right)\right] =$$
$$= U''(r)\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2} + \frac{1}{r}U'(r)\left(n - \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{r^2}\right) = U''(r) + \frac{n-1}{r}U'(r),$$

vagyis

$$\Delta u(x) = U''(r) + \frac{n-1}{r}U'(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}U'(r)\right)'.$$

□

7.12. *Megjegyzés.* Az $n = 2$ speciális esetben a (7.4) képlet a

$$\Delta U(r) = \frac{1}{r}\left(rU'(r)\right)'$$

alakot ölti, amely speciális esete a Laplace-operátor polárkoordinátás alakjának, lásd a 7.3. Feladatot.

7.13. Következmény. *Tegyük fel, hogy $u(x) = U(|x|) = U(r)$ $(x \neq 0)$, ahol $U\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Ha $\Delta u = 0$, akkor*

$$U(r) = \begin{cases} a\log r + b, & \text{ha } n = 2,\\ \dfrac{a}{r^{n-2}} + b, & \text{ha } n \geq 3,\end{cases}$$

ahol a, b tetszőleges konstansok.

Bizonyítás. A 7.11. Állítás alapján

$$\Delta u(x) = \frac{1}{r^{n-1}}\left(r^{n-1}U'(r)\right) = 0,$$

amelynek mindkét oldalt integrálva kapjuk, hogy $\log|U'(r)| = (1-n)\log r + c$, azaz $U'(r) = Cr^{1-n}$, ahol C tetszőleges konstans. Innen az állítás integrálás után azonnal adódik. □

A radiális megoldások az origóban szingulárisak, azonban lokálisan integrálható függvények.

7.14. Állítás. *A 7.13. Következményben értelmezett u függvényekre $u \in \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. Az integrálhatóság természetesen csak az origó környezetében kérdéses és nyilván feltehető, hogy $b = 0$. Legyen $R > 0$ rögzített, ekkor $n \geq 3$ esetén

$$\left| \int_{B(0,R)} u(x)\, dx \right| = \left| \int_0^R \int_{S(0,r)} u(x)\, d\sigma_x\, dr \right| \leq$$
$$\leq \int_0^R \int_{S(0,r)} \frac{C_1}{r^{n-2}}\, d\sigma_x\, dr = C_2 \int_0^R r\, dr < \infty,$$

felhasználva, hogy a 0 középpontú r sugarú $S(0,r)$ gömbfelület felszíne $\omega_n r^{n-1}$, ahol ω_n a 0 középpontú egységsugarú gömbfelület felszíne. Az $n = 2$ esetben pedig

$$\left| \int_{B(0,R)} u(x)\, dx \right| \leq C_1 \int_0^R \int_{B(0,r)} |\log r|\, dr = C_2 \int_0^R |r \log r|\, dr < \infty.$$

□

7.2.2. Alapmegoldás és Newton-potenciál

A Laplace-egyenletnek a 7.13. Következményben nyert radiális megoldásai közül kitüntetett szerepe van az úgynevezett *alapmegoldásoknak*.

7.15. Definíció. Az n-dimenziós $(-\Delta)$ operátor *alapmegoldása* az

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{ha } n = 2,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \end{cases}$$

függvény, ahol ω_n jelöli az n-dimenziós egységgömb felszínét.

A Laplace-egyenlet alapmegoldása a későbbiekben legalább olyan lényeges szerepet fog betölteni, mint amilyet a Green-formulák. Az alapmegoldás szemléletes jelentését a következőképpen érthetjük meg. Képzeljük el, hogy az origóban elhelyeztünk egy egységnyi forrást, például hő- vagy folyadékforrást. Ekkor a forrásból kiinduló hő origóra szimmetrikusan fog áramlani, tehát az áramvonal az $\vec{r}$ irányvektorú pontban $f(r)\vec{r}$ irányba mutat, ahol $r = |\vec{r}|$. Ha a térben máshol nincs forrás vagy nyelő, akkor tetszőleges origó középpontú gömbfelületen összességében mindig egységnyi hőmennyiség áramlik keresztül, amelyet a vektormező felületi integráljaként írhatunk fel, azaz

$$1 = \int_{S(0,r)} f(r)\vec{r}\, d\vec{F} = \int_{S(0,r)} f(r)\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}\, d\sigma = f(r)\omega_n r^n.$$

Ez azt jelenti, hogy az egységnyi forrás által létrehozott vektormező

$$\frac{1}{\omega_n r^n}\vec{r},$$

amelynek potenciálja (azaz primitív függvénye) könnyen ellenőrizhetően éppen $-E$, az alapmegoldás (-1)-szerese. Az alapmegoldás tehát nem más, mint az origóban elhelyezett egységnyi nyelő potenciálfüggvénye. (Megemlítjük, hogy az elektromosságtanban gyakran a matematikai értelemben vett potenciál (azaz primitív függvény) helyett annak (-1)-szeresét nevezik potenciálnak.)
Az egységnyi forrást (vagy töltést) szokás az úgynevezett (0 pontra koncentrált) *Dirac-delta* „függvénnyel” megadni,

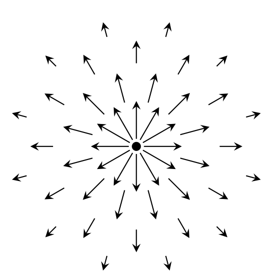
$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } x = 0 \end{cases} \quad \text{úgy, hogy} \quad \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} \delta(x)\, dx = 1.$$

Természetesen ilyen függvény nem létezik, de később a disztribúcióelméletről szóló fejezetben ennek értelmet fogunk adni. Az alapmegoldást tehát úgy is értelmezhetjük, mint a Dirac-delta potenciálfüggvénye, azaz

$$-\Delta E(x) = \delta(x), \tag{7.5}$$

és így

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta E(x)\, dx = 1,$$



7.1. ábra. Pontszerű forrás vektormezője ami $\mathbb{R}^n$ helyett nyilván tetszőleges gömbön is igaz. Ekkor a Gauss–Osztrogradszkij-tétel alapján a radiális szimmetria alapján, továbbá felhasználva, hogy az $S(0,r)$ gömbfelületen $\partial_\nu = \partial_r$,

$$-1 = \int_{B(0,r)} \Delta E(x)\,dx = \int_{S(0,r)} \partial_\nu E(x)\,d\sigma_x = \int_{S(0,r)} E'(r)\,d\sigma = E'(r)\omega_n r^{n-1},$$

ahonnan

$$E'(r) = -\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}.$$

Ebből ismét a 7.15. Definícióban értelmezett függvényeket nyerjük.
A Dirac-delta „függvény” használata számos esetben motivációul szolgálhat bizonyos összefüggések megsejtéséhez. Például vegyük észre, hogy rögzített x esetén $-\Delta_y E(x,y) := -\Delta(y \mapsto E(x-y)) = \delta_x(y)$ az x pontra koncentrált Dirac-delta, így az

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy \tag{7.6}$$

formulával értelmezett függvényre formálisan

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [-\Delta_y E(x-y)f(y)]\;dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x(y)f(y)\;dy = f(x).$$

Ez azt jelenti, hogy formálisan a $-\Delta u = f$ Poisson-egyenletre megoldóképletet szolgáltat a (7.6) képlet. Az iménti érvelések nem csak formálisan érvényesek, ezt mutatja az alábbi tétel.

7.16. Tétel. *Legyen $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ és értelmezzük az*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy$$

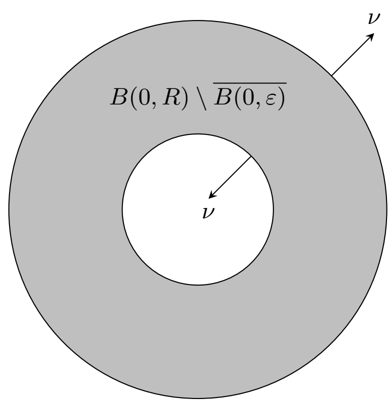
függvényt. Ekkor $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ és $-\Delta u = f$ $\mathbb{R}^n$-ben.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy a 7.14. Állítás alapján E lokálisan integrálható függvény, így f kompakt tartójú és folytonos volta miatt az $y \mapsto E(y)f(x-y)$ függvény integrálható $\mathbb{R}^n$-en, ezért az $y \mapsto E(x-y)f(y)$ függvény szintén integrálható. Következésképpen u jól definiált és

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)f(x-y)\,dy.$$

Mivel $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ folytán az $y \mapsto E(y)\partial_j f(x-y)$ és $y \mapsto E(y)\partial_k\partial_j f(x-y)$ függvények ugyancsak integrálhatók $\mathbb{R}^n$-en, ezért a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételből következően u kétszer folytonosan differenciálható, és a deriválás elvégezhető az integráljel mögött, vagyis

$$\partial_k\partial_j u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\partial_k\partial_j f(x-y)\,dy.$$



7.2. ábra. Körgyűrűtartomány

Következésképpen

$$-\Delta u(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta f(x-y)\,dy.$$

Legyen most $x \in \mathbb{R}^n$ rögzített és válasszunk olyan $R > 0$ számot, hogy az $y \mapsto f(x-y)$ függvény azonosan 0 a $B(0,R)$ gömbön kívül. Ekkor a $B(0,R) \setminus \overline{B(0,\varepsilon)}$ körgyűrűn Green második formulájának felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} E(y)\Delta f(x-y)\,dy = \\
&= -\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(y) f(x-y)\,dy + \\
&\quad + \int_{S(0,\varepsilon)} \big(E(y)\partial_\nu^y f(x-y) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\,d\sigma_y + \\
&\quad + \int_{S(0,R)} \big(E(y)\partial_\nu^y f(x-y) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\,d\sigma_y,
\end{aligned}$$

ahol a $\partial_\nu^y f(x-y) = \partial_\nu(y \mapsto f(x-y))$ tömör jelölést alkalmaztuk. Mivel $\Delta E(y) = 0$ $(y \neq 0)$, ezért

$$\int_{B(0,R)\setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(y) f(x-y)\,dy = 0.$$

Ezenkívül a $S(0,R)$ peremen R választása miatt

$$\int_{S(0,R)} \big(E(y)\partial_\nu^y f(x-y) - \partial_\nu E(y) f(x-y)\big)\,d\sigma_y = 0.$$

Másrészt az $S(0,\varepsilon)$ peremen ν az $B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varepsilon)}$ tartomány külső normálisa, tehát az $S(0,\varepsilon)$ gömbfelület befelé mutató normálvektora (lásd a 7.2. ábrát), emiatt

$$\partial_\nu^y f(x-y) = \partial_{-|y|} f(x-y) = \partial_\nu f(x-y),$$

továbbá $n \geq 2$ esetén

$$\partial_\nu E(y) = -\partial_{|y|} E(y) = -\frac{1}{\omega_n |y|^{n-1}}.$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}
-\Delta u(x) = &- \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(0,\varepsilon)} \big(f(x-y) - f(x)\big)\, d\sigma_y + \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(0,\varepsilon)} f(x)\, d\sigma_y + \\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{S(0,\varepsilon)} E(y)\partial_\nu f(x-y)\, d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $\omega_n \varepsilon^{n-1}$ éppen $S(0,\varepsilon)$ felszíne, ezért f folytonossága miatt

$$\left| \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(0,\varepsilon)} \big(f(x-y) - f(x)\big)\, d\sigma_y \right| \leq \sup_{y\in S(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0,$$

továbbá

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(0,\varepsilon)} f(x)\, d\sigma_y = f(x).$$

Hasonlóan, E definíciója és $\partial_\nu f(x-y)$ korlátossága alapján $n \geq 3$ esetén

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E(y)\partial_\nu f(x-y)\, d\sigma_y \right| \leq \\
&\leq \omega_n \varepsilon^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-2)\omega_n \varepsilon^{n-2}} \cdot \sup_{y\in S(0,\varepsilon)} |\partial_\nu f(x-y)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0,
\end{aligned}$$

az $n = 2$ esetben pedig

$$\left| \int_{S(0,\varepsilon)} E(y)\partial_\nu f(x-y)\, d\sigma_y \right| \leq 2\pi\varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi} |\log\varepsilon| \cdot \sup_{y\in S(0,\varepsilon)} |\partial_\nu f(x-y)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0$$

a klasszikus analízisből jól ismert $x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggés folytán. Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy $-\Delta u(x) = f(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén. $\square$

7.17. *Megjegyzés.* A 7.16. Tétel valójában sokkal gyengébb feltételek mellett is igaz. Sőt, az is igaz (lásd a 7.24. Feladatot), hogy ha $n \geq 3$ és $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ esetén $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ korlátos megoldása a $-\Delta u = f$ egyenletnek $\mathbb{R}^n$-ben, akkor alkalmas C konstanssal

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) f(y)\, dy + C.$$

A fenti integrált (vagy ennek (-1)-szeresét) szokás *Newton-potenciálnak* nevezni. Ez megadja annak a vektormezőnek a potenciálját, azaz primitív függvényét, amelynek divergenciája $-f$. Newton a tömegvonzási törvény vizsgálata kapcsán a háromdimenziós esetben jutott a fenti összefüggésre. A tömegvonzás törvénye szerint az r távolságra lévő testek között $1/r^2$-tel arányos vonzás lép fel (ez igaz Coulomb-törvénye szerint töltésekre is), így az origóban elhelyezett test (vagy éppen töltés) által létrehozott vektormező potenciálja $1/r$-rel arányos, ami éppen az E alapmegoldás az $n = 3$ speciális esetben.

7.3. Klasszikus peremérték-feladatok

A stacionárius hővezetés modelljének felállításakor láttuk, hogy a folyamatot leíró egyenlethez különféle peremfeltételeket csatolhatunk, attól függően, hogy a tartomány peremén a hőmérsékletet vagy a hőáramot adjuk meg, vagy a peremen hőcsere megy végbe. Az így kapott peremérték-feladatokat a következő általános alakban adhatjuk meg:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \hfill \text{peremfeltétel} & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases} \tag{7.7}$$

A (7.7) probléma pontos megfogalmazásához a peremfeltételek konkrét megadása mellett azt a teret is meg kell adnunk, amelyben a megoldásokat keressük.

7.3.1. A klasszikus feladatok kitűzése

A klasszikus peremérték-feladatokban mindig feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *tartomány*, tehát *nyílt és összefüggő halmaz.* Valójában az összefüggőségre rendszerint nincs szükség, jelezni fogjuk, amikor ez lényeges. Ezenkívül gyakran a tartomány peremének megfelelő simaságát is fel kell tennünk, például ha a peremen normális irányú deriváltról beszélünk, vagy valamilyen integrálátalakító tételt használunk. Ahogy a Green-formulákról szóló 7.1.2. szakasz elején említettük, Lipschitz-folytonos perem a következőkben mindig elegendő, de röviden mindig csak sima peremű tartományokról fogunk beszélni. Mindezek

mellett a fizikai motivációból adódóan a p függvényről mindig fel fogjuk tenni, hogy pozitív.
Az első peremérték-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely a (7.1) egyenletet az Ω tartományon kielégíti, továbbá u-nak adottak a tartomány peremén felvett értékei. Ilyen típusú problémát kapunk többek között, amikor a stacionárius hővezetés folyamatában a peremen előírjuk a hőmérsékletet. A peremre való megszorítás értelmezhetőségéhez a klasszikus esetben feltesszük, hogy $u \in C(\overline{\Omega})$.

7.18. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus első peremérték-feladatban*, vagy *Dirichlet-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (7.1) egyenletet az Ω tartományban, továbbá u eleget tesz az $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *első* (vagy *elsőfajú*, avagy *Dirichlet-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

A második peremérték-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti az egyenletet az Ω tartományon, és adott a tartomány peremén a normális irányú deriváltja. Ilyen típusú probléma fordul elő például, ha a stacionárius hővezetés folyamatában a peremen a hőáramot írjuk elő. Mivel a peremen a megoldás egyfajta deriváltját írjuk elő, ezért $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságot követelünk meg, illetve a tartomány peremének regularitását is fel kell tennünk.

7.19. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus második peremérték-feladatban*, vagy *Neumann-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (7.1) egyenletet az Ω tartományban, továbbá u eleget tesz az $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *második* (vagy *másodfajú*, avagy *Neumann-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

7.20. *Megjegyzés.* Ahogy a Green-formulák kapcsán is megemlítettük a 7.4. Megjegyzésben, az egydimenziós $\Omega = (a, b)$ tartomány esetén az a és b perempontokbeli normális irányú deriváltak $-u'(a)$, illetve $u'(b)$.

A harmadik peremérték-feladatban az első és második peremfeltételek lineáris kombinációját írjuk elő a tartomány peremén. Ilyen típusú peremfeltétel például a peremen a Newton-féle lehűlési törvény szerint végbemenő hőcsere esetében adható meg.

7.21. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. Ekkor a *klasszikus harmadik peremérték-feladatban* olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (7.1) egyenletet az Ω tartományban, továbbá u eleget tesz az $gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi$ úgynevezett *harmadik* (vagy *harmadfajú*, avagy *Robin-féle*) *peremfeltételnek*:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \quad \Omega\text{-ban}, \\ \quad gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases}$$

7.22. *Megjegyzés.* A harmadik peremfeltételből a $g = 1$, $h = 0$ választással a Dirichlet-, a $g = 0$, $h = 1$ választással pedig a Neumann-peremfeltételt nyerjük. Egy másik fontos speciális eset, ha a tartomány peremének különböző részein egymástól eltérő peremfeltételeket írunk elő. Például, amennyiben $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, ahol Γ_0, Γ_1 diszjunkt (a felszíni mérték szerint) mérhető részhalmazai $\partial\Omega$-nak, akkor $g|_{\Gamma_0} = 1$, $g|_{\Gamma_1} = 0$, $h|_{\Gamma_0} = 0$, $h|_{\Gamma_1} = 1$ választással a következő peremérték-feladatot nyerjük:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f \quad \Omega\text{-ban}, \\ \hfill u|_{\Gamma_0} = \varphi_0, \\ \hfill \partial_\nu u|_{\Gamma_1} = \varphi_1. \end{cases}$$

Egy dimenzióban $\Omega = (a, b)$ esetén például a két perempontban különböző típusú peremfeltételeket is előírhatunk.

7.3.2. A megoldás egyértelműsége

A klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásainak egyértelműségével kapcsolatban az alábbi tételt fogalmazhatjuk meg.

7.23. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h \neq 0$. Ekkor a $q = 0, g = 0$ eset kivételével a klasszikus harmadik peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása lehet. A $q = 0, g = 0$ esetben a klasszikus második peremérték-feladat egy speciális esetét nyerjük, amelynek ha létezik $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása, akkor végtelen sok megoldása van, és ezek konstansban térnek el egymástól.*

Mivel a klasszikus harmadik peremérték-feladat magába foglalja a klasszikus első és második peremérték-feladatokat, ezért ezek egyértelmű megoldhatóságát is nyertük.

7.24. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in$ $\in C(\partial\Omega)$. Ekkor a klasszikus első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in$ $\in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása lehet.*

7.25. *Megjegyzés.* A 7.7. Megjegyzés alapján a 7.23. Tétel és a 7.24. Következmény egyértelműségi következtetései valójában a $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ térben érvényesek. Vigyázzunk azonban, hogy a 7.24. Következmény a klasszikus első peremérték-feladat esetében csak $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ simaságú megoldások egyértelműségét garantálja. Az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldások egyértelműségét a 7.5. szakaszban a maximum- és minimumelvek segítségével fogjuk igazolni.
A $q \geq 0$ feltevés lényeges, mert a 7.4. szakaszban látni fogjuk, hogy ha $q < 0$ klasszikus sajátérték, akkor a peremérték-feladatoknak végtelen sok megoldása lehet.

7.26. Következmény. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in$ $\in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Ekkor a $q \neq 0$ eset kivételével a klasszikus második peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása van. A $q = 0$ esetben, ha létezik $u \in C^2(\Omega) \cap$ $\cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása, akkor végtelen sok megoldása van, és ezek konstansban térnek el egymástól.*

A 7.23. Tétel bizonyítása. Ha u_1 és u_2 a klasszikus harmadik peremérték-feladat megoldásai, akkor a feladat linearitása folytán az $u_1 - u_2$ függvény a homogén jobb oldalú és homogén peremfeltételű harmadik peremérték-feladatnak megoldása. Elegendő tehát belátni, hogy $f = 0$, $\varphi = 0$ esetén a klasszikus harmadik peremérték-feladatnak csak az azonosan 0 függvény a megoldása az $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvények körében. Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\overline{\Omega})$, amelyre

$$\begin{cases} Lu := -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \\ \qquad\qquad gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ekkor $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = qu \in C^1(\overline{\Omega})$, így az első Green-formula 7.7. Megjegyzésbeli alakjának felhasználásával

$$0 = \int_\Omega uLu = \int_\Omega (p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u + qu^2) - \int_{\partial\Omega} pu\partial_\nu u \, d\sigma, \tag{7.8}$$

továbbá a homogén harmadik peremfeltétel, illetve a $p > 0$, $gh \geq 0$, $g+h \neq 0$ feltevések figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$-pu\partial_\nu u(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h(x) = 0, \\ p\frac{g}{h}u^2, & \text{ha } h(x) \neq 0. \end{cases}$$

A $\partial\Omega$ peremen tehát

$$-pu\partial_\nu u \geq 0,$$

következésképpen

$$0 = \int_\Omega uLu \geq \int_\Omega (p\,|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2) \geq 0. \tag{7.9}$$

Ebből következően $\operatorname{grad} u = 0$ és $qu^2 = 0$, így $u = c$ konstansfüggvény, amely $q \neq 0$ esetén csak az azonosan 0 függvény lehet. □

7.27. *Megjegyzés.* Az előbbi bizonyításban valójában a következőt igazoltuk. Tekintsük az Ω tartományon négyzetesen integrálható függvényeknek az

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv$$

skalárszorzattal ellátott Hilbert-terében az $L\colon D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operátort, amelyre

$$D(L) := \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : Lu \in L^2(\Omega), gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$
$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu,$$

ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, $p > 0, q \geq 0$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h \neq 0$. Ekkor

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega Luu \geq 0, \quad \text{minden } u \in D(L) \text{ esetén,}$$

vagyis az L operátor pozitív. Sőt, a $g = 0$, $q = 0$ eset kivételével L szigorúan pozitív, vagyis az előbbi egyenlőtlenség minden $u \in D(L)$, $u \neq 0$ esetén szigorú. A 7.4. szakaszban az L operátornak egyéb tulajdonságait is belátjuk.

Bár a klasszikus peremértékfeladatok megoldásainak egyértelműsége, mint látható, viszonylag egyszerű kérdés, a megoldások létezése ennél sokkal nehezebb. Általában nem feltétlenül létezik megoldás, ezt mutatja az alábbi állítás.

7.28. Állítás. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $f \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ és $g \in C(\partial\Omega)$. Ekkor, ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény megoldása a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = f & \Omega\text{-}ban, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

második peremérték-feladatnak, akkor szükségképpen

$$\int_\Omega f + \int_{\partial\Omega} pg \, d\sigma = 0.$$

Bizonyítás. Az első Green-formulát az u és a $v = 1$ függvényekre alkalmazva

$$\int_\Omega f = -\int_\Omega \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -\int_{\partial\Omega} p\partial_\nu u \, d\sigma.$$

□

Ha létezik megoldás, akkor azok konkrét előállítására többféle lehetőség kínálkozik, ezekkel a későbbiekben foglalkozunk. Speciális tartományok, és speciális jobb oldal esetében azonban minden nehézség nélkül megadhatjuk a megoldásokat.

7.29. Példa. Keressük meg a következő Dirichlet-feladat $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldását, ahol $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ az origó középpontú nyílt egységkörlap:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = x + y & ((x,y) \in B(0,1)), \\ u|_{\partial B(0,1)} = x. \end{cases}$$

Kézenfekvő az u megoldást polinom alakban keresni, méghozzá

$$u(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)p(x,y) + x$$

formában, hiszen ekkor a peremfeltétel automatikusan teljesül. Mivel a Laplace-operátor kettővel csökkenti egy polinom fokszámát, ezért célszerű a p polinomot elsőfokúnak választani, vagyis keressük az u megoldást

$$u(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(ax + by + c) + x$$

alakban. Ekkor $\Delta u(x,y) = 8ax + 8by + 4c$, így a feltételekből következően $a = b = \frac{1}{8}$ és $c = 0$, tehát a feladat megoldása

$$u(x,y) = \frac{x+y}{8}(x^2 + y^2 - 1) + x.$$

Mivel a Dirichlet-feladat $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása sima peremű tartományon egyértelmű, ezért ez a feladat egyetlen $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása (amely valójában, mint $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldás is egyértelmű).

7.3.3. Dirichlet-elv

Tekintsük most a (7.1) egyenlet speciális esetét, a Poisson-egyenletet:

$$-\Delta u = f.$$

Eddig erre az egyenletre úgy gondoltunk, mint a

$$\partial_t u - \Delta u = f$$

hővezetési egyenlet stacionárius, azaz időtől független, esetére. Gondolhatunk azonban a Poisson-egyenletre úgy is, mint a

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f$$

hullámegyenlet stacionárius esetére. Képzeljük el például, hogy egy drótkeretet szappanos vízbe mártunk, és így egy szappanhártya képződik a kereten. Ekkor fizikai tanulmányainkból tudjuk, hogy a felületi feszültség hatására a hártya a lehető legkisebb felületű állapot elérésére törekszik. Ha a hártyát az $u(x, y)$ függvény Ω tartomány feletti grafikonjának tekintjük, akkor a hártya felszíne

$$A = \int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} u(x, y)|^2}\, dx\, dy,$$

így kis kitérések esetén a

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

Taylor-polinom közelítést használva

$$A \approx \int_\Omega \left(1 + \frac{1}{2} |\operatorname{grad} u(x, y)|^2\right) dx\, dy.$$

Ezt azt jelenti, hogy a hártya által felvett állapotban várhatóan a

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\operatorname{grad} u(x, y)|^2 \; dx\, dy$$

integrál minimális lesz. Ez az integrál valójában nem más, mint a hártya potenciális energiájának konstansszorosa. A potenciális energia ugyanis az az enregiamennyiség, amely ahhoz szükséges, hogy az egyensúlyi helyzetből az adott helyzetbe hozzuk a hártyát. Az ehhez szükséges munka arányos a felszínváltozással, amely

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\operatorname{grad} u(x, y)|^2}\, dx\, dy - \int_\Omega 1\, dx\, dy \approx \frac{1}{2} \int_\Omega |\operatorname{grad} u(x, y)|^2 .$$

Mindezek alapján, ha a hártyára úgy tekinthetünk, mint a hullámegyenlet stacionárius megoldására, amelynek értékeit előírjuk a peremen, ez a drótkeret, akkor egy *Dirichlet-feladatot* kapunk, amely valójában egy *energiaminimalizációs problémával* ekvivalens. Ezt matematikailag a következőképpen fogalmazhatjuk meg pontosan.
Vezessük be az

$$E(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} p \, |\mathrm{grad}\, u|^2 - fu \right) \tag{7.10}$$

energia jellegű mennyiséget, amelyet szokás *Dirichlet-energiának* is nevezni. A Dirichlet-energiában megjelenő

$$\int_\Omega fu$$

tagra gondolhatunk úgy, mint az f sűrűségfüggvény által meghatározott külső erő munkájára. A Dirichlet-integrált az úgynevezett *megengedhető állapotok* halmazán fogjuk vizsgálni:

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = \varphi \right\},$$

ahol $\varphi \in C(\partial\Omega)$ rögzített függvény.

7.30. Tétel (Dirichlet-elv)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \, \mathrm{grad}\, u) = f & \Omega\text{-}ban, \\ \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = \varphi. \end{cases} \tag{7.11}$$

klasszikus első peremérték-feladatnak, akkor

$$E(u) = \min_{\tilde{u} \in \mathcal{A}} E(\tilde{u}). \tag{7.12}$$

Fordítva, ha az $u \in \mathcal{A}$ függvényre a (7.12) *egyenlőség teljesül, akkor u megoldása a* (7.11) *feladatnak.*

Bizonyítás. A rövidség kedvéért legyen

$$Lu = -\operatorname{div}(p \, \mathrm{grad}\, u).$$

Ha $u \in C^2(\overline{\Omega})$ megoldása a (7.11) feladatnak, akkor minden $w \in \mathcal{A}$ függvényre $(u - w)|_{\partial\Omega} = 0$, így az első Green-formula alapján

$$0 = \int_\Omega (Lu - f)(w - u) = \int_\Omega \big(p \, \mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, w - |\mathrm{grad}\, u|^2 - fw + fu \big),$$

ahonnan a
$$\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w \leq \frac{1}{2}\left(|\operatorname{grad} u|^2 + |\operatorname{grad} w|^2\right)$$
egyenlőtlenség és $p > 0$ felhasználásával
$$0 \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}p\,|\operatorname{grad} w|^2 - fw\right) - \int_\Omega \left(\frac{1}{2}p\,|\operatorname{grad} u|^2 - fu\right)$$
adódik. Ez átrendezve éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $w \in \mathcal{A}$ esetén $E(w) \geq E(u)$, vagyis (7.12) teljesül.
Fordítva, tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{A}$ esetén teljesül a (7.12) egyenlőség. Legyen tetszőleges rögzített $w \in C^2(\overline{\Omega})$, amelyre $w|_{\partial\Omega} = 0$. Ekkor $u + \tau w \in \mathcal{A}$, így a
$$J \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad J(\tau) = E(u + \tau w)$$
hozzárendeléssel értelmezett függvénynek a 0-ban szükségképpen minimuma van. Mivel
$$J(\tau) - J(0) = E(u + \tau w) - E(u) =$$
$$= \tau \int_\Omega \left(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w + \frac{1}{2}\tau p\,|\operatorname{grad} w|^2 - fw\right),$$
így
$$\lim_{\tau \to 0} \frac{J(\tau) - J(0)}{\tau} = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big),$$
vagyis a J függvény a 0-ban deriválható és
$$J'(0) = \int_\Omega \big(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big),$$
ami szükségképpen 0, hiszen J-nek a 0-ban minimuma van. Mivel $w|_{\partial\Omega} = 0$, azért
$$\int_\Omega (Lu - f)w = \int_\Omega \big(p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w - fw\big) = 0$$
teljesül minden fenti w esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha $Lu - f = 0$, amit bizonyítanunk kellett. □

7.31. *Történeti megjegyzés.* A Dirichlet-elvet Dirichlet 1850-ben írta le, az elv elnevezése Bernhard Riemanntól (1826–1866) származik, aki Dirichlet berlini előadásain hallott róla. Riemann az elvet tetszőleges minimalizálási problémára fogalmazta meg és alkalmazta. Később 1870-ben Weierstrass példát mutatott olyan esetre, amikor nem létezik minimum (lásd a 7.32. Példát és a [96] cikket), ezzel felhívva a figyelmet az elvvel kapcsolatos problémákra, amelyek ezt követően fontos új kutatási területeket nyitottak meg, lásd például a Szoboljev-terek kialakulásáról szóló 12.30. Megjegyzést. Végül megemlítjük, hogy valójában már George Green (1793–1841) 1833-ban, Carl Friedrich Gauss (1777–1855) 1840-ben, később pedig 1847-ben William Thomson (1824–1907) ugyancsak kimondta az elvet (ezért szokás Thomson-féle elvnek is hívni).

7.32. Példa (Weierstrass)**.** Tekintsük a következő $\mathcal{J}\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ funkcionált:

$$\mathcal{J}(u) := \int_{-1}^{1} x^2 (u'(x))^2 \, dx,$$

ahol a megengedett állapotok halmaza

$$\mathcal{K} := \{u \in C^1([-1,1]) : u(-1) = a, u(1) = b\} \quad (a \neq b).$$

Ekkor nyilvánvalóan $\mathcal{I}(u) \geq 0$ minden $u \in \mathcal{K}$ esetén. Ezenkívül az

$$u_\varepsilon(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, x \in [-1,1])$$

függvényekre $u_\varepsilon \in \mathcal{K}$, továbbá

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u_\varepsilon) &= \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon x^2}{(x^2+\varepsilon^2)^2} \, dx < \\ &< \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \, dx = \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} 0.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\inf_{\sqcap \in \mathcal{K}} \mathcal{J} = 0,$$

azonban nem létezik olyan $u \in \mathcal{K}$, amelyre egyenlőség állna fent. Valóban, ekkor szükségképpen $u' = 0$, vagyis u konstansfüggvény, de ez ellentmond az $u(-1) = a \neq b = u(1)$ feltételnek.

7.4. Klasszikus sajátérték-feladatok

A klasszikus peremérték-feladatok kapcsán értelmeztük a következő $L\colon D(L) \subset \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ lineáris operátort:

$$\begin{gathered} D(L) := \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) : Lu \in L^2(\Omega), gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\right\}, \\ Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu. \end{gathered} \tag{7.13}$$

A 7.27. Megjegyzésben láttuk, hogy az L operátor pozitív, vagyis

$$\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \text{minden } u \in D(L) \text{ esetén.}$$

A következőkben az L operátor sajátértékeivel és sajátfüggvényivel foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ számot és ehhez $u \in D(L)$, $u \neq 0$ függvényt keresünk, amelyre

$$Lu = \lambda u. \tag{7.14}$$

Az alábbiakban pontosan megfogalmazzuk, mit értünk klasszikus sajátérték-feladatokon.

7.4.1. A klasszikus feladatok kitűzése

A klasszikus sajátérték-feladatok általánosan a következő alakban írhatók fel: keresendő $\lambda \in \mathbb{R}$ és $u \neq 0$ megfelelő simaságú függvény, amelyre

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u & \Omega\text{-ban,} \\ \quad \text{homogén peremfeltétel} & \partial\Omega\text{-n.} \end{cases} \tag{7.15}$$

Célszerű rögtön a harmadik peremfeltétel segítségével megfogalmazni a definíciót.

7.33. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, $p \in \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{\Omega})$, továbbá $f \in C(\Omega)$, $g, h, \varphi \in C(\partial\Omega)$ adott függvények. A *klasszikus harmadik sajátérték-feladatban* olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ számot és $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $u \neq 0$ függvényt keresünk, amelyekre:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = \lambda u & \Omega\text{-ban,} \\ \quad gu|_{\partial\Omega} + h\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Ekkor a λ számot a sajátérték-feladat *sajátértékének*, az u függvényt pedig a probléma *sajátfüggvényének* nevezzük.

7.34. *Megjegyzés.* A $g = 0$, $h = 1$ esetben a klasszikus harmadik sajátérték-feladat speciális eseteként kapjuk a *klasszikus második sajátérték-feladatot*. A $g = 1$, $h = 0$ esetben pedig a *klasszikus első sajátérték-feladatot* nyerjük, ekkor a tartomány regularitására vonatkozó feltétel elhagyható, illetve a sajátfüggvényeket a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ térben kereshetjük.

Világos, hogy a klasszikus sajátérték-feladatok az L lineáris operátorra vonatkozó (7.14) sajátértékfeladattal ekvivalensek, ekkor az $Lu \in L^2(\Omega)$ feltétel automatikusan teljesül.

A $\lambda = 0$ esetben a klasszikus sajátérték-feladatból a homogén jobb oldalú és homogén peremfeltételű klasszikus peremérték-feladatot nyerjük. Ha ennek csak az azonosan 0 függvény a megoldása, akkor a klasszikus peremérték-feladat megoldása egyértelmű (más szóval legfeljebb egy megoldása lehet). Ezt érdemes egy állításban kimondanunk.

7.35. Állítás. *A klasszikus peremérték-feladatok megoldása pontosan akkor egyértelmű, ha $\lambda = 0$ nem sajátértéke a megfelelő klasszikus sajátérték-feladatnak.*

A sajátértékekkel kapcsolatban a következő tételt fogalmazhatjuk meg.

7.36. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$, amelyekre $p > 0, q \geq 0$, továbbá $g, h \in C(\partial\Omega)$, amelyekre $gh \geq 0$ és $g + h \neq 0$. Ekkor*

- *az $L\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ operátor szimmetrikus és pozitív, legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok sajátértéke lehet, ezek nemnegatívak, és a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények ortogonálisak $L^2(\Omega)$-ban;*
- *$\lambda = 0$ csak a $q = 0$, $g = 0$ esetben, azaz a második peremérték-feladat probléma esetében sajátérték, és ekkor csak az azonosan konstans függvények a hozzá tartozó sajátfüggvények.*

Bizonyítás. Az L operátor szimmetriájához a második Green-formulát alkalmazzuk:

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} p(v\partial_\nu u - v\partial_\nu u)\, d\sigma, \tag{7.16}$$

továbbá a homogén harmadik peremfeltétel, illetve a $p > 0$, $gh \geq 0$, $g+h \neq 0$ feltevések figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$-pv\partial_\nu u(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h(x) = 0, \\ p\frac{g}{h}uv, & \text{ha } h(x) \neq 0. \end{cases}$$

Emiatt a (7.16) egyenlőség bal oldala 0-val egyenlő, tehát $\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = = \langle u, Lv\rangle_{L^2(\Omega)}$, vagyis L szimmetrikus. A pozitivitás a 7.23. Tételben már igazoltuk. A pozitivitásból adódóan az L operátor sajátértékei nemnegatívak, a különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvények merőlegesek $L^2(\Omega)$-ban, ezért legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok különböző sajátértéke lehet L-nek (hiszen $L^2(\Omega)$ szeparábilis, vagyis egy lineárisan független rendszer elemszáma legfeljebb megszámlálhatóan végtelen). A $\lambda = 0$ pontosan akkor sajátérték, ha $\langle Lu, u\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$, és ez, amint a 7.23. Tétel bizonyításában láttuk, csak a $q = 0$, $g = 0$ esetben lehetséges, és ekkor szükségképpen u tetszőleges konstansfüggvény. □

7.37. *Megjegyzés.* Bizonyos feltételek mellett igazolható, hogy pontosan megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték létezik, ezek véges rangúak, csak a $+\infty$-ben torlódnak, továbbá a sajátfüggvények ortogonális rendszere teljes az $L^2(\Omega)$ térben.

7.4.2. Sajátértékek, a változók szétválasztásának módszere

Speciális tartományok esetében könnyen meghatározhatjuk a $-\Delta$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit. Kezdjük az egydimenziós esettel!

Egydimenziós sajátértékek

Legyen $a > 0$, és határozzuk meg az $\Omega = (0, a)$ intervallumon az egydimenziós $-\Delta$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit homogén Dirichlet- és Neumann-peremfeltételek mellett. Legyen tehát

$$D(L) = \big\{u \in C^2(0, a) \cap C([0, a]) : u(0) = u(a) = 0\big\}, \quad Lu = -u'',$$

és keressük azokat a $\lambda \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekhez létezik $u \in D(L)$, $u \neq 0$ úgy, hogy $Lu = -\lambda u$, azaz $-u'' = \lambda u$. Ehhez hozzávéve az operátor értelmezési tartományában szereplő peremfeltételt, az alábbi jól ismert egydimenziós peremérték-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0, a)), \\ \quad u(0) = 0, \\ \quad u(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet megoldása λ előjelétől függően

$$u(x) = \begin{cases} c_1 \sin\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x, & \text{ha } \lambda > 0, \\ c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}x} + c_2 e^{-\sqrt{|\lambda|}x}, & \text{ha } \lambda < 0, \\ c_1 x + c_2, & \text{ha } \lambda = 0. \end{cases} \tag{7.17}$$

(Valójában a fenti függvények között, a látszat ellenére, szoros kapcsolat van: mindegyik az $\alpha e^{\sqrt{-\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ függvényből származik, ahol α, β komplex számok. Ha $\lambda < 0$, akkor visszakapjuk az exponenciális függvények lineáris kombinációját, amely valójában szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvények lineáris kombinációja. A $\lambda > 0$ esetben a kitevőben tisztán képzetes szám áll, így ekkor a szinusz és koszinusz függvények lineáris kombinációját nyerjük. A $\lambda = 0$ eset $\lambda \to 0$ határátmenettel kapható. Ekkor nyerjük a konstans függvényeket, valamint az $\frac{1}{\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}x} - e^{-\sqrt{-\lambda}x})$ hányadosból (amely ugyancsak megoldás) $\lambda \to 0$ esetén adódó $\text{const} \cdot x$ függvényeket.)

Vegyük most szemügyre a peremfeltételeket! A $\lambda = 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 a = 0$, azaz $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. A $\lambda < 0$ esetben $u(0) = 0$ miatt $c_1 + c_2 = 0$, így $u(a) = 0$ folytán $c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - c_1 e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Marad a $\lambda > 0$ eset. Ekkor $u(0) = 0$ miatt $c_2 \cos 0 = 0$, vagyis $c_2 = 0$. Másrészt $u(a) = 0$ folytán $\sin \sqrt{\lambda} a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda} a = k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ez azt jelenti, hogy $\lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, ekkor $u(x) = \sin \frac{k\pi}{a} x$, ahol k a pozitív egész számok halmazát futja be, tehát a sajátértékek mind pozitívak és megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van. Jól ismert (például Fourier-analízisből), hogy a szinusz-rendszer ortogonális $L^2(0,a)$-ban. Normáljuk le az előbb kapott u függvényeket, ekkor nyerjük az L operátor $L^2(0,a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert. A kétszeres szög koszinuszára vonatkozó $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ összefüggés alapján $\sin^2 \varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$ adódik. Ebből következően

$$\int_0^a \sin^2 \frac{k\pi}{a} x \, dx = \int_0^a \frac{1 - \cos \frac{2k\pi}{a} x}{2} \, dx = \frac{a}{2} - \frac{a}{4k\pi} \left[\sin \frac{2k\pi}{a} \right]_{x=0}^{a} = \frac{a}{2}.$$

7.38. Következmény. *Tekintsük az egydimenziós $-\Delta$ operátort az $\Omega = (0, a)$ intervallumon homogén Dirichlet-peremfeltétel esetén, azaz*

$$D(L) = \left\{ u \in C^2(0,a) \cap C([0,a]) : u(0) = u(a) = 0 \right\}, \quad Lu = -u''.$$

Ekkor az operátor sajátértékei és sajátfüggvényei a következők:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2, \qquad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi}{a} x \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Tekintsük most a homogén Neumann-peremfeltétel esetét, azaz

$$D(L) = \left\{ u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u'(a) = 0 \right\}, \quad Lu = -u''.$$

Ekkor a sajátértékfeladat a következő jól ismert egydimenziós peremértékfeladatra vezethető vissza:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in (0,a)), \\ \quad u'(0) = 0, \\ \quad u'(a) = 0. \end{cases}$$

A differenciálegyenlet λ előjelétől függő megoldásai a 7.17 függvények. A peremfeltételeket figyelembe véve, $\lambda = 0$ esetén $c_1 = 0$ adódik, azaz $u \equiv c_2$. A $\lambda < 0$ esetben $u'(0) = 0$ miatt $\sqrt{|\lambda|}(c_1 - c_2) = 0$, azaz $c_1 = c_2$, így $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{|\lambda|} c_1 e^{\sqrt{|\lambda|}a} - e^{-\sqrt{|\lambda|}a} = 0$, ezért $c_1 = 0$, tehát $u \equiv 0$. Végül a $\lambda > 0$

esetben $u'(0) = 0$ miatt $\sqrt{\lambda}c_1 \cos 0 = 0$, így $c_1 = 0$. Másrészt $u'(a) = 0$ folytán $\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a = 0$, következésképpen $\sqrt{\lambda}a = k\pi$, ahol k pozitív egész szám (hiszen a $\lambda > 0$ esetet vizsgáljuk). Ekkor $u(x) = \cos \frac{k\pi}{a}x$, ahol $k = 0$ választással a $\lambda = 0$ esetben kapott konstans függvényeket nyerjük. A sajátértékek tehát nemnegatívak, és megszámlálhatóan végtelen sok sajátérték van (sőt, a 0 sajátérték egyszeres és a konstansfüggvények a hozzá tartozó sajátfüggvények). Jól ismert (megint Fourier-analízisből), hogy a koszinusz-rendszer ortogonális $L^2(0, a)$-ban, így az előbbi függvényeket lenormálva nyerjük az L operátor $L^2(0, a)$-ban teljes ortonormált sajátfüggvényrendszerét és a hozzá tartozó sajátértékrendszert.

7.39. Következmény. *Tekintsük az egydimenziós $-\Delta$ operátor az $\Omega = (0, a)$ intervallumon homogén Neumann-peremfeltétel esetén, azaz*

$$D(L) = \big\{u \in C^2(0, a) \cap C([0, a]) : u'(0) = u'(a) = 0\big\}, \quad Lu = -u''.$$

Ekkor az operátor sajátértékei és sajátfüggvényei a következők:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2, \qquad u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1,2,\dots).$$

Kétdimenziós sajátértékek

Térjünk most rá a kétdimenziós esetre, legyen a tartományunk egy téglalap, $T = (0, a) \times (0, b) \subset \mathbb{R}^2$, ahol $a, b > 0$. Tekintsük a $-\Delta$ operátort T-n homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett:

$$D(L) = \big\{u \in C^2(T) \cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0\big\}, \quad Lu = -\Delta u,$$

és határozzuk meg L sajátértékeit és sajátfüggvényeit. A *változók szétválasztásának módszerét* használjuk, azaz a sajátfüggvényeket

$$u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$$

alakban keressük. Ekkor az $Lu = \lambda u$ sajátérték-egyenlet lényegében a következő differenciálegyenletet jelenti a T kétdimenziós intervallumon:

$$-v''(x)w(y) - v(x)w''(y) = \lambda v(x)w(y).$$

Feltételezve, hogy $v(x) \cdot w(y) \neq 0$, formális leosztás és rendezés után

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda + \frac{w''(y)}{w(y)}$$

adódik. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlőség bal oldala csak x-től függ, a jobb oldal pedig csak y-tól. Mivel az egyenlőségnek minden $(x, y) \in T$ esetén teljesülnie kell, ezért ez csak úgy lehet, ha mindkét oldalon konstans függvény áll, azaz létezik $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $-\dfrac{v''(x)}{v(x)} = \alpha$, $-\dfrac{w''(y)}{w(y)} = \beta$ és $\alpha + \beta = \lambda$. Az operátor értelmezési tartományában lévő peremfeltételt felhasználva a $v(0) = v(a) = 0$, $w(0) = w(b) = 0$ homogén Dirichlet-peremfeltételeket nyerjük. Ez azt jelenti, hogy v sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az egydimenziós $-\Delta$ operátornak homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett, tehát a 7.38. Következmény alapján $\alpha = \alpha_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$ és $v(x) = v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi}{a} x$. Hasonlóan, w is sajátfüggvénye ugyanennek az operátornak $a = b$ választással, tehát $\beta = \beta_k = \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2$ és $w(x) = w_k(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{k\pi}{b} y$. Ennek alapján az L operátor következő megszámlálható sok sajátértékét nyertük:

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \quad (k, l = 1,2,\dots),$$

továbbá a megfelelő ortonormált sajátfüggvényrendszer

$$u_{k,l}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \quad (k, l = 1,2,\dots).$$

Belátható, hogy ez az ortonormált rendszer teljes $L^2(T)$-ben, mivel a v_k, illetve w_k függvények rendszere teljes $L^2(0, a)$-ban, illetve $L^2(0, b)$-ben. Ezért megkaptuk a kétdimenziós feladat összes sajátértékét (és lényegében összes sajátfüggvényét). Jegyezzük meg, hogy a levezetés során való osztásnál feltételeztük, hogy nem osztunk nullával, ezért a kapott megoldások helyességét még ellenőriznünk kell. Világos azonban, hogy a kapott függvények a T kétdimenziós intervallumban sehol sem egyenlők nullával, így érvényes a fenti levezetés.

7.40. Következmény. *Tekintsük a kétdimenziós $-\Delta$ operátort az $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ téglalapon homogén Neumann-peremfeltétel esetén, azaz*

$$D(L) = \left\{ u \in C^2(T) \cap C(\overline{T}) : u|_{\partial T} = 0 \right\}, \quad Lu = -\Delta u.$$

Ekkor az operátor sajátértékei

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \quad (k, l = 1,2,\dots),$$

továbbá a megfelelő ($L^2(T)$-ben teljes) ortonormált sajátfüggvényrendszer

$$u_{k,l}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \quad (k, l = 1,2,\dots).$$

A fentiekhez hasonló módon nyerjük a kétdimenziós $-\Delta$ operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit homogén Neumann-peremfeltétel esetében. Ekkor

$\partial_\nu u|_{\partial T} = -v(x)w'(0)$ a $(0,a)\times\{0\}$ oldalon, $\partial_\nu u|_{\partial T} = v(x)w'(b)$ a $(0,a)\times\{b\}$ oldalon, $\partial_\nu u|_{\partial T} = -v'(0)w(y)$ a $\{0\}\times(0,b)$ oldalon és $\partial_\nu u|_{\partial T} = v'(a)w(y)$ az $\{a\}\times(0,b)$ oldalon. Ez azt jelenti, hogy $v'(0) = v'(a) = 0$ és $w'(0) = w'(b) = 0$. Azt kaptuk tehát, hogy a v függvény sajátfüggvénye, α pedig sajátértéke az egydimenziós $-\Delta$ operátornak Neumann-peremfeltétel mellett. Hasonlóan, w sajátfüggvénye, β pedig sajátértéke ugyanennek az operátornak. Így kapjuk az alábbi következményt.

7.41. Következmény. *Tekintsük a kétdimenziós $-\Delta$ operátort az $\Omega = (0,a)\times(0,b)$ téglalapon homogén Neumann-peremfeltétel esetén, azaz*

$$D(L) = \left\{u \in C^2(T)\cap C^1(\overline{T}) : \partial_\nu u|_{\partial T} = 0\right\}, \quad Lu = -\Delta u,$$

Ekkor az operátor sajátértékei

$$\lambda_{k,l} = \pi^2\left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}\right) \quad (k,l = 0{,}1,\dots),$$

valamint ($L^2(T)$-ben teljes) ortonormált sajátfüggvényrendszere:

$$\begin{aligned}
u_{0,0}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{ab}},\\
u_{k,0}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\frac{k\pi}{a}x \quad (k = 1{,}2\dots),\\
u_{0,l}(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{ab}}\cos\frac{l\pi}{b}y \quad (k = 1{,}2,\dots),\\
u_{k,l}(x,y) &= \frac{2}{\sqrt{ab}}\cos\frac{k\pi}{a}x\cos\frac{l\pi}{b}y \quad (k,l = 1{,}2\dots).
\end{aligned}$$

7.4.3. Fourier-módszer

A Laplace-operátor egy adott tartományhoz és adott homogén peremfeltételhez tartozó sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek ismeretében módszert adhatunk peremérték-feladatok megoldására. Ezt először egy példán szemléltejük. Keressük meg a következő peremérték-feladat klasszikus megoldását:

$$\begin{cases} -u''(x) = 1 \quad (x \in (0,\pi)),\\ u(0) = 0,\\ u(\pi) = 0.\end{cases} \tag{7.18}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$u(x) = \frac{1}{2}x(\pi - x) \tag{7.19}$$

klasszikus megoldás és a 7.23. Tételből tudjuk, hogy u egyértelmű. Próbáljuk meg most u-t előállítani a homogén Dirichlet-peremfeltétellel ellátott egydimenziós $-\Delta$ operátor sajátfüggvényrendszerében, vagyis a szinuszrendszerben. Keressük tehát az u függvényt

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin kx$$

alakban. Tegyük fel, hogy a sor összegfüggvénye tagonként kétszer deriválható, ekkor

$$-u''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k k^2 \sin kx.$$

Az azonosan 1 függvényt is fejtsük sorba, a k-adik Fourier-együttható

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin kx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{\cos kx}{k} \right]_{x=0}^{\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1-(-1)^k}{k},$$

így

$$1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)\pi} \sin(2l+1)\pi.$$

A (7.18) peremérték-feladat alapján szükségképpen

$$\sum_{l=1}^{\infty} \xi_l l^2 \sin lx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)\pi} \sin(2l+1)\pi,$$

vagyis

$$\xi_l = \begin{cases} 0, & \text{ha } l \text{ páros}, \\ \dfrac{4}{(2l+1)^3\pi}, & \text{ha } l \text{ páratlan}, \end{cases}$$

azaz

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)^3\pi} \sin(2l+1)\pi. \tag{7.20}$$

Felmerül a kérdés, hogy a kapott sor tényleg tagonként differenciálható-e, jogosak voltak-e a fenti átalakítások. Világos, hogy

$$\left| \frac{4}{(2l+1)^3\pi} \sin(2l+1)\pi \right| \leq \frac{4}{(2l+1)^3\pi},$$

így a Weierstrass-kritérium miatt u sora abszolút és egyenletesen konvergens $[0,\pi]$-n, tehát u folytonos, és így a (7.18) peremfeltételek teljesülnek. Ezenkívül a tagonkénti deriválással nyert

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)^2} \cos(2l+1)\pi$$

sor ugyancsak egyenletesen konvergens $[0, \pi]$-n, tehát a tagonkénti deriválás jogos. Sőt, ismert, hogy

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{(2l+1)} \sin(2l+1)\pi$$

sor egyenletesen konvergens minden $[\delta, \pi - \delta]$ intervallumon, így a tagonkénti kétszeres deriválás ismét jogos. Azt kaptuk tehát, hogy a (7.20) sor alakban megadott u függvény klasszikus megoldása a (7.18) peremérték-feladatnak. Valójában nem nehéz ellenőrizni, hogy a sor éppen a (7.19) megoldás Fourier-sor alakja.

A fentiek alapján könnyen megfogalmazhatjuk a klasszikus peremérték-feladatok megoldásának sor alakban való előállításának módszerét.

Tegyük fel, hogy ismerjük a $-\Delta$ operátor egy adott tartományhoz és adott homogén peremfeltételhez tartozó sajátértékeit és sajátfüggvényeit és a következő peremérték-feladat megoldását keressük:

$$\begin{cases} Lu = f & \Omega\text{-ban}, \\ \text{homogén peremfeltétel} & \partial\Omega\text{-n}. \end{cases} \tag{7.21}$$

Tegyük fel, hogy az L operátorra vonatkozó klasszikus sajátérték-feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok nemnulla λ_k sajátértéke van, és ehhez tartozó u_k sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak. Ekkor a peremérték-feladat megoldását célszerű

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_k$$

alakban keresni. A sor megfelelő konvergenciája mellett a peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt pedig, feltéve, hogy a sor tagonként differenciálható,

$$Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k L u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \lambda_k u_k.$$

Írjuk fel az f függvényt is a sajátfüggvények bázisában

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k,$$

ekkor szükségképpen

$$\xi_k \lambda_k = c_k,$$

tehát

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k} u_k.$$

Felmerül a kérdés, hogy vajon a kapott megoldás vajon klasszikus megoldás-e, azaz kétszer differenciálható-e, illetve elvégezhető-e a tagonkénti deriválás. Ezekkel a kérdésekkel a későbbiekben részletesen foglalkozunk. Konkrét példákban azonban a módszer jól alkalmazható.
Végül jegyezzük meg, hogy ha nem homogén peremfeltétel adott, például $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, akkor első lépésként egy olyan $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvény célszerű keresni, amelyre $\Phi|_{\partial\Omega} = \varphi$. (Ha van megoldás, akkor van ilyen függvény.) Majd ezt követően az előbbi módszert az $v = u - \Phi$ függvényre alkalmazzuk.

7.42. Példa. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = x + y \quad ((x,y) \in (0,\pi)^2), \\ \quad u|_{\partial(0,\pi)^2} = 0. \end{cases}$$

A megoldást az operátor $L^2(T)$-ben ortonormált sajátfüggvény-rendszerében állítjuk elő. Ehhez írjuk fel az f függvényt is ebben a rendszerben: $f = \sum_{k,l=1}^{\infty} c_{k,l} u_{k,l}$, ahol $u_{k,l}$ a 7.40. Következményben szereplő függvényrendszer. A $c_{k,l}$ együtthatókat a következőképpen nyerjük:

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= \int_T f u_{k,l} = \int_0^\pi \int_0^\pi (x+y)\frac{2}{\pi} \sin kx \sin ly \, dx\, dy = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\pi x \sin kx\, dx \int_0^\pi \sin ly\, dy + \int_0^\pi y \sin ly\, dy \int_0^\pi \sin kx\, dx\right] = \\ &= \frac{4}{kl}\left((-1)^{k+1}(1-(-1)^l) + (-1)^{l+1}(1-(-1)^k)\right) =: \frac{4}{kl} w_{k,l}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\int_0^\pi \sin ly\, dy = \frac{1}{l}\left[-\cos ly\right]_{y=0}^{\pi} = \frac{1}{l}(1-(-1)^l),$$

valamint

$$\int_0^\pi x \sin kx\, dx = \frac{1}{k}\left[-x\cos kx\right]_{x=0}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^\pi \cos ky\, dy = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{k}. \tag{7.22}$$

Ennek alapján

$$u(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{4 w_{k,l}}{kl(k^2+l^2)} \cdot \frac{2}{\pi} \sin kx \sin ly.$$

Jegyezzük meg, hogy a fenti sor konvergenciája $L^2(T)$-ben értendő (valójában u klasszikus értelemben is megoldás, azonban ennek igazolása hosszadalmas).

7.5. Harmonikus függvények

Ebben a szakaszban a

$$-\Delta u = 0$$

Laplace-egyenlet kétszer folytonosan differenciálható megoldásaival foglalkozunk, amelyeket *harmonikus függvényeknek* hívunk.

7.43. Definíció. Ha az $u \in C^2(\Omega)$ függvényre $-\Delta u = 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, akkor u-t az Ω-n *harmonikus* függvénynek hívjuk. Ha $-\Delta u \leq 0$, akkor u-t *szubharmonikus* függvénynek hívjuk, a $-\Delta u \geq 0$ egyenlőtlenségnek eleget tevő függvényeket pedig *szuperharmonikus* függvénynek.

7.44. *Megjegyzés.* Míg a harmonikus függvények esetében a negatív előjelnek nincs szerepe, addig a szub- és szuperharonikus függvények elnevezése ezzel az előjellel válik logikussá („szub" jelentése „alatt", „szuper" jelentése „felett").

A harmonikus függvényeknek számos fontos tulajdonsága van, ezek közül a maximum- és minimumelveket, a középérték-tulajdonságot, illetve a kétdimenziós esetben a komplex függvényekkel való kapcsolatukat tárgyaljuk.

7.5.1. Maximum- és minimumelvek

A fizikában ismert tény, hogy egy szoba pontjainak stacionárius hőmérséklete legfeljebb akkora, mint a falakon mérhető maximális hőmérséklet. Sőt, ez nyilván akkor is igaz, ha a szobában hő nem keletkezik, csak esetleg elnyelődik, például télen kinyitjuk az ablakokat. Amennyiben hő keletkezik, mondjuk a szobában radiátorok vannak, akkor a szoba minden pontjának hőmérséklete legalább akkora, mint a falakon mért minimális hőmérséklet. E fizikailag természetesen adódó észrevételeket matematikailag az úgynevezett maximum- és minimumelvek fogalmazzák meg pontosan.

7.45. Tétel (Gyenge maximumelv Laplace-operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \leq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $-\Delta u < 0$ az Ω halmazon. Belátjuk, hogy ekkor teljesül az állítás, majd ebből határátmenettel kapjuk a $-\Delta u \leq 0$ esetet.
Indirekt tegyük fel, hogy $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$ (a maximumok korlátos és zárt halmazon léteznek), tehát létezik $x_0 \in \Omega$, amelyre $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Ekkor x_0 lokális maximumhely is egyben, sőt tetszőleges változóra szorítkozva is az. Ezért szükségképpen $\partial_j u(x_0) = 0$ és $\partial_j^2 u(x_0) \leq 0$, így $-\Delta u \geq 0$, ami

ellentmondás. Vegyük észre, hogy azt láttuk be, hogy $-\Delta u < 0$ esetén u a maximumát (kizárólag) a peremen veszi fel.
Legyen most $-\Delta u \leq 0$. Tekintsük az $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{x_1}$ függvényt, ahol $\varepsilon > 0$! Ekkor $-\Delta u \leq 0$ folytán

$$-\Delta u_\varepsilon(x) = -\Delta u(x) - \varepsilon e^{x_1} = -\varepsilon e^{x_1} < 0,$$

így az előzőek alapján

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon.$$

Már csak annyit kell belátnunk, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max_{\overline{\Omega}} u$ és $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max_{\partial\Omega} u$. Ez viszont következik abból, hogy $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{\Omega}$-on. □

7.46. *Megjegyzés.* A gyenge maximumelvnél valójában erősebb összefüggés is igaz (lásd a 7.57. Tételt): ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \leq$ ≤ 0 az Ω korlátos tartományon (fontos az összefüggőség!), továbbá u felveszi $\overline{\Omega}$-beli maximumát Ω egy belső pontjában, akkor u konstansfüggvény. Ha nem tesszük fel az összefüggőséget, akkor u az Ω minden egyes összefüggő komponensében valamilyen konstansfüggvény.

A gyenge maximumelvet a $(-u)$ függvényre alkalmazva kapjuk a *gyenge minimumelvet.*

7.47. Tétel (Gyenge minimumelv Laplace-operátorra)**.** *Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap$ $\cap\, C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\Delta u \geq 0$ az Ω korlátos tartományon, akkor*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

7.48. *Megjegyzés.* Hasonlóan az erős maximumelvhez, érvényes az erős minimumelv is: ha egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ szuperharmonikus függvény minimum felvétetik belső pontban és Ω korlátos tartomány (tehát összefüggő), akkor u szükségképpen konstansfüggvény.

A maximumelv bizonyítását könnyedén általánosíthatjuk a Laplace-operátor helyett az

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

alakú operátorra is, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Első lépésben a $q = 0$ esetet tekintjük.

7.49. Tétel (Gyenge maximumelv $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u \leq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Bizonyítás. Mivel

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = -p\Delta u - \sum_{j=1}^{n} \partial_j p \partial_j u,$$

ezért ha u a tartomány belsejében veszi fel a maximumát, akkor ott $\operatorname{grad} u = 0$ és $\Delta u \leq 0$, vagyis

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \geq 0.$$

Következésképpen $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) < 0$ esetén a maximum csak a peremen vétetik fel. Legyen most $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$, ekkor

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u_\varepsilon) = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \varepsilon\lambda(\lambda + \partial_1 p)e^{\lambda x_1} < -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u,$$

feltéve, hogy $\lambda > \max_{\overline{\Omega}} |\partial_1 p|$. Ekkor u_ε a tartomány peremén felveszi a maximumát, így $\varepsilon \to 0$ esetén az egyenletes konvergencia miatt szükségképpen u is. $\square$

7.50. Tétel (Gyenge maximumelv $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$ operátorra)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \leq 0$ az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \leq 0$. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+,$$

ahol $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$ az u függvény pozitív része.

Bizonyítás. Tekintsük a $V := \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ halmazt, amely u folytonossága miatt nyílt. Feltehető, hogy $V \neq \emptyset$, hiszen $V = \emptyset$ esetén u^+ azonosan 0, így a bizonyítandó összefüggés a nyilvánvaló $\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0$ egyenlőtlenségre egyszerűsödik.
Amennyiben $V \neq \emptyset$, akkor $x \in V$ esetén $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \leq -qu \leq 0$, így a 7.49. Tétel alapján

$$0 < \max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u.$$

Már csak annyit kell észrevennünk, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{V}} u,$$

illetve

$$\max_{\partial V} u = \max_{\partial\Omega} u^+,$$

ahonnan az állítás nyomban adódik. (Ez utóbbi egyenlőség abból következik, hogy ∂V-nek $\partial\Omega$-tól diszjunkt részén $u = 0$, különben $u > 0$ e pont egy környezetében, így nem lehet ∂V-beli.) $\square$

A 7.50. Tételt az u függvény helyett a $(-u)$-ra alkalmazva $u^- := (-u)^+$ jelöléssel kapjuk (vigyázzunk: u^- nemnegatív függvény!), hogy ha az $u \in C^2(\Omega) \cap \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \leq 0$ az Ω korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \leq 0$, akkor

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+,$$

azaz

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq -\max_{\partial\Omega} u^-.$$

Ezt összevetve a 7.50. Tétellel

$$-\max_{\partial\Omega} u^- \leq \min_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+,$$

így

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

A fordított egyenlőtlenség nyilvánvaló, ezért szükségképpen egyenlőség áll fenn.
A fentiek szerint tehát kaptuk:

7.51. Következmény. *Ha az $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$ az Ω korlátos tartományon, ahol $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \leq 0$, akkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

7.52. *Megjegyzés.* A maximumelv valójában általánosabban, egyenletesen elliptikus operátorok esetében is igaz:

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j \partial_j u + qu,$$

ahol $a_{jk}, b_j, q \in C(\overline{\Omega})$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ és $q \geq 0$, továbbá az a_{jk} együtthatókra teljesül az egyenletes ellipticitás 6.4. Definícióban megfogalmazott feltétele (lásd a 7.12. Feladatot).
A $q \leq 0$ esetben nem igaz hasonló állítás, hiszen például ha u az $u \mapsto \mapsto -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátor sajátfüggvénye homogén Dirichlet-peremfeltétel mellett, akkor $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - \lambda u = 0$, ahol $\lambda > 0$, mert a 7.36. Tétel szerint a $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)$ operátor sajátértékei első peremfeltétel mellett pozitívak, másrészt viszont $\max_{\partial\Omega} |u| = 0$, azonban $\max_{\overline{\Omega}} |u| \neq 0$.

7.5.2. A Dirichlet-feladat megoldásának egyértelműsége

A maximum- és minimumelvnek több fontos következménye van a Dirichlet-feladat megoldásaira nézve: a megoldás egyértelműsége és folytonos függése.

7.53. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \le 0$. Ha a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladatnak legfeljebb egy $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldása lehet, azaz a megoldás egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a peremérték-feladat megoldásai, ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre $-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$ az Ω tartományon, továbbá $u|_{\partial\Omega} = 0$, így a 7.51. Következmény miatt $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u| = 0$, tehát $u_1 = u_2$. □

7.54. Tétel (Folytonos függés)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \le 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, amellyel minden $f \in C(\overline{\Omega})$ és $g \in C(\partial\Omega)$ esetén a*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & \Omega\text{-}n, \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

első peremérték-feladat egyértelmű $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ megoldására

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \le \max_{\partial\Omega} |g| + C \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

Bizonyítás. Legyen

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu.$$

Válasszunk egy tetszőleges Φ függvényt, amelyre $\Phi \ge 0$ és $L\Phi \le -1$ az Ω halmazon, például a $\Phi(x) = e^{\lambda x_1}$ függvény elég nagy λ-t választva megfelelő lesz, hiszen

$$L(e^{\lambda x_1}) = \lambda(-p\lambda + \partial_1 p + q)e^{\lambda x_1}.$$

Tekintsük a

$$v(x) = u(x) + \Phi(x) \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \quad \text{és} \quad \tilde{v}(x) = -u(x) - \Phi(x) \max_{\overline{\Omega}} |Lu|,$$

függvényeket, ekkor

$$Lv = Lu + L\Phi \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \le 0$$

és hasonlóan

$$L\tilde{v} = -Lu - L\Phi \max_{\overline{\Omega}} |Lu| \geq 0.$$

A v és $\tilde{v}$ függvényekre érvényes tehát a gyenge maximum- és minimumelv, így

$$\max_{\overline{\Omega}} v \leq \max_{\partial\Omega} v^+ \leq \max_{\overline{\Omega}} |u| + \max_{\overline{\Omega}} |\Phi| \max_{\overline{\Omega}} |Lu|,$$

valamint

$$\max_{\overline{\Omega}} \tilde{v} \leq \max_{\partial\Omega} \tilde{v}^+ \leq \max_{\partial\Omega} |\tilde{v}| \leq \max_{\overline{\Omega}} |u| + \max_{\overline{\Omega}} |\Phi| \max_{\overline{\Omega}} |Lu|.$$

Mivel $u \leq v$ és $-u \leq \tilde{v}$, ezért a fenti egyenlőtlenségekből a $C = \max_{\overline{\Omega}} |\Phi|$ konstanssal kapjuk, hogy

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + C \max_{\overline{\Omega}} |Lu|.$$

□

7.5.3. Harmonikus függvények további tulajdonságai

A maximum- és minimumelvek mellett a harmonikus függvényekre érvényes egy másik fontos összefüggés, a középérték-tulajdonság: egy harmonikus függvénynek tetszőleges gömbön vett átlagintegrálja a függvény középpontbeli értékével egyenlő; ugyanez igaz gömb helyett gömbfelületen vett átlagintegrállal.

7.55. Tétel (Középérték-tulajdonság)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega)$ harmonikus függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon. Ekkor tetszőleges $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömb esetén*

$$u(x_0) = \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx = \frac{1}{A(B(x_0, R))} \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x,$$

ahol $V(B(x_0, R)) = \omega_n R^n/n$ és $A(B(x_0, R)) = \omega_n R^{n-1}$ az n-dimenziós R sugarú gömb térfogata és a gömbfelület felszíne.

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy a gömbön és a gömbfelületen vett átlagintegrálok megegyeznek. Ehhez alkalmazzuk Green második formuláját az u harmonikus és a $v(x) = |x - x_0|^2$ függvényre a $B(x_0, R)$ tartományon. Ekkor $\Delta v = 2n$, továbbá az $S(x_0, R)$ gömbfelületen $\partial_\nu v = \partial_{|x-x_0|} v(x) = 2|x-x_0| = 2R$, tehát

$$-2n \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx = R^2 \int_{S(x_0,R)} \partial_\nu u(x)\, d\sigma_x - 2R \int_{S(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x. \tag{7.23}$$

Másrészt ugyancsak a második Green-formulából a harmonikus u és $v = 1$ választással azt kapjuk, hogy

$$\int_{S(x_0,R)} \partial_\nu u \, d\sigma = 0, \tag{7.24}$$

és így a (7.23) egyenlőségből

$$\frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x$$

adódik, amit igazolni akartunk.
Most megmutatjuk, hogy az x_0 körüli különböző sugarú gömbfelületen vett átlagintegrálok állandók. Valóban, ehhez alkalmazzuk Green második formuláját a $B(0,R)\setminus\overline{B(0,\varrho)}$ gyűrűtartományon az u harmonikus, és az $x \mapsto E(x-$ $-x_0)$ függvényre, ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása (lásd a 7.15. Definíciót). Tudjuk, hogy $\Delta E = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tartományon, ezért $\Delta(x \mapsto E(x-$ $-x_0) = 0$ a gyűrűtartományon, továbbá az $S(x_0,R)$ peremen

$$\partial_\nu(x \mapsto E(x-x_0)) = -\partial_{|x-x_0|} E(x-x_0) = -\frac{1}{\omega_n |x-x_0|^{n-1}} = -\frac{1}{\omega_n R^{n-1}}.$$

Az $S(x_0,\varrho)$ peremen a normális irányú derivált x_0 felé mutat (lásd a 7.2. ábrát), ezért

$$\partial_\nu(x \mapsto E(x-x_0))|_{S(x_0,\varrho)} = \frac{1}{\omega_n \varrho^{n-1}}.$$

Most már felírhatjuk a Green-formulát, így

$$\int_{S(x_0,R)} \left(-\frac{1}{\omega_n R^{n-1}} u + E(R)\partial_\nu u\right) d\sigma = \int_{S(x_0,\varrho)} \left(-\frac{1}{\omega_n \varrho^{n-1}} u + E(\varrho)\partial_\nu u\right) d\sigma.$$

Felhasználva a (7.24) összefüggést, amely nyilván az $S(x_0,\varrho)$ gömbfelszínen is érvényes, végül

$$\frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S(x_0,R)} u\, d\sigma = \frac{1}{\omega_n \varrho^{n-1}} \int_{S(x_0,\varrho)} u\, d\sigma \tag{7.25}$$

adódik, ami valóban azt jelenti, hogy az x_0 körüli koncentrikus gömbfelületeken vett átlagintegrálok értéke állandó. Mivel

$$\min_{x\in S(x_0,\varrho)} u \le \frac{1}{A(B(x_0,r))} \int_{S(x_0,r)} u(x)\, d\sigma_x \le \max_{x\in S(x_0,r)} u(x), \tag{7.26}$$

ezért a (7.25) összefüggésből $\varrho \to 0+$ esetén a bizonyítandó

$$u(x_0) = \frac{1}{A(B(x_0,R))} \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x$$

állítást nyerjük. □

7.56. *Megjegyzés.* A tételt és a bizonyítást nem nehéz általánosítani szubharmonikus függvényekre is, ekkor az átlagintegrálok legalább akkorák, mint a középpontbeli függvényérték, lásd a 7.19. Feladatot.
A középérték-tulajdonság valójában karakterizálja a harmonikus függvényeket. Ha az $u \in C(\Omega)$ függvény minden $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömbön rendelkezik ugyanazzal a középérték-tulajdonsággal, akkor u szükségképpen harmonikus Ω-n.

A középérték-tulajdonságból az erős maximumelv könnyen levezethető.

7.57. Következmény (Erős maximumelv)**.** *Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega) \cap \cap C(\overline{\Omega})$ harmonikus függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban. Ekkor*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Sőt, ha $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ valamely $x_0 \in \Omega$ pontra, akkor u konstansfüggvény.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $x_0 \in \Omega$ pontra $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u = M$. Ekkor elég kis R-et választva $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$, így a középérték-tulajdonság alapján

$$\begin{aligned} M = u(x_0) &= \frac{1}{V(B(x_0, R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{V(B(x_0, R))} (M \cdot V(B(x_0, R))) = M. \end{aligned}$$

Következésképpen $u(x) = M$ az egész $B(x_0, R)$ gömbön, így a $H = \{x \in \Omega : : u(x) = M\}$ halmaz nyílt Ω-ban. A H halmaz természetesen zárt is Ω-ban, azonban Ω összefüggő (itt lényeges, hogy Ω tartomány!), ezért ez csak úgy lehetséges, ha $H = \Omega$. ☐

7.58. *Megjegyzés.* Valójában elég feltenni, hogy u szubharmonikus függvény, az erős maximumelv ekkor is érvényes, lásd a 7.20. Feladatot.

A kétváltozós harmonikus függvények szoros kapcsolatban állnak a komplex értelemben differenciálható komplex függvényekkel. Ismeretes, hogy egy $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ alakban megadott komplex függvény pontosan akkor differenciálható komplex értelemben, ha u és v valós értelemben differenciálható és teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek:

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Azt is tudjuk, hogy egy komplex függvény, ha differenciálható egy tartományon, akkor ott analitikus, tehát végtelen sokszor differenciálható, és előáll hatványsor alakban. Ekkor

$$\partial_x^2 u = \partial_x \partial_y v, \qquad \partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v,$$

és így a Young-tétel miatt

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f valós része harmonikus függvény. Ez valójában megfordítva is igaz, érvényes a következő tétel.

7.59. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Az $u \in C^2(\Omega)$ függvény pontosan akkor harmonikus Ω-n, ha minden pontnak van olyan környezete és a környezetben olyan $f(z)$ reguláris függvény, hogy $u = \operatorname{Re} f$. Ha Ω egyszeresen összefüggő, akkor lokális helyett globális mondható.*

7.60. *Megjegyzés.* A tétel valós rész helyett képzetes résszel is igaz.

A tételnek számos következménye van kétváltozós harmonikus függvényekre nézve. Nevezetesen, harmonikus függvények végtelen sokszor differenciálhatók és előállnak hatványsor alakban. Érvényes a Liouville-tétel is, vagyis $\mathbb{R}^2$-en értelmezett korlátos harmonikus függvény szükségképpen konstans. Valójában az iménti eredmények mindegyike két dimenzió helyett tetszőleges véges dimenzióban is igaz. Végül megemlítjük, hogy a középérték-tulajdonság két dimenzióban nem más, mint a reguláris függvények Cauchy-integrálformulájának egyszerű következménye. Valóban, $u = \operatorname{Re} f$, továbbá a Cauchy-tételből következően

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{S(z,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(z + Re^{\mathrm{i}t})}{Re^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i} Re^{\mathrm{i}t}\, dt = \\ &= \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} f(z + Re^{\mathrm{i}t}) R\, dt, \end{aligned}$$

így valós részt véve

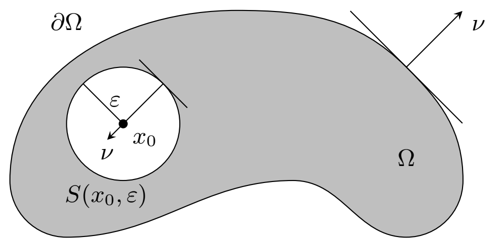
$$u(z) = \frac{1}{2R\pi} \int_0^{2\pi} f(x + R\cos t, y + R\sin t) R\, dt = \frac{1}{\omega_2 R} \int_{S(z,R)} f\, d\sigma.$$

7.6. Green-függvény

Ebben a szakaszban a $-\Delta$ operátorra vonatkozó Dirichlet-feladat megoldásait állítjuk elő az alapmegoldás segítségével. Először egy hasznos segédeszközt, a harmadik Green-formulát igazoljuk.

7.6.1. Green harmadik formulája

A harmadik Green-formula egy u függvénynek egy adott x_0 pontbeli értékét állítja elő az alapmegoldás, az u és egy tetszőleges, sima w függvény segítségével.



7.3. ábra. „Lyukas” tartomány

7.61. Tétel (Green harmadik formulája)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, valamint $x_0 \in \Omega$. Legyen $y \mapsto w(x_0, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ tetszőleges függvény, amelyre $\Delta w \in L^1(\Omega)$, és értelmezzük az*

$$y \mapsto F(x_0, y) = E(x_0 - y) - w(x_0, y) \quad (y \in \overline{\Omega})$$

függvényt. Ekkor tetszőleges olyan $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ esetén, amelyre $\Delta u \in$ $\in L^1(\Omega)$, érvényes a következő összefüggés:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \big(F(x_0, y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0, y)\big)\, d\sigma_y - \\ - \int_{\Omega} \big(F(x_0, y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0, y)\big)\, dy.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ olyan kis szám, hogy $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset \Omega$. Írjuk fel ekkor a második Green-formulát az u és $y \mapsto F(x_0, y)$ függvényekre az $\Omega \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ „lyukas” tartományon (lásd a 7.3. ábrát):

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon)}} \big(F(x_0, y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0, y)\big)\, dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} \big(F(x_0, y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0, y)\big)\, d\sigma_y + \\ &\quad + \int_{S(x_0,\varepsilon)} \big(F(x_0, y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu F(x_0, y)\big)\, d\sigma_y. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0+} &\int_{\Omega\setminus\overline{B(x_0,\varepsilon)}} \big(F(x_0, y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0, y)\big)\, dy = \\ &= \int_{\Omega} \big(F(x_0, y)\Delta u(y) - u(y)\Delta F(x_0, y)\big)\, dy, \end{aligned} \tag{7.28}$$

valamint

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{S(x_0,\varepsilon)}\big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y)-u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y=u(x_0), \tag{7.29}$$

ekkor $\varepsilon\to 0+$ határátmenet után a (7.27) összefüggésből a bizonyítandó állítást nyerjük. A (7.28) határátmenet jogosságához elegendő, hogy az

$$y\mapsto F(x_0,y)\Delta u(y)-u(y)\Delta F(x_0,y)$$

függvény integrálható Ω-n. Ez következik abból, hogy F folytonos $\overline{\Omega}$-on, tehát korlátos, továbbá Δu integrálható Ω-n, így $y\mapsto F(x_0,y)\Delta u(y)$ is integrálható. Másrészt pedig, u folytonos $\overline{\Omega}$-on, és E alapmegoldás volta miatt $y\neq x_0$ esetén $\Delta(y\mapsto E(x_0-y)=0$, ezért $\Delta F(x_0,y)=-\Delta w(x_0,y)$, amely integrálható, tehát $y\mapsto u(y)\Delta F(x_0,y)$ is integrálható függvény.
A (7.29) összefüggés igazolásához vegyük figyelembe, hogy

$$\begin{aligned}&\int_{S(x_0,\varepsilon)}\big(F(x_0,y)\partial_\nu u(y)-u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\big)\,d\sigma_y=\\&=-\int_{S(x_0,\varepsilon)}E(x_0-y)\partial_\nu u(y)\,d\sigma_y-\int_{S(x_0,\varepsilon)}w(x_0,y)\partial_\nu u(y)\,d\sigma_y+\\&\quad+\int_{S(x_0,\varepsilon)}u(y)\partial_\nu^y E(x_0-y)\,d\sigma_y+\int_{S(x_0,\varepsilon)}u(y)\partial_\nu^y w(x_0,y)\,d\sigma_y.\end{aligned} \tag{7.30}$$

A (7.30) egyenlőség jobb oldalának első tagjára az u függvény korlátossága és E definíciója folytán $n\geq 3$ esetén

$$\left|\int_{S(x_0,\varepsilon)}E(x_0-y)\partial_\nu u(y)\,d\sigma_y\right|\leq\int_{S(x_0,\varepsilon)}\frac{C_1}{\varepsilon^{n-1}}\,d\sigma_y=\frac{C_1}{\varepsilon^{n-2}}\cdot\omega_n\varepsilon^{n-1}\xrightarrow{\varepsilon\to 0+}0,$$

az $n=2$ esetben pedig

$$\left|\int_{S(x_0,\varepsilon)}E(x_0-y)\partial_\nu u(y)\,d\sigma_y\right|\leq C_1\varepsilon\,|\log\varepsilon|\xrightarrow{\varepsilon\to 0+}0.$$

Hasonlóan, a (7.30) összefüggés jobb oldalának harmadik és negyedik tagjai 0-hoz tartanak $\varepsilon\to 0+$ esetén, hiszen az integrandusok korlátos integrálható függvények, az integrálási felület mértéke pedig 0-hoz tart. Végül vegyük szemügyre (7.30) jobb oldalának harmadik tagját. A „lyukas” tartomány $S(0,\varepsilon)$ peremén a normális a gömb középpontja felé mutat (lásd az ezzel lényegében megegyező 7.2. ábrát), így

$$\partial_\nu(y\mapsto E(x_0-y))|_{S(x_0,\varepsilon)}=\partial_{|x_0-y|}(y\mapsto E(x_0-y))|_{S(x_0,\varepsilon)}=\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}},$$

ezért
$$\int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\partial_\nu^y E(x_0-y)\,d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S(x_0,\varepsilon)} u(y)\,d\sigma_y,$$
ami az $S(x_0,\varepsilon)$ gömbfelületen vett átlagintegrál. Ez azonban $\varepsilon \to 0+$ esetén az u függvény x_0-beli értékéhez tart, amint ezt a 7.55. Tétel bizonyításában is láttuk (lásd a (7.26) összefüggést). Ezzel a (7.29) határátmenetet igazoltuk és a tétel bizonyítása kész. □

7.62. *Megjegyzés.* A 7.61. Tétel jelentősége valójában egy speciális esetében rejlik. Nevezetesen, ha a w függvényt sikerül úgy megválasztani, hogy $\Delta F = 0$ az x_0 pont kivételével, illetve $F = 0$ a $\partial\Omega$ peremen, akkor
$$u(x_0) = -\int_{\partial\Omega} u(y)\partial_\nu F(x_0,y)\,d\sigma_y - \int_\Omega F(x_0,y)\Delta u(y)\,dy.$$
Ez azt jelenti, hogy az u függvény x_0-beli értékét előállítottuk az u peremen felvett értékeinek, illetve Δu-nak az Ω-n felvett értékeinek a segítségével. Következésképpen a Dirichlet-feladatra formálisan megoldóképletet nyertünk. Célunk, hogy a megfelelő F függvényt, és a megoldóképletet „szép” tartományok esetében konkrétan felírjuk és igazoljuk.

7.6.2. A Green-függvény értelmezése és tulajdonságai

Tekintsük a következő klasszikus első peremérték-feladatot az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartományon:
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi}, \end{cases} \tag{7.31}$$
ahol $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Ahogy a 7.62. Megjegyzésben említettük, a harmadik Green-formulában a w függvény speciális megválasztása figyelemre méltó jelentőséggel bír, annak segítségével megoldóképletet nyerhetünk a (7.31) probléma megoldására.

7.63. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tegyük fel, hogy bármely rögzített $x \in \Omega$ pont esetén található olyan $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre
$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \Omega\text{-ban}, \\ v(y) = E(x-y) & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$
ahol E a $-\Delta$ operátornak a 7.15. Definícióban értelmezett alapmegoldása. Vezessük be a $w(x,y) = v(y)$ $(x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$ jelölést. Ekkor a
$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - w(x,y) \quad (x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$$
függvényt a (7.31) problémához tartozó *Green-függvénynek* nevezzük.

7.64. *Megjegyzés.* A 7.24. Következmény alapján a (7.31) problémához tartozó Green-függvény egyértelmű.

A következő tétel ad arra választ, hogy milyen módon fejezhető ki a (7.31) peremérték-feladat megoldása a Green-függvény segítségével.

7.65. Tétel (Green reprezentációs tétele)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá tegyük fel, hogy a* (7.31) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ekkor ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása a* (7.31) *peremérték-feladatnak $f \in C(\overline{\Omega})$ mellett, akkor*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y + \int_\Omega \mathscr{G}(x,y)f(y)\,dy.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a harmadik Green-formulát $F = \mathscr{G}$ választással. □

7.66. *Megjegyzés.* A reprezentációs tételben szereplő

$$-\int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y$$

integrált szokás *egyszerű réteg potenciáljának* nevezni, amely fizikailag megadja az $\partial\Omega$ felületen eloszló φ dipólus (azaz pozitív és negatív töltések együttesét, ezt hívjuk *kettős rétegnek*) által keltett tér potenciálját.

A Green-függvény fontosabb tulajdonságait az alábbi tételben foglaljuk össze.

7.67. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, és tegyük fel, hogy a* (7.31) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ekkor*

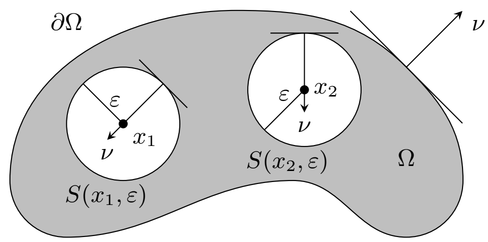
(i) $\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \Omega, y \neq x$*;*

(ii) $\mathscr{G}(x,y) = 0 \quad x \in \Omega, y \in \partial\Omega$*;*

(iii) $\mathscr{G}(x,y) = \mathscr{G}(y,x) \quad x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y$ *(a Green-függvény szimmetria tétele).*

Bizonyítás. Az első két tulajdonság a definícióból közvetlenül adódik.
A harmadik tulajdonság bizonyításához legyenek $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$ rögzítettek, és válasszunk $\varepsilon > 0$ számot úgy, hogy $\overline{B(x_1,\varepsilon)} \subset \Omega$, $\overline{B(x_2,\varepsilon)} \subset \Omega$ és a $\overline{B(x_1,\varepsilon)} \subset \Omega$, $\overline{B(x_2,\varepsilon)} \subset \Omega$ gömbök diszjunktak legyenek. Írjuk fel ekkor Green második formuláját az $y \mapsto \mathscr{G}(x_1,y)$ és $y \mapsto \mathscr{G}(x_2,y)$ függvényekre az $\Omega \setminus (\overline{B(x_1,\varepsilon)} \cup \overline{B(x_2,\varepsilon)})$ „kétlyukú kilyukasztott” tartományra (lásd a 7.4. ábrát):

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\setminus(\overline{B(x_1,\varepsilon)}\cup\overline{B(x_2,\varepsilon)})} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\Delta\mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\Delta\mathscr{G}(x_2,y)\big)\,dy = \\ &= \int_{\partial\Omega\cup S(x_1,\varepsilon)\cup S(x_2\varepsilon)} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu\mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu\mathscr{G}(x_1,y)\big)\,d\sigma_y.\end{aligned} \tag{7.32}$$



7.4. ábra. „Kétlyukú” tartomány

Az (i) tulajdonság folytán a (7.32) bal oldala 0-val egyenlő, másrészt (ii) alapján a jobb oldalon

$$\int_{\partial\Omega} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu \mathscr{G}(x_1,y)\big)\, d\sigma_y = 0,$$

így

$$\int_{S(x_1,\varepsilon)\cup S(x_2\varepsilon)} \big(\mathscr{G}(x_2,y)\partial_\nu \mathscr{G}(x_1,y) - \mathscr{G}(x_1,y)\partial_\nu \mathscr{G}(x_1,y)\big)\, d\sigma_y = 0.$$

Innen a harmadik Green-formula bizonyításában igazolt 7.29 összefüggés felhasználásával $\varepsilon \to 0+$ esetén kapjuk, hogy

$$\mathscr{G}(x_2,x_1) - \mathscr{G}(x_1,x_2) = 0,$$

ami éppen az (iii) tulajdonság. □

7.68. *Megjegyzés.* Az (i) tulajdonság helyett valójában az is igaz (lásd a (7.5) összefüggést), hogy

$$\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = \delta_x(y),$$

ahol δ_x az x pontra koncentrált „Dirac-delta függvény”.

A Green-függvényt értelmezhetjük a klasszikus harmadik peremérték-feladat esetében is, röviden kimondjuk a megfelelő definíciót és Green reprezentációs tételének alakját.

Tekintsük a következő klasszikus harmadik peremérték-feladatot az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartományon:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} + hu|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases} \tag{7.33}$$

ahol $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $h \in C(\partial\Omega)$, $h > 0$.

7.69. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány. Tegyük fel, hogy bármely rögzített $x \in \Omega$ pont esetén található olyan $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ függvény, amelyre

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 \quad \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu v(y) + h(y)v(y) = \partial_\nu^y E(x-y) + h(y)E(x-y) \quad y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

ahol E a $-\Delta$ operátornak a (7.15). Definícióban értelmezett alapmegoldása. Vezessük be a $w(x,y) = v(y)$ $(x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$ jelölést. Ekkor a

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - w(x,y) \quad (x \in \Omega, y \in \overline{\Omega})$$

függvényt a (7.33) problémához tartozó *Green-függvénynek* nevezzük.

7.70. *Megjegyzés.* A 7.23. Tétel alapján a Green-függvény egyértelmű, kivéve a $h = 0$, azaz a második peremérték-feladat esetét, ekkor csak konstans erejéig van meghatározva.

7.71. Tétel (Green reprezentációs tétele). *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány, továbbá tegyük fel, hogy a* (7.31) *problémának létezik $\mathscr{G}$ Green-függvénye. Ekkor ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása a* (7.31) *peremérték-feladatnak $f \in C(\overline{\Omega})$ mellett, akkor*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y + \int_\Omega \mathscr{G}(x,y) f(y)\, dy.$$

7.72. *Megjegyzés.* A (7.33) probléma Green-függvényére a 7.67. Tétel is érvényben marad azzal a módosítással, hogy a (ii) tulajdonságban

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) + h(y)\mathscr{G}(x,y) = 0 \quad (y \in \partial\Omega)$$

áll fenn.
A reprezentációs tételben szereplő

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\, d\sigma_y$$

integrált szokás *egyszerű réteg potenciáljának* nevezni, amely fizikailag megadja az $\partial\Omega$ felületen eloszló φ töltéssűrűség (vagy tömegsűrűség) – ezt hívjuk *egyszerű rétegnek* – által keltett tér potenciálját.

7.73. *Történeti megjegyzés.* A Green-függvény gondolata George Green (1793–1841) brit fizikus 1828-ban kiadott *Esszé a matematikai analízisnek az elektromosság- és mágnességtanban való alkalmazásáról* című művében jelent meg. Green életéről bővebben lásd a 7.8. Megjegyzést.

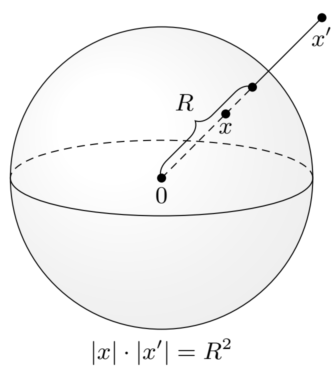
7.6.3. Poisson-formula gömbön

A Green-függvény létezése tetszőleges tartományon általában nem triviális probléma, igazolható azonban, hogy sima peremű tartományok esetében létezik Green-függvény. Egyes speciális tartományok esetén a Green-függvény meghatározható a *tükrözés módszerével.* Ezt az alábbiakban az origó középpontú R sugarú $B(0, R)$ gömb példáján tárgyaljuk meg részletesen, illetve a 7.6.4. szakaszban néhány további példát mutatunk. Ehhez először ismerkedjünk meg a $S(0, R) = \partial B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ gömbfelületre vonatkozó *inverzióval.*

7.74. Definíció. Az $S(0, R)$ gömbfelületre vonatkozó *inverzión* (tükrözésen) az alábbi $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ leképezést értjük:

$$x \mapsto x' = \frac{R^2}{|x|^2} x.$$

Szemléletesen az x pont képe a $\overrightarrow{0x}$ félegyenesen az x' pont, amelyre $|x| \cdot |x'| = R^2$ (lásd a 7.5. ábrát).



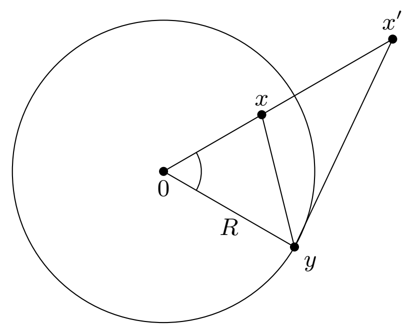
7.5. ábra. Inverzió

Legyen most $x \in B(0, R)$ rögzített, ekkor olyan $v(y)$ függvényt keresünk, amelyre

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & B(0, R)\text{-ben}, \\ v(y) = E(x - y) & y \in S(0, R). \end{cases}$$

Első látásra a $v(y) = E(x - y)$ függvény „majdnem” megfelelő, hiszen a peremfeltétel nyilván teljesül, és mivel E alapmegoldás, ezért $\Delta_y E(x - y) = 0$ az x pont kivételével. Az egyetlen pont, amely „galibát” okoz, maga az x. Az inverzió segítségével azonban ezt a szingularitást a gömbön kívülre transzformálhatjuk, és tekinthetjük a $v(y) = E(\gamma(x' - y))$ függvényt, ahol

γ alkalmas, x-től függő konstans. Erre a v függvényre már $\Delta v = 0$ teljesül az egész $B(0, R)$ gömbön, és a γ konstans értékét úgy kell megválasztani, hogy $v(y) = E(x-y)$ teljesüljön az $S(0, R)$ gömbfelszínen. Mivel E csak az $x - y$ abszolút értékétől függ, ezért célszerű megvizsgálni, hogy mi a kapcsolat $|x - y|$ és $|x' - y|$ között $y \in S(0, R)$ esetén. Ehhez tekintsük a 7.6. ábrát.



$|x| : R = R : |x'| = |x - y| : |x' - y|$

7.6. ábra. Inverzió tulajdonsága

A $0xy$ és $0x'y$ háromszögek hasonlóak, ugyanis az origóban lévő szögük közös, és az origóban lévő megfelelő oldalak aránya az inverzió definíciója alapján megegyezik:

$$|x| : R = R : |x'|.$$

Ekkor az origóval szemközti oldalak aránya is ugyanez, így

$$|x - y| : |x' - y| = |x| : R,$$

azaz

$$|x - y| = \frac{|x|}{R}|x' - y| \quad (y \in S(0, R)). \tag{7.34}$$

(Ezt megkaphattuk volna egyszerű számolással is:

$$|x' - y|^2 = \left| \frac{R^2}{|x|^2} x - y \right|^2 = \frac{R^4|x|^2 - 2R^2|x|^2\langle x, y\rangle + |x|^4 R^2}{|x|^4} = \frac{R^2}{|x|^2}|x - y|^2.)$$

Következésképpen a

$$v(y) = E\left(\frac{|x|}{R}(x' - y)\right)$$

függvényre teljesül, hogy $v \in C^2(B(0, R)) \cap C^1(\overline{B(0,1)})$, $\Delta v = 0$ a $B(0, R)$ gömbön és $v(y) = E(x - y)$ az $S(0, R)$ gömbfelületen. Az előbbi megállapítás az $x = 0$ speciális esetben nem igaz, ekkor az inverzió nem értelmes, azonban ebben az esetben a $v(y) = E(R)$, azaz

$$v(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|R|, & \text{ha } n = 2,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0, \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n|R|^{n-2}}, & \text{ha } n \geq 3,\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \end{cases}$$

konstansfüggvény megfelel a kívánalmaknak. Valóban, $\Delta v = 0$ nyilvánvaló, ezenkívül $y \in S(0,R)$ esetén $v(y) = E(0-y) = E(|y|) = E(R)$. Összefoglalva tehát a következő állítást nyertük.

7.75. Állítás. *A $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ gömb Green-függvénye*

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) \quad (x \neq 0, y \in \overline{B(0,R)}),$$

illetve

$$\mathscr{G}(0,y) = E(y) - E(R) \quad (y \in \overline{B(0,R)}),$$

ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása.

7.76. *Megjegyzés.* A $B(0,R)$ konkrét esetben a Green-függvény szimmetriatétele könnyen ellenőrizhető, az egyszerűen következik a (7.34) összefüggésből, illetve abból, hogy $E(x-y)$ csak $|x-y|$-től függ.

Alkalmazzuk most a kapott Green-függvényt a (7.31) probléma megoldásának előállítására a 7.65. Tétel alapján. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $f = 0$, ekkor ha az $u \in C^2(B(0,R)) \cap C^1(\overline{B(0,R)})$ függvényre

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \quad B(0,R)\text{-ben}, \\ u|_{S(0,R)} = \varphi, \end{cases} \tag{7.35}$$

akkor

$$u(x) = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y \quad (x \in B(0,R)). \tag{7.36}$$

7.77. Állítás. *Ha $\mathscr{G}$ a $B(0,R)$ gömb Green-függvénye, akkor*

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \frac{-1}{\omega_n R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \quad (x \in B(0,R), y \in S(0,R)).$$

Bizonyítás. Az $y \in S(0,R)$ pontban a külső normálvektor $\nu = y/R$, így az iránymenti derivált definíciója alapján

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{R}\partial_{y_j}\mathscr{G}(x,y).$$

Mivel

$$\partial_{y_j} E(x-y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{x_j - y_j}{|x_j - y_j|^n},$$

és (7.34) felhasználásával $x \neq 0$ esetén

$$\partial_{y_j} E\left(\frac{|x|}{R}(x'-y)\right) = \frac{1}{\omega_n} \frac{R^{n-2}}{|x|^{n-2}} \frac{x'_j - y_j}{|x'-y|^n} = \frac{-1}{\omega_n} \frac{y_j \frac{|x|^2}{R^2} - x_j}{|x-y|^n},$$

ezért

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \frac{-1}{\omega_n R} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{j=1}^n y_j \left(y_j - x_j - |x|^2 \frac{y_j}{R^2} + x_j \right) = \frac{-1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}. \tag{7.37}$$

Az $x = 0$ esetben pedig

$$\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = \partial_{|y|} E(y) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{R}{|y|^{n-1}},$$

tehát ekkor is érvényes az állítás. □

A 7.77. Állításbeli összefüggést a (7.36) képletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{S(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, d\sigma_y \quad (x \in B(0,R)). \tag{7.38}$$

A (7.38) összefüggést szokás *Poisson-formulának* nevezni, a

$$K(x,y) := \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \frac{1}{|x-y|^n}$$

függvényt pedig *Poisson-magnak* hívni. Felvetődik a kérdés, hogy a Poisson-formulával értelmezett u függvény vajon milyen φ függvények esetén elégíti ki a (7.31) peremérték-feladatot $f = 0$ mellett. Erre ad választ a következő tétel.

7.78. Tétel. *Tetszőleges $\varphi \in C(S(0,R))$ függvény esetén a (7.38) Poisson-formulával értelmezett u függvényre $u \in C^2(B(0,R)) \cap C^1(\overline{B(0,R)})$ (sőt $u \in C^\infty(B(0,R))$), továbbá*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & B(0,R)\text{-ben,} \\ u|_{S(0,R)} = \varphi. \end{cases}$$

Bizonyítás. A Poisson-formulára alkalmazhatjuk a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt tetszőleges olyan gömbön, amelynek lezártja $B(0,R)$-ben van (hiszen $y \in S(0,R)$ miatt az integrandus paraméter szerinti tetszőleges rendű deriváltja folytonos). Ebből következően $u \in C^2(\Omega)$, sőt $u \in C^\infty(\Omega)$. Ezenkívül

$$\Delta u(x) = -\int_{S(0,R)} \Delta_x\big(\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\big)\,d\sigma_y = \\ = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \Delta_x \mathscr{G}(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y = 0,$$

hiszen a Green-függvény szimmetriatétele miatt

$$\Delta_x \mathscr{G}(x,y) = \Delta_x \mathscr{G}(y,x) = 0.$$

(A deriválások sorrendjét azért cserélhettük fel, mert $\mathscr{G}$ parciális deriváltjai folytonosak $x \neq y$ esetén.)
Megmutatjuk, hogy tetszőleges $x_0 \in S(0,R)$ pontra a (7.38) formulával értelmezett függvényre

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in B(0,R)}} u(x) = \varphi(x_0), \tag{7.39}$$

amiből $\varphi \in C(\overline{B(0,R)})$ folytán $u \in C(\overline{B(0,R)}$ és $u|_{S(0,R)} = \varphi$. Mivel a $v = 1$ függvényre $\Delta v = 0$ és $v|_{S(0,R)} = 1$, ezért Green reprezentációs tételéből következően

$$1 = -\int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\,d\sigma_y \quad (x \in B(0,R)). \tag{7.40}$$

Következésképpen

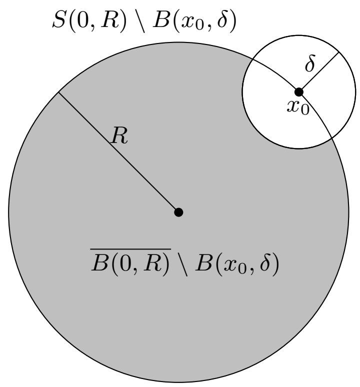
$$u(x) - \varphi(x_0) = \int_{S(0,R)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)(\varphi(x_0) - \varphi(y))\,d\sigma_y. \tag{7.41}$$

A (7.41) egyenlőség jobb oldalán szereplő integrált két részre bontjuk, az egyik részen $\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)$ lesz kicsi, a másik részen pedig $|\varphi(y) - \varphi(x_0)|$ kicsi. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, ekkor a φ függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik $\delta > 0$ úgy, hogy

$$|y - x_0| < \delta, y \in S(0,R) \quad \text{esetén} \quad |\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Az $\overline{B(0,R)} \times (S(0,R) \setminus B(x_0,\delta))$ korlátos és zárt halmazon (lásd a 7.7. ábrát) a $\partial_\nu \mathscr{G}$ függvény egyenletesen folytonos, továbbá a (7.37) alakjából láthatóan

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \overline{B(0,R)}}} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y) = 0.$$



7.7. ábra. Peremfelbontás

Ebből következően létezik $\mu > 0$ szám úgy, hogy

$$|x - x_0| < \mu,\ x \in \overline{B(0,R)},\ y \in \overline{B(0,R)} \times (S(0,R) \setminus B(x_0,\delta))$$
$$\text{esetén}\ \ |\partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)| \leq \varepsilon.$$

Ekkor a (7.41) összefüggésből, a (7.40) egyenlőség, továbbá $\partial_\nu^y \mathscr{G}$ negativitásának (amely a (7.37) formulából nyilvánvaló) felhasználásával a következő becslést nyerhetjük $|x - x_0| < \mu$ esetén:

$$\begin{aligned}|u(x) - \varphi(x_0)| \leq -\varepsilon \int_{S(0,R)\cap B(x_0,\varepsilon)} \partial_\nu^y \mathscr{G}(x,y)\, d\sigma_y + \\ + 2K \int_{\overline{B(0,R)}\times(S(0,R)\setminus B(x_0,\delta))} \varepsilon\, d\sigma_y \leq \\ \leq \varepsilon(2K+1)\omega_n R^{n-1}.\end{aligned}$$

Ez éppen a kívánt (7.39) összefüggés. □

7.79. *Megjegyzés.* A Poisson-formulából $x = 0$ esetén azt kapjuk, hogy

$$u(0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{S(0,R)} \varphi(y)\, d\sigma_y,$$

ami éppen a (7.35) probléma u harmonikus megoldására vonatkozó középértéktétel a gömbfelületen.

Érdemes felírni a Poisson-formulát két dimenzióban polárkoordináták segítségével is. Ha $x = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)$ és $y = (R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ (ahol most φ a szöget jelenti), akkor

$$\begin{aligned}|x-y|^2 &= (\varrho\cos\vartheta - R\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\vartheta - R\sin\varphi)^2 = \\ &= R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi) = \\ &= R^2 - 2R\varrho\cos(\varphi-\vartheta) + \varrho^2,\end{aligned}$$

továbbá a körvonalon vett „felszíni integrál” nem más, mint vonalintegrál, így $d\sigma = Rd\varphi$. Ezért

$$u(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(R\cos\varphi, R\sin\varphi)\frac{R^2-\varrho^2}{1-2R\varrho\cos(\varphi-\vartheta)+R^2}\,d\varphi \tag{7.42}$$

függvény klasszikus megoldása a

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & B(0,R)\text{-ben}, \\ u|_{S(0,R)} = \psi. \end{cases}$$

peremérték-feladatnak. Megjegyezzük, hogy ezt a képletet megkaphattuk volna a reguláris függvényekre vonatkozó Cauchy-integrálformulából (vagyis tulajdonképpen a harmonikus függvényekre vonatkozó középérték-tulajdonságból), ha a kört önmagára képezzük úgy, hogy az x pont a kör középpontjába menjen át.

7.80. *Történeti megjegyzés.* A Poisson-formulát Siméon-Denis Poisson (1781–1840) írta fel 1833-ban égi mechanikai vizsgálódásai folyamán, méghozzá mint a gömbfelületen elhelyezett tömegeloszlás potenciálfüggvényét a gömb belsejében.

7.6.4. További példák Green-függvényekre

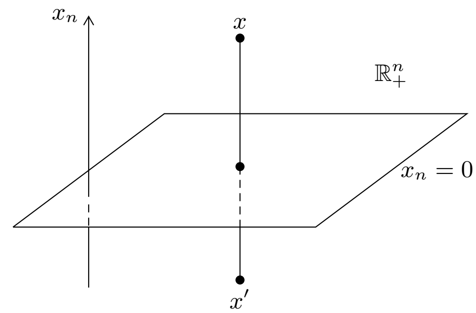
A gömb példájában alkalmazott inverzió, más néven tükrözés módszerével határozhatjuk meg számos további tartomány Green-függvényét. Az alábbiakban néhány példát mutatunk a módszer alkalmazására.

Féltér Green-függvénye

Tekintsük az $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ félteret és a következő peremérték-feladatot:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n_+\text{-ban}, \\ u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \varphi. \end{cases}$$

Állítsuk elő a féltér Green-függvényét, és ennek segítségével írjuk fel a féltérre vonatkozó Poisson-formulát!



7.8. ábra. Tükrözés hipersíkra

A féltér esetében a gömbfelületre való tükrözés szerepét a

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\big\}$$

hipersíkra való tükrözés veszi át (lásd a 7.8. ábrát):

$$x \mapsto x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n).$$

Ekkor $y \in \mathbb{R}^n_+$ esetén nyilvánvalóan $|x - y| = |x' - y|$, így a

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x - y) - E(x' - y)$$

függvény teljesíti a Green-függvényre vonatkozó feltételeket, minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n_+$ esetén $\Delta_y \mathscr{G}(x,y) = 0$ a $\mathbb{R}^n_+$ féltéren, illetve $\mathscr{G}(x,y) = 0$ a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkon. A féltér peremén az y pontban $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$, így

$$\partial_\nu \mathscr{G}(x,y) = \partial_{-y_n} \mathscr{G}(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{y_n - x_n}{|x - y|^n} - \frac{y_n - x'_n}{|x' - y|^n}\right) = \frac{-2}{\omega_n}\frac{x_n}{|x - y|^n}.$$

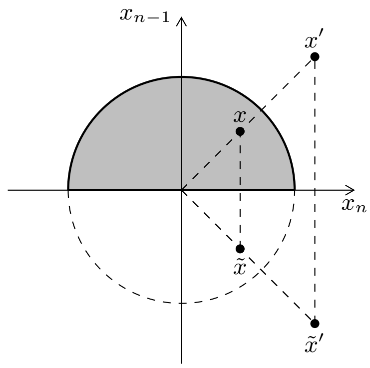
Az iménti összefüggést a (7.36) képletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x - y|^n}\, d\sigma_y \tag{7.43}$$

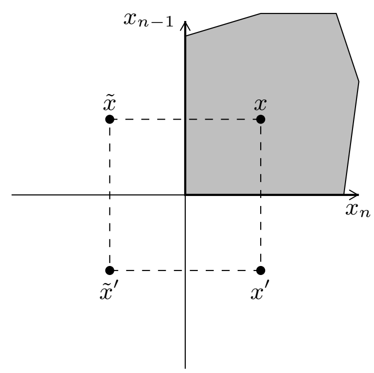
A (7.43) előállítást szokás *Poisson-formulának* nevezni, a

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{\omega_n}\frac{1}{|x - y|^n}$$

függvényt pedig *Poisson-magnak* hívni. A gömbre vonatkozó Poisson-formula esetéhez hasonlóan igazolható a következő eredmény.



7.9. ábra. Tükrözés félgömb peremére



7.10. ábra. Tükrözés negyedtér peremére

7.81. Tétel. *Legyen* $\varphi \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. *Ekkor az*

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

Poisson-formulával értelmezett u *függvényre teljesül, hogy* $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ *(sőt* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$*), továbbá*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \mathbb{R}^n_+\text{-}ban, \\ u|_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \varphi. \end{cases}$$

Negyedtér Green-függvénye

A féltér esetéhez hasonlóan, hipersíkokra való tükrözés segítségével adható meg az $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} > 0, x_n > 0\}$ negyedtér Green-függvénye. Legyen $x \in \Omega$, és jelölje x', $\tilde{x}$ az x pontnak az $x_n = 0$, illetve az $x_{n-1} = 0$ hipersíkra való tükörképét, továbbá $\tilde{x}'$ az $\tilde{x}$ pontnak az x_n hipersíkra való tükörképét (lásd a 7.10. ábrát). Ekkor könnyen láthatóan a

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - E(x'-y) - E(\tilde{x}-y) + E(\tilde{x}'-y) \tag{7.44}$$

függvény megfelel a Green-függvénytől elvárt kívánalmaknak (lásd a 7.32. Feladatot).

Félgömb Green-függvénye

Az $\Omega = B(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+$ félgömbtartomány esetében az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó inverziót és a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkra való tükrözést egyszerre kell alkalmaznunk. Legyen $x \in \Omega$ esetén x' az x pontnak az $S(0,R)$ gömbfelületre vonatkozó inverzió által adott képe, továbbá az x és x' pontoknak a $\partial\mathbb{R}^n_+$ hipersíkra való tükörképe $\tilde{x}$, illetve $\tilde{x}'$ (lásd a 7.9. ábrát). Ekkor könnyen láthatóan a

$$\mathscr{G}(x,y) = E(x-y) - E(x'-y) + E(\tilde{x}-y) - E(\tilde{x}'-y) \tag{7.45}$$

függvény teljesíti a Green-függvénytől elvárt tulajdonságokat (lásd a 7.32. Feladatot).

7.7. Feladatok

7.1. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima peremű tartomány. Mutassuk meg, hogy ekkor Green első tétele abban az esetben is érvényben marad, ha $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, amelyre $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \in L^1(\Omega)$, továbbá Green második formulája ugyancsak érvényes, ha $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, amelyekre $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) \in L^1(\Omega)$ és $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} v) \in L^1(\Omega)$.

7.2. Igazoljuk, hogy az alábbi $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ függvények mindegyike alkalmas $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tartományon kielégíti a $-\Delta u = 0$ Laplace-egyenletet:

a) $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$,

b) $u(x,y) = \log(x^2+y^2)$,

c) $u(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$,

d) $u(x,y) = e^x(\sin y + \cos y)$.

7.3. Írjuk fel a Δ operátor polárkoordinátás alakját két dimenzióban! Legyen $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ és $u(x,y) = U(r,\varphi)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $r \neq 0$ esetén

$$\Delta u = \frac{1}{r}\left(\partial_r(r\partial_r U) + \frac{1}{r}\partial_\varphi^2 U\right).$$

7.4. Igazoljuk, hogy a tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ szám esetén a polárkoordinátás alakban adott

$$U(r,\varphi) = r^t \cos t\varphi \quad \text{és} \quad U(r,\varphi) = r^t \sin t\varphi$$

függvények megoldásai a Laplace-egyenletnek az $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tartományon. Mi a fenti függvények (x,y) koordinátás alakja?

7.5. Határozzuk meg a Laplace-egyenletnek a kétváltozós n-edfokú polinomfüggvény alakú megoldásait! Ezeket szokás kétváltozós *harmonikus polinomoknak* nevezni. Igazoljuk, hogy minden n-re a legfeljebb n-edfokú harmonikus polinomok vektortere $2n+1$-dimenziós!

7.6. Keressük meg a következő peremérték-feladat $u \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ megoldását a $B(0,1)$ háromdimenziós egységgömbön!

$$\begin{cases} \Delta u(x,y,z) = x + z \quad ((x,y,z) \in B(0,1)), \\ \quad u|_{\partial B(0,1)} = y. \end{cases}$$

7.7. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ és keressük meg az alábbi peremérték-feladat $u \in C^2(T) \cap C^1(\overline{T})$ megoldásait!

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = \cos x \cos y \quad ((x,y) \in T), \\ \quad \partial_\nu u|_{\partial T} = 0. \end{cases}$$

7.8. Legyen $T = (0,\pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$, valamint $\Gamma_1 := \{\pi\} \times [0,\pi)$, $\Gamma_2 := (0,\pi] \times \{\pi\}$, $\Gamma_3 := \{0\} \times (0,\pi]$, $\Gamma_4 := [0,\pi) \times \{0\}$, továbbá legyenek $g, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan függvények, amelyekre (lásd a 7.11. ábrát)

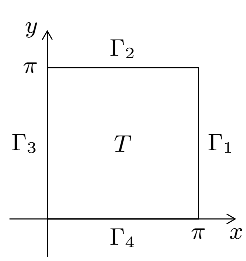
$$g|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 1, \quad g|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0,$$

valamint

$$h|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0, \quad h|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 1.$$

Oldjuk meg ekkor az alábbi peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \quad -\Delta u(x,y) = \sin x \cos 3y - 5 \sin 3x \cos 4y \quad ((x,y) \in T), \\ (gu + h\partial_\nu)|_{\partial T} = 0 \end{cases}$$



7.11. ábra. Vegyes peremfeltétel

7.9. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor klasszikus sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \left\{ u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) \colon u(0) = 0,\ u'(a) = 0 \right\}, \quad Lu := -u''.$$

7.10. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = u(a),\ u'(0) = u'(a)\},$$
$$Lu := -u''.$$

7.11. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit! Mutassuk meg, hogy az operátornak van negatív sajátértéke is!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u'(0) = u(0),\ u'(a) = u(a)\},$$
$$Lu := -u''.$$

7.12. Igazoljuk, hogy a 7.50. Tétel a $-\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + qu$ operátor helyett a következő általánosabb L operátorokra is igaz:

$$Lu = -\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}\partial_j\partial_k u + \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j u + qu,$$

ahol $a_{jk}, b_j, q \in C(\overline{\Omega})$ $(j,k = 1,\dots,n)$ és $q \geq 0$, továbbá az a_{jk} együtthatókra teljesül az egyenletes ellipticitás 6.4. Definícióban megfogalmazott feltétele.

7.13. Deriválás nélkül igazoljuk, hogy ha u és u^2 harmonikus függvények az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, akkor u szükségképpen konstansfüggvény!

7.14. Adjunk meg az $\Omega = \{(x,y) : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ nyílt felső félsíkban nem korlátos harmonikus függvényt!

7.15. Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u(x,y) = 8$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ és $u(0{,}0) = 1$. Számítsuk ki az $\int_{B(0,2)} u$ integrál értékét!

7.16. Tegyük fel, hogy az $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u(x,y) = -4$ $((x,y) \in \in \mathbb{R}^2)$. Igazoljuk, hogy

$$\max_{B(0,1)} u \leq \max_{\partial B(0,1)} u + 1.$$

7.17. A középérték-tulajdonság segítségével bizonyítsuk be, hogy ha u harmonikus és korlátos $\mathbb{R}^n$-en, akkor konstans (Liouville tétele).

7.18. Tegyük fel, hogy u harmonikus a $B(0,R)$ gömbön és $u \geq 0$. Igazoljuk a Poisson-formula alapján, hogy ekkor tetszőleges $x \in B(0,R)$ esetén

$$R^{n-2}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq R^{n-2}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

7.19. Tegyük fel, hogy $u \in C^2(\Omega)$ szubharmonikus függvény az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon, azaz $-\Delta u \le 0$. Igazoljuk, hogy ekkor tetszőleges $\overline{B(x_0, R)} \subset \Omega$ gömb esetén

$$u(x_0) \le \frac{1}{A(B(x_0,R))} \int_{\partial B(x_0,R)} u(x)\, d\sigma_x \le \frac{1}{V(B(x_0,R))} \int_{B(x_0,R)} u(x)\, dx,$$

ahol $V(B(x_0,R)) = \omega_n R^n/n$ és $A(B(x_0,R)) = \omega_n R^{n-1}$ az n-dimenziós R sugarú térfogata és a gömbfelület felszíne.

7.20. Bizonyítsuk be, hogy a $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ szubharmonikus függvény, akkor teljesül rá az erős maximumelv!

7.21. Bizonyítsuk be, hogy ha $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonikus függvény, akkor $|\operatorname{grad} u|$ szubharmonikus!

7.22. Tegyük fel, hogy $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható konvex függvény. Mutassuk meg, hogy ha $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonikus függvény, akkor $\Phi(u)$ szubharmonikus.

7.23. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tartomány, amelyet az $S(0,1)$ gömbfelületre vonatkozó inverzió az Ω' tartományba viszi. Igazoljuk, hogy ha u harmonikus Ω-ban, akkor az

$$x' \mapsto v(x') = \frac{1}{|x'|^{n-2}} u\left(\frac{x'}{|x'|}\right) = |x|^{n-2} u(x)$$

függvény harmonikus Ω'-ban. (Azt a leképezést, amely az u függvényhez a fenti v függvényt rendeli hozzá, *Kelvin-transzformációnak* nevezzük.)

7.24. Legyen $n \ge 3$ és $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy ha az $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvény korlátos megoldása a $-\Delta u = f$ egyenletnek $\mathbb{R}^n$-ben, akkor alkalmas C konstanssal

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y) f(y)\, dy + C,$$

ahol E a Laplace-egyenlet alapmegoldása.

7.25. Legyen $B(0,1)$ az origó középpontú, 1 sugarú nyílt körlap a síkon. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(B(0,1)) \cap C^1(\overline{B(0,1)})$ megoldása?

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & B(0,1)\text{-ben}, \\ \partial_\nu u|_{\partial B(0,1)} = 1. \end{cases}$$

Adjuk meg a megoldásokat!

7.26. Legyen $\Omega := (0,1)^2$. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi peremérték-feladatnak $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ megoldása?

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 1. \end{cases}$$

Adjuk meg a megoldásokat!

7.27. Bizonyítsuk be a 7.71. Tételt!

7.28. Bizonyítsuk be, hogy a Dirichlet-feladat Green-függvényére teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$0 < \mathscr{G}(x,y) < \begin{cases} E(x-y), & \text{ha } n \geq 3, \\ E(x-y)+C, & \text{ha } n = 2, \end{cases},$$

ahol $x \in \Omega, y \in \Omega, x \neq y$ és C az Ω tartománytól függő konstans.

7.29. Legyen az Ω_1 tartomány Green-függvénye $\mathscr{G}_1$, az $\Omega_1 \subset \Omega_2$ tartományé pedig $\mathscr{G}_2$. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathscr{G}_2 \geq \mathscr{G}_1$ az Ω_1-en!

7.30. Mutassuk meg, hogy ha u harmonikus és korlátos a $B(x_0,R) \setminus \{x_0\}$ kipontozott gömbön, akkor harmonikusan kiterjeszthető a középpontra is!

7.31. Bizonyítsuk be a 7.81. Tételt!

7.32. Ellenőrizzük, hogy a (7.44) és (7.45) formulák teljesítik a Green-függvényre vonatkozó feltételeket!

8. fejezet

A hővezetési egyenlet

A matematika az emberi elme azon képessége, amelynek célja, hogy kárpótoljon az élet rövidségéért és érzékszerveink tökéletlenségéért.

Joseph Fourier (1768–1830)

A fejezet tartalma. Röviden emlékeztetünk a hővezetési egyenlet fizikai motivációjára. Ezt követően hasonlósági meggondolások alapján levezetjük a hővezetési egyenlet alapmegoldását, és megvizsgáljuk néhány tulajdonságát. Az alapmegoldás segítségével formulát adunk Cauchy-feladatok megoldására. Ezután a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokat tárgyaljuk, amelyek kapcsán a maximum- és minimumelvekkel részletesen foglalkozunk.

8.1. Fizikai motiváció

A fizikai példákkal foglalkozó 5. fejezet 5.2. szakaszában megismerkedtünk az $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományban lévő inhomogén közegben végbemenő *hővezetés* folyamatával. Ha a tartomány pontjainak térben és időben változó hőmérsékletét az $u\colon \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ függvény adja meg, akkor a folyamatot a következő parciális differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$c(x)\varrho(x)\partial_t u(x,t) - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u(x,t)) = F(x,t) \quad \Omega \times \mathbb{R}_0^+\text{-ban},$$

ahol $k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a hővezetési együtthatófüggvény, $c\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a fajhő, $\varrho\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a közeg sűrűségfüggvénye és $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ a forrástag, amely a tartományban lévő hőforrások és nyelők eloszlását adja meg ($F > 0$ esetén az adott pontban hőforrás, $F < 0$ esetén hőnyelő található). Forrásra gondolhatunk például úgy, mint egy szobában elhelyezett fűtőtestre, vagy valamilyen (exoterm vagy endoterm) kémiai reakció során felszabaduló vagy elnyelődő hőre. A hőmérséklet egyértelmű meghatározásához szükségünk van a kezdeti hőmérsékleteloszlás ismeretére, továbbá az Ω tartomány peremén is meg kell adnunk a hőmérséklet időbeni változását, vagyis valamilyen peremfeltételt. A kezdeti és peremfeltételekkel kapjuk a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokat. Előfordulhat, hogy Ω az egész tér, ekkor peremfeltételre nincs szükség, így Cauchy-feladatokról beszélünk. A fejezetben fő célunk a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy- és vegyes feladatok vizsgálata. Az egyszerűség kedvéért gyakran feltesszük, hogy c, ϱ, k mind állandók, ekkor a következő egyenletet nyerjük:

$$\partial_t u - a\Delta u = f,$$

ahol $a = k/c\varrho$ a *hőmérséklet-vezetési tényező* és $f = F/c\varrho$.

8.2. Speciális megoldások

A stacionárius hővezetés esetét leíró Laplace-egyenlet kapcsán láttuk, hogy lényeges szerepe van az egyenlet bizonyos speciális alakú, úgynevezett radiális megoldásainak. Ezekből nyertük az alapmegoldást, amely a peremérték-feladatok megoldásainak előállításában fontos segédeszközként került elő.

8.2.1. Hasonlósági megoldások

Célszerű a hővezetési egyenlet vizsgálatát is speciális alakú megoldások megkeresésével kezdeni, tekintsük ezért a

$$\partial_t u - \Delta u = 0$$

egyenletet. A Laplace-egyenlet esetében az egybevágóságra való invariancia jelentette a kiindulási pontot, ez a hővezetési egyenlet esetében továbbra is érvényes a térváltozóban. Ezenkívül a hővezetési egyenlet *dilatációra* nézve invariáns, ami azt jelenti, hogy ha $u(x,t)$ megoldása a homogén jobb oldalú hővezetési egyenletnek, akkor az $\tilde{u}(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ függvény ugyancsak megoldás, hiszen

$$\partial_t \tilde{u}(x,t) - \Delta\tilde{u}(x,t) = \lambda^2\big(\partial_t u(\lambda x, \lambda^2 t) - \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t)\big) = 0.$$

Ha egy megoldás invariáns a dilatációra nézve, akkor

$$u(x,t) = u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

ahonnan $\lambda = 1/\sqrt{t}$ választással kapjuk, hogy

$$u(x,t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Amennyiben a megoldás ezen felül a térváltozóban radiális, akkor egy ilyen speciális megoldás

$$u(x,t) = v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakban írható, ahol $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Megkereshetnénk a fenti alakú megoldásokat, ehelyett azonban figyelembe veszünk még egy fizikai feltételt. Vegyük észre, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\,dx = t^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(|y|)\,dy,$$

amit úgy is írhatunk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(|y|)\,dy.$$

Ez azt jelenti, hogy az u megoldást

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakúnak választva az „összenergia" jellegű

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx$$

mennyiség időben állandó. Célszerű tehát a homogén hővezetési egyenlet

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} v\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

alakú megoldásait megkeresni, vagy legalábbis egy nemtriviális ilyen megoldást. A rövidség kedvéért vezessük be a $z = |x|/\sqrt{t}$ jelölést, ekkor

$$\partial_t u(x,t) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} v(z) + t^{-\frac{n}{2}} v'(z) \frac{|x|}{-2t^{\frac{3}{2}}} = -\frac{t^{-\frac{n}{2}-1}}{2} \left(nv(z) + zv'(z)\right).$$

Másrészt

$$\partial_{x_j} u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} v'(z) \frac{x_j}{|x|\sqrt{t}},$$

ezért

$$\partial_{x_j}^2 u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \left(v''(z)\frac{x_j^2}{|x|^2\sqrt{t}} + v'(z)\frac{|x| - \frac{x_j^2}{|x|}}{|x|^2} \right),$$

így

$$\Delta u(x,t) = t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \sqrt{t}v'(z)\frac{\sum_{j=1}^n \left(|x|^2 - x_j^2\right)}{|x|^3} \right) =$$
$$= t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \frac{n-1}{z}v'(z) \right).$$

Ekkor

$$0 = \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = -t^{-\frac{n}{2}-1} \left(v''(z) + \left(\frac{z}{2} + \frac{n-1}{z}\right)v'(z) + \frac{n}{2}v(z) \right)$$

adódik, ahonnan rendezése után végül a következő egyenletet kapjuk:

$$2zv''(z) + (z^2 + 2(n-1))v'(z) + nzv(z) = 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
&2zv''(z) + (z^2 + 2(n-1))v'(z) + nzv(z) = \\
&= z(2v''(z) + zv'(z) + v(z)) + (n-1)(2v'(z) + zv(z)) = \\
&= z(2v' + zv(z))' + (n-1)(2v' + zv(z)),
\end{aligned}$$

ezért a $w(z) = 2v'(z) + zv(z)$ függvény bevezetésével a

$$zw'(z) + (n-1)w = 0$$

egyenletet nyerjük. Ezt természetesen meg tudjuk oldani, azonban mi csupán egy fizikailag ésszerű megoldást szeretnénk meghatározni, ezért például elvárjuk, hogy v és v' folytonosan kiterjedjen $z = 0$-ra is, következésképpen a w -re vonatkozó egyenlet $z = 0$ esetén ugyancsak érvényes legyen. Ekkor $w(0) = 0$ szükséges, és az egyenletnek egyetlen ilyen megoldása a $w = 0$ konstansfüggvény. Ekkor

$$2v'(z) + zv(z) = 0,$$

és így

$$v(z) = Ce^{-\frac{z^2}{4}}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a homogén jobb oldalú hővezetési egyenletnek megoldása az

$$u(x,t) = C\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

függvény. Amennyiben a

$$\partial_t u - a\Delta u = 0$$

egyenletet tekintjük, akkor ezt az $\tilde{u}(x,t) = u(\sqrt{a}x, t)$ helyettesítéssel vezethetjük vissza az $a = 1$ esetre, így ennek megoldása

$$u(x,t) = C\frac{1}{(at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4at}}. \tag{8.1}$$

Válasszuk meg a C konstans értékét úgy, hogy az „összenergia” egységnyi legyen, azaz

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4at}}\,dx = C\int_{\mathbb{R}^n} 2^n e^{-|y|^2}\,dy = C\cdot 2^n(\sqrt{\pi}\,)^n, \tag{8.2}$$

tehát $C = 1/(2\sqrt{\pi}\,)^n$.

8.2.2. Alapmegoldás

Az előbbiekben levezett speciális megoldás fontos szerepet tölt be a későbbiekben.

8.1. Definíció. Tekintsük a

$$\partial_t u(x,t) - a\Delta u(x,t) = 0$$

hővezetési egyenletet, ahol $a > 0$ konstans. Ekkor az $E\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi at)^{\frac{n}{2}}}e^{-\dfrac{|x|^2}{4at}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^n, t \le 0 \end{cases}$$

függvényt a hővezetési egyenlet *alapmegoldásának* nevezzük.

Az alábbi állításban összefoglaljuk az alapmegoldás főbb tulajdonságait.

8.2. Állítás. *Legyen $E\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a hővezetési egyenlet alapmegoldása. Ekkor*

a) $\lim\limits_{t\to 0+} E(x,t) = 0$, *és* $\lim\limits_{t\to 0+} E(0,t) = +\infty$*;*

b) *minden* $t > 0$ *esetén* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = 1$*;*

c) $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$*;*

d) $\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0$, *ha* $x \in \mathbb{R}^n$ *és* $t \neq 0$.

Bizonyítás. Az a) rész igazolásához legyen $s = 1/t$, ekkor

$$\lim_{t\to 0+} E(x,t) = \lim_{s\to +\infty} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(4\pi a)^{\frac{n}{2}}} e^{-s\frac{|x|^2}{4a}} = 0,$$

hiszen az exponenciális tényező „legyőzi” a polinomiális tényezőt. Ha $x = 0$, akkor pedig

$$\lim_{t\to 0+} E(t,0) = \lim_{s\to +\infty} \frac{s^{\frac{n}{2}}}{(4\pi a)^{\frac{n}{2}}} = +\infty.$$

A b) részt már korábban beláttuk, hiszen a (8.2) egyenlőségben éppen úgy választottuk a C-t, hogy az integrál értéke minden $t > 0$ esetén 1 legyen.
Hasonlóan, a d) részt sem kell bizonyítanunk, hiszen $t \le 0$ esetén nyilvánvaló, $t > 0$ esetén pedig következik abból, hogy a (8.1) függvények mind megoldásai a hővezetési egyenletnek.
A lokális integrálhatóság pedig következik pedig következik a b) részből, ugyanis ha $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ korlátos halmaz, akkor létezik $T > 0$, amelyre $K \subset \mathbb{R}^n \times [-T, T]$, így

$$\int_K |E|\,dx\,dt = \int_K E\,dx\,dt \le \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}^n} E(t,x)\,dx \right) dt = 2T < \infty.$$

$\square$

8.3. *Megjegyzés.* A 8.2. Állítás a) és b) része szemléletesen azt jelenti, hogy az $E(x,t)$ alapmegoldás $t = 0$ esetén mindenhol 0-vá válik, kivéve az origót, ahol végtelen lesz az értéke. Azonban az E függvénynek minden rögzített $t > 0$ esetén az egész $\mathbb{R}^n$ téren vett integrálja 1, tehát „határátmenettel” kapjuk, hogy $E(x,0)$ integrálja is 1, Ez lényegében azt fejezi ki, hogy

$$E(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \ne 0, \\ +\infty, & \text{ha } x = 0, \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{\mathbb{R}^n} E(x,0)\,dx = 1.$$

Később precízen látni fogjuk, hogy $E(x,0)$ a Dirac-delta „függvény”, $E(x,0) = \delta(x)$. Más szóval E megoldása a következő feladatnak:

$$\begin{cases} \partial_t E - \Delta E = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ E(x,0) = \delta(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ha most $g \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, és az

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\text{-ban}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{8.3}$$

feladat megoldását keressük, akkor formálisan

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t)g(y)\,dy \tag{8.4}$$

megoldás, „hiszen”

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t E(x-y,t) - \Delta E(x-y,t)\big) g(y)\,dy = 0,$$

valamint

$$u(x,0) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,0)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}}^{n} \delta(x-y)g(y)\,dy = g(x).$$

A következő szakaszban megmutatjuk, hogy az iménti formális okoskodás matematikailag precízzé tehető, és a (8.4) valóban megoldást ad a (8.3) feladatra.

8.3. Cauchy-feladatok

Ebben a szakaszban a hővezetési egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladatokkal foglalkozunk, célunk a megoldások előállítása. Látni fogjuk, hogy a megoldás általában nem egyértelmű, csak ha megfelelő növekedési feltételt írunk elő.

8.3.1. A klasszikus Cauchy-feladatok kitűzése

Először a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatok fogalmát értelmezzük. Tekintsük az egyszerűség kedvéért a

$$\partial_t u - \Delta u = f, \tag{8.5}$$

hővezetési egyenletet, ahol a keresett $u\colon \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény $n+1$-edik változóját t-vel jelöljük, a Δ operátor pedig csak az elsőtől az n-edik változóra vonatkozik. A hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti a hővezetési egyenletet az $\mathbb{R}^n \times \times (0,\infty)$ féltérben, illetve $t=0$ esetén u-ra valamilyen kezdeti feltétel teljesül, azaz

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\text{-ben},\\ \text{kezdeti feltétel} & \mathbb{R}^n \times \{0\}\text{-n}. \end{cases}$$

Olyan u megoldást keresünk, amely a t változóban egyszer, a többi változóban pedig kétszer folytonosan differenciálható. Ennek érdekében bevezetjük a $C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ teret:

$$C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) := \big\{u\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R} : \partial_t u, \partial_{ij} u \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)), i,j \neq 0\big\}.$$

A fenti függvénytér segítségével már pontosan definiálhatjuk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmát.

8.4. Definíció. A (8.5) *hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatban* (más szóval *kezdetiérték-feladatban*) olyan $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (8.5) egyenletet $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ esetén, továbbá $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, valamint teljesül az $u(x,0) = g(x)$ $(x \in \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltétel, ahol $g \in C(\mathbb{R}^n)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{8.6}$$

A hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot két részfeladatra bonthatjuk, az egyikben $f = 0$, azaz

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \Delta u_1 = 0 & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u_1(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n), \end{cases}$$

a másikban pedig $g = 0$, vagyis

$$\begin{cases} \partial_t u_2 - \Delta u_2 = f & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u_2(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

A Cauchy-feladat linearitásából fakadóan világos, hogy ha u_1 és u_2 a részfeladatok megoldásai, akkor $u_1 + u_2$ az eredeti feladat megoldása. Célszerű tehát a részfeladatok megoldásainak előállításával foglalkoznunk és így egyben a klasszikus feladat megoldását is fogjuk nyerni. Az első részfeladat megoldásával kezdjük, ezt követően a második részfeladatot egy ügyes trükkel visszavezetjük az első részfeladatra.

8.3.2. A homogén feladat megoldása

Tekintsük a homogén hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u(x,0) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{8.7}$$

A 8.3. Megjegyzésben egy heurisztikus gondolatmenet segítségével azt kaptuk, hogy a (8.7) feladat egy megoldása várhatóan

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t) g(y)\, dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy. \tag{8.8}$$

A következő tétel mutatja, hogy a heurisztikus formula valóban megoldást ad.

8.5. Tétel. *Legyen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos, folytonos függvény, és értelmezzük az u függvényt a* (8.8) *formulával. Ekkor*

(i) $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, *sőt* $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$*;*

(ii) $\partial_t u - \Delta u = 0$ *a* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *tartományon;*

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,t)\\ x\in\mathbb{R}^n, t>0}} u(x,t) = g(x_0))$ *minden* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *esetén.*

Bizonyítás. Világos, hogy az $(x,t) \mapsto \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{t}}$ függvény végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-en, továbbá minden rögzített $\delta > 0$ esetén bármely deriváltja y-tól független felső korláttal rendelkezik $\mathbb{R}^n \times (\delta,\infty)$-en. Alkalmazható tehát a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tétel, és így

$$\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t E(x-y,t) - \Delta_x E(x-y,t)\big) g(y)\, dy = 0,$$

hiszen E a hővezetési egyenlet alapmegoldása, ezért a 8.2. Állításból következően $\partial_t E(x-y,t) - \Delta_x E(x-y,t) = 0$ minden $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ esetén. Legyen most $x_0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, ekkor a 8.2. Állítás b) része alapján

$$g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t) g(x_0)\, dy,$$

ezért

$$|u(x_0,t) - g(x_0)| \le \int_{\mathbb{R}^n} \big|E(x-y,t)(g(y) - g(x_0))\big|\, dy. \tag{8.9}$$

Megmutatjuk, hogy a (8.9) egyenlőtlenség jobb oldali integrálja „kicsi”, ha (x,t) és $(x_0,0)$ elég közel van egymáshoz. Ehhez az integrált két résztartományon vett integrálra bontjuk, az egyiken g folytonossága miatt $|g(y) - g(x_0)|$ kicsi, a másik tartományon pedig $E(x-y,t)$ kicsi, amennyiben t elég közel van a 0-hoz.
Legyen tehát $\varepsilon > 0$ adott, ekkor a g függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt választhatunk $\delta > 0$ számot úgy, hogy $|y - x_0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n$ esetén $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$. Ebből következően

$$\int_{B(x_0,\delta)} \big|E(x-y,t)(g(y) - g(x_0))\big|\, dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |E(x-y,t)|\, dy = \varepsilon. \tag{8.10}$$

A „maradék” integrál becsléséhez legyen $x \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, amelyre $|x - x_0| \le \delta/2$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\delta)$ esetén

$$|y - x| \ge |y - x_0| - |x_0 - x| \ge |y - x_0| - \frac{1}{2}|y - x_0| = \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

így g korlátosságának felhasználásával

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} \left|E(x-y,t)(g(y)-g(x_0))\right| dy \le \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, dy. \tag{8.11}$$

Azonban

$$\begin{aligned} \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,\delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, dy &= \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_\delta^\infty \int_{B(x_0,r)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}}\, d\sigma_y\, dr = \\ &= \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} \omega_n r^{n-1}\, dr = \\ &= \tilde{C} \int_{\frac{\delta}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{s^2}{16}} s^{n-1}\, ds \xrightarrow{t\to 0+} 0, \end{aligned} \tag{8.12}$$

vagyis ha $|x-x_0| < \delta/2$ és $t > 0$ elég kicsi, akkor a (8.11) egyenlőtlenség jobb oldala ε-nál kisebb, amit összevetve a (8.10) és (8.9) egyenlőtlenségekkel azt kapjuk, hogy

$$|u(x,t) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Ezzel a (iii) tulajdonságot is beláttuk. □

8.6. *Megjegyzés.* A 8.5. Tételből következik, hogy a (8.7) Cauchy-feladat a (8.8) formulával értelmezett u megoldása g simaságától függetlenül minden rögzített $t > 0$ esetén végtelen sokszor differenciálható (sőt valójában analitikus is). A hővezetési egyenlet eme tulajdonságát szokás *parabolikus simításnak* nevezni.

A (8.8) integrált a gyakorlatban célszerű egy könnyebben kezelhető alakba írni. A transzformáció egy egyszerű $\eta = (x-y)/2\sqrt{t}$ helyettesítés, ekkor $dy = (4t)^{\frac{n}{2}}\, d\eta$. Így kapjuk a következő hasznos összefüggést, amelyet lemmaként fogalmazzuk meg

8.7. Lemma. *Legyen $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos függvény. Ekkor*

$$\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta.$$

A 8.7. Lemma segítségével a 8.5. Tétel c) részének bizonyítása egy egyszerű következménnyé válik. Sőt, a g függvényre kissé több simasági feltételt megkövetelve az u megoldás erősebb simaságát igazolhatjuk.

8.8. Tétel. *Legyen $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre g, $\partial_j g$, $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \ldots, n)$ korlátosak és értelmezzük az u függvényt a* (8.8) *formulával. Ekkor*

(i) $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$;

(ii) $\partial_t u - \Delta u = 0$ *a* $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ *tartományon;*

(iii) $\lim\limits_{\substack{(x_t) \to (x_0, t) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = g(x_0)$ *minden* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *esetén.*

Bizonyítás. A 8.7. Lemma alapján

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta.$$

Mivel g korlátos, ezért az u-t definiáló paraméteres improprius integrál egyenletesen konvergens, továbbá az integrandus folytonos az (x,t) paraméterekben, következésképpen u folytonos függvény $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$-en. Hasonlóan, a paraméteres improprius integrálok differenciálásáról szóló tételből következően

$$\partial_t u(x,t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}}\, d\eta,$$

ahonnan parciális integrálással

$$\begin{aligned}
&\partial_t u(x,t) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[-\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \right]_{\eta_j = -\infty}^{\infty} d\eta_1 ... d\eta_{j-1}\, d\eta_{j+1} ... d\eta_n + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\eta|^2} \partial_j^2 g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta_j\, d\eta_1 ... d\eta_{j-1}\, d\eta_{j+1} ... d\eta_n = \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \Delta g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta.
\end{aligned}$$

adódik. Ez utóbbi paraméteres integrál ismét folytonos $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$-en, hiszen Δg korlátos függvény. Ez utóbbi, ugyancsak a paraméteres integrálok deriválhatósága miatt azt is jelenti, hogy

$$\Delta u(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \Delta g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta,$$

ezért $\partial_t u - \Delta u = 0$ a $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ tartományon. □

8.9. *Megjegyzés.* Az előbbi bizonyításokból világos, hogy ha g korlátos függvény, akkor a homogén jobb oldalú Cauchy-feladat a (8.8) formulával értelmezett megoldása is korlátos. Ha $\partial_j g$ és $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \ldots, n)$ is korlátosak, akkor u megfelelő deriváltjai ugyancsak korlátosak.
A bizonyításokból az is kitűnik, hogy a 8.5. Tételben g korlátossága helyett elegendő feltételezni, hogy g nem nő túlságosan gyorsan $|x| \to \infty$ esetén. Pontosabban, elég feltenni, hogy léteznek olyan $K \geq 0$ és $0 \leq \alpha < 2$ konstansok,

amelyekre

$$|g(x)| \le Ke^{|x|^\alpha} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A 8.8. Tételben hasonló jellegű feltételeket elegendő megkövetelni a g, $\partial_j g$ és $\partial_j^2 g$ $(j = 1, \ldots, n)$ függvényekre.

8.3.3. Duhamel-elv és az inhomogén feladat

Tekintsük az inhomogén hővezetési egyenletre vonatkozó homogén kezdeti feltételű klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{8.13}$$

Ezt a feladatot egy ügyes fogással visszavezetjük a (8.7) feladatra. A trükk, amelyet szokás *Duhamel-elvnek* hívni, a későbbiekben más típusú Cauchy-feladatok esetében is működni fog. A lényege a következő: az f jobb oldali függvényt rögzített $t = \tau$ esetén kezdeti feltételnek tekintve megoldások egy családját nyerjük, amelyet a τ paraméter szerint integrálva a (8.13) feladat egy megoldását kapjuk.

8.10. Állítás (Duhamel-elv)**.** *Legyen $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, és rögzített $\tau \in \mathbb{R}^+$ paraméter mellett tekintsük az alábbi klasszikus Cauchy-feladatot:*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u(x,0) = f(x,\tau) & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{8.14}$$

Tegyük fel, hogy minden rögzített $\tau \in [0,\infty)$ esetén a feladatnak létezik $(t,x) \mapsto v(t,x;\tau)$ megoldása úgy, hogy $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, továbbá minden $T > 0$ esetén a $v, \partial_t v, \partial_j^2 v$ $(j = 1, \ldots, n)$ függvények egyenletesen korlátosak a $\tau \in [0,T]$ paramétertartományon. Ekkor az

$$u(x,t) := \int_0^t v(t-\tau, x; \tau)\, d\tau \tag{8.15}$$

formulával értelmezett függvényre $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, továbbá u megoldása a (8.13) klasszikus Cauchy-feladatnak.

A bizonyításhoz a 2.18. Tételt használjuk, amelyet most lemmaként újra kimondunk és be is bizonyítunk.

8.11. Lemma. *Legyen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ létezik és folytonos $\mathbb{R}^2$-en. Értelmezzük a $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $G(x) = \int_a^x g(x,y)\, dy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor*

$$G'(x) = g(x,x) + \int_a^x \partial_1 g(x,y)\, dy.$$

Bizonyítás. Definiáljuk a $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$H(x,z) = \int_a^x g(z,y)\,dy.$$

Ekkor $G(x) = H \circ h$, ahol $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x,x)$. Világos, hogy h folytonosan differenciálható, deriváltja $h'(x) = (1{,}1)$, továbbá $\partial_1 g$ folytonosságából adódóan H is folytonosan differenciálható és

$$H'(x,z) = \left(g(x,x), \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy\right).$$

Ekkor az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} G'(x) = H'(h(x)) \cdot h'(x) &= \left(g(x,x), \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy\right) \cdot (1{,}1) = \\ &= g(x,x) + \int_a^x \partial_1 g(x,y)\,dy, \end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. □

A 8.10. Állítás bizonyítása. Nyilván $u(x,0) = \int_0^0 (\dots) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$. Másrészt a 8.11. Lemmában szereplő deriválási szabályt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\partial_t u(x,t) = v(x,0;t) + \int_0^t \partial_t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau.$$

Mivel v megoldása a (8.14) Cauchy-feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, ezért $v(x,0;t) = f(x,t)$. Ezenkívül a megfelelő simasági feltételből adódóan alkalmazhatjuk a paraméteres integrálok deriválásáról szóló tételt az x változóban is, azaz

$$\Delta u(x,t) = \int_0^t \partial_x^2 v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau.$$

A fenti összefüggéseket összevetve kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(t,x) + \int_0^t (\partial_t v(x,t-\tau;\tau) - \Delta v(x,t-\tau;\tau))\,d\tau = f(t,x),$$

hiszen $\partial_t v - \Delta v = 0$ minden τ paraméter mellett, mert v megoldása a (8.14) Cauchy-feladatnak. □

8.12. *Történeti megjegyzés.* Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872) francia fizikus és matematikus, aki többek között a hővezetés kapcsán foglalkozott differenciálegyenletekkel. Az elvet valószínűleg nem ő fedezte fel, de a hővezetésről szóló munkái nyomán később róla nevezték el.

A Duhamel-elv és a 8.8. Tétel segítségével a (8.6) klasszikus Cauchy-feladat megoldására vonatkozóan a következő összefüggést nyerjük.

8.13. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos függvény, továbbá $f \in \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, amelyre az $f, \partial_t f, \partial_j f, \partial_j^2 f$ $(j = 1,\ldots,n)$ függvények minden $T > 0$ esetén korlátosak az $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ tartományra megszorítva. Ekkor a hővezetési egyenletre vonatkozó* (8.6) *klasszikus Cauchy-feladatnak létezik olyan megoldása, amely minden $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ $(T > 0)$ sávban korlátos, mégpedig*

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi,\tau) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau + \\ + \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi. \end{aligned} \tag{8.16}$$

8.14. *Megjegyzés.* A 8.7. Lemmát alkalmazva a (8.16) formulát az alábbi alakba is írhatjuk:

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(x - 2\sqrt{t-\tau}\eta, \tau)\, d\eta\, d\tau + \\ + \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta. \end{aligned}$$

8.3.4. Egyértelműség

Az előző szakasz 8.13. Tétele alapján azt gondolhatnánk, hogy a (8.16) formulával értelmezett u függvény a hővezetési egyenlet egyértelmű megoldását szolgáltatja. Ez azonban nem igaz, a homogén jobb oldalú és homogén peremfeltételű

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u(x,0) = 0 & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak végtelen sok 0-tól különböző megoldása van. Ezek a megoldások gyorsan nőnek $|x| \to \infty$ esetén. Egy lehetséges konstrukciót megoldások előállítására a 8.3.5. szakaszban mutatunk. Ha azonban a megoldások növekedésére megfelelő feltételt szabunk, akkor az iménti feladat megoldása egyértelmű. A következő tételt igazoljuk az alábbiakban.

8.15. Tétel. *Legyen $g \in C(\mathbb{R}^n)$ és $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$, ahol $T > 0$ adott. Ekkor a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben}, \\ u(x,0) = g & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy olyan $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *megoldása lehet, amelyre*

$$|u(x,t)| \le Ce^{\gamma|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T)$$

valamilyen rögzített $C, \gamma > 0$ *konstansokkal.*

A bizonyítás a Cauchy-feladatra vonatkozó maximumelven fog múlni. Ehhez először korlátos tartományon igazoljuk a maximumelvet. Ennek motivációja a Laplace-egyenletre vonatkozó maximumelvéhez hasonló. Képzeljük el, hogy az u függvény írja le az Ω korlátos tartomány pontjainak hőmérsékletét, és tegyük fel, hogy a tartományban nincsenek hőforrások. Ekkor világos, hogy a tartomány tetszőleges belső pontjának hőmérséklete bármely időpontban legfeljebb akkora, mint a perem maximális hőmérséklete, illetve a kezdeti maximális hőmérséklet. Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $T > 0$. Ekkor *parabolikus hengeren* a $Q_T = \Omega \times (0,T]$ halmazt értjük, és *parabolikus peremen* pedig a $\Gamma_T := \overline{Q_T} \setminus Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ halmazt.

8.16. Tétel (Gyenge maximumelv)**.** *Tegyük fel, hogy az* $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{Q_T})$ *függvényre* $\partial_t u - \Delta u \le 0$ *a* Q_T *hengeren. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\partial_t u - \Delta u < 0$ a Q_T hengeren. Megmutatjuk, hogy ekkor u a $\overline{Q_T}$-beli maximumát a parabolikus peremen veszi fel. Ellenkező esetben ugyanis lenne egy $(x_0, t_0) \in Q_T$ pont, amelyre $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u$. Ha $0 < t_0 < T$, akkor (x_0,t_0) lokális maximumhely, következésképpen $\partial_t u(x_0,t_0) = 0$, továbbá $\Delta u(x_0,t_0) \le 0$, hiszen $\partial_j^2 u(x_0,t_0) \le 0$ minden $j = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor azonban $\partial_t u(x_0,t_0) - \Delta u(x_0,t_0) \ge 0$, ami ellentmond az előbbi feltevéseknek. Amennyiben $t_0 = T$, akkor $\partial_t u(x_0,t_0) \ge 0$, és továbbra is $\Delta u(x_0,t_0) \le 0$, vagyis $\partial_t u(x_0,t_0) - \Delta u(x_0,t_0) \ge 0$, ami megint ellentmondás.
Az általános esethez legyen $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$, ahol $\varepsilon > 0$. Ekkor $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = \partial_t u - \Delta u - \varepsilon < 0$, így az előzőek alapján $\max_{\overline{Q_T}} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon$. Mivel $\varepsilon \to 0+$ esetén $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{Q_T}$-n, így határátmenettel adódik az állítás. □

8.17. *Megjegyzés.* Ahogy a Laplace-egyenlet esetében, úgy most is a gyenge maximumelvnél valójában erősebb állítás érvényes. Ezzel a 8.4.1. szakaszban foglalkozunk részletesen.

8.18. Tétel (Maximumelv Cauchy-feladatokra)**.** *Legyen* $T > 0$ *és tegyük fel, hogy az* $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *függvényre* $\partial_t u - \Delta u = 0$ *a*

$\mathbb{R}^n \times (0,T)$ halmazon, továbbá

$$|u(x,t)| \le Ce^{\gamma|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le T)$$

valamilyen rögzített $C > 0$ és $0 < \gamma < \frac{1}{4T}$ konstansokkal. Ekkor

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Bizonyítás. A feltevés szerint létezik $\varepsilon > 0$, amelyre $4\gamma(T+\varepsilon) < 1$. Legyen $y \in \mathbb{R}^n, \mu > 0$ és értelmezzük a

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0),$$

más szóval

$$v(x,t) = u(x,t) - (4\pi)^{\frac{n}{2}} \mu E(\mathrm{i}(x-y), T+\varepsilon-t).$$

Következésképpen $\partial_t v - \Delta v = 0$ az $\mathbb{R}^n \times (0,T]$ sávban. Legyen $r > 0$ és tekintsük a $Q_T = B(y,r) \times (0,T)$ parabolikus hengert, amelyen alkalmazhatjuk a maximumelvet, így

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\Gamma_T} v.$$

Megmutatjuk, hogy

$$\max_{\Gamma_T} v \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0), \tag{8.17}$$

ezért $v(y,t) \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0)$ minden $y \in \mathbb{R}^n$, $0 \le t \le T$ esetén. Innen $\mu \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \le \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x,0).$$

A fordított irányú egyenlőtlenség nyilvánvaló, így ezzel a tétel bizonyítása kész. Hátravan tehát a (8.17) egyenlőség igazolása. Legyen ezért $(x_0, t_0) \in \in \Gamma_T$, azaz $t_0 = 0$ vagy $x_0 \in S(y,r)$. Ha $t_0 = 0$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n$, akkor

$$v(x_0,0) = u(x_0,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x_0-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \le u(x_0,0).$$

Ha pedig $|x_0 - y| = r$, $0 \le t \le T$, akkor

$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \le \\ &\le Ce^{\gamma|x|^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \le \\ &\le Ce^{\gamma(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \xrightarrow{r\to\infty} -\infty, \end{aligned}$$

hiszen $1/(4(T+\varepsilon)) > \gamma$. Emiatt elég nagy r esetén

$$v(x_0, t) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Beláttuk tehát, hogy

$$v(x_0, t_0) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) \quad ((t_0, x_0) \in \Gamma_T),$$

így a (8.17) egyenlőtlenség is teljesül. □

8.19. *Megjegyzés.* A 8.18. Tétel valójában azt jelenti, hogy minden $0 \leq$ $\leq t_1, t_2 \leq T$ esetén

$$\sup_{\mathbb{R}^n} u(x, t_1) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x, t_2).$$

Tekinthetjük ekkor a $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, $\mathbb{R}^n \times [T,2T]$ stb. sávokat, amelyek mindegyikén igaz az egyenlőség, így tetszőleges sávban nyerjük az állítást, vagyis a tételben szereplő, γ-ra vonatkozó felső becslés elhagyható.

A 8.18. Tételből azonnal adódik a 8.15. Tétel.

A 8.15. Tétel bizonyítása. Ha u_1 és u_2 a Cauchy-feladat megoldásai, akkor $u = u_1 - u_2$ a homogén feladat megoldása, ami viszont a 8.18. Tétel alapján egyértelmű a megfelelő függvényosztályban, így az csakis az azonosan 0 függvény lehet. □

8.20. Következmény. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 8.13. Tétel feltételei. Ekkor a hővezetési egyenletre vonatkozó* (8.6) *klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik olyan megoldása, amelyre minden* $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ *(*$T > 0$*) sávban*

$$|u(x, t)| \leq C_T e^{\gamma_T |x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \leq t \leq T)$$

valamilyen (T*-től függő)* $C_T, \gamma_T > 0$ *konstansokkal. Ezt az egyértelmű megoldást a* (8.16) *formulával adhatjuk meg.*

Érdemes kiemelnünk a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladat (8.16) képlettel meghatározott megoldásának két fontos tulajdonságát.

8.21. Állítás. *Legyen* u *a* (8.6) *Cauchy-feladat* (8.16) *képlettel adott megoldása. Ekkor*

a) *ha* f *és* g *nemnegatív függvények, akkor* u *is nemnegatív.*

b) *ha* f *nemnegatív és* $g \geq 0, g \neq 0$, *akkor* $u(t, x) > 0$ *minden* $x \in \mathbb{R}^n$ *és* $t > 0$ *esetén.*

Bizonyítás. Az a) rész nyilvánvalóan következik a megoldás formulájából és abból, hogy nemnegatív függvények integrálja ugyancsak nemnegatív. A b) részhez pedig annyit kell megjegyeznünk, hogy egy nemnegatív nem azonosan 0 folytonos függvény integrálja $\mathbb{R}^n$-en pozitív. □

8.22. *Megjegyzés.* A 8.21. Állítás azt jelenti, hogy a hővezetési egyenlet olyan jelenséget ír le, amelyben a hatás végtelen sebességgel terjed. Ha a kezdeti hőmérséklet nemnegatív és egy pont körül pozitív, akkor bármilyen későbbi időpillanatban már mindenhol pozitív a hőmérséklet. A kezdeti pozitív hőmérséklet tehát végtelen sebességgel szétterjed. Ez természetesen fizikailag nem valósul meg, ezért a hővezetési egyenlet nem a lehető legrealisztikusabb leírását adja meg a hőterjedésnek. Gyakran ehelyett a porózus közeg egyenletét tekintik, amely véges sebességű hatásterjedést ír le.
Bár a hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak végtelen sok megoldása van, ezek közül a (8.16) formula a fizikailag reális megoldást szolgáltatja. Megemlítjük, hogy a végtelen sok megoldás ellenére David Widder (1898–1990) eredménye szerint legfeljebb egy nemnegatív megoldás létezhet. Ez a fizikai alkalmazások szempontjából ugyancsak ésszerű, például ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

8.3.5. Tyihonov példája

Végtelen sok olyan $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ függvényt konstruálunk, amelyekre $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ az $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ féltérben, $u(0,x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és u nem azonosan 0 az $\mathbb{R}^2_+$ féltérben. Ehhez az alábbi segédállításra van szükségünk.

8.23. Lemma. *Legyen $\alpha > 1$, és*

$$g(t) := \begin{cases} \exp(-t^{-\alpha}), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0. \end{cases}$$

Ekkor létezik $\theta = \theta(\alpha) > 0$ konstans úgy, hogy minden $k = 0{,}1\ldots$ és $t > 0$ esetén

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right).$$

A 8.23. Lemma bizonyítása. Világos, hogy g kiterjeszthető a bal félsíkra reguláris komplex függvénnyé (a logaritmus-, és így bármely hatványfüggvény értelmezhető a felvágott síkon), ezért a Cauchy-integrálformula szerint $t \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$g^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B(t,\varepsilon)} \frac{g(z)}{(z-t)^{k+1}}\, dz.$$

Legyen $\varepsilon = \theta t$, ahol $\theta > 0$ olyan kicsi, hogy a $\partial B(0,\varepsilon)$ körvonalon $\operatorname{Re} z > > \frac{1}{2}t^{-\alpha}$ teljesüljön, ekkor $|\exp(z^{-\alpha})| = \exp(\operatorname{Re} z) \le \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right)$, ezért

$$|g^{(k)}(t)| \le \frac{k!}{2\pi} \le \frac{k!}{(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right).$$

Jegyezzük meg, hogy e becslés alapján $t \to 0+$ esetén $g^{(k)}(t) \to 0$, hiszen a klasszikus analízisből jól ismert módon $t^{-\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) \to 0$ $(t \to 0)$ minden $\beta > 0$ esetén. □

A Tyihonov-féle példában olyan u megoldását keressük az egydimenziós hővezetési egyenletnek, amelyre $u(t,0) = g(t)$ (tehát u nem azonosan 0), $\partial_x u(t,0) = = 0$ $(t > 0)$. Az u függvényt formálisan

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j$$

alakban előállítva, az $u(0,x) = 0$ feltételből $g_0 = g$, $\partial_x u(0,x) = 0$ mellékfeltételből pedig $g_1 = 0$ adódik. Másrészt (egyelőre formális) deriválással a $\partial_t u = \partial_x^2 u$ egyenletből kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j'(t) x^j = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) g_j(t) x^{j-2},$$

ahonnan az együtthatókat összehasonlítva $g_j'(t) = (j+1)(j+2)g_{j+2}(t)$ következik $j = 2,3\ldots$ esetén. Ekkor a rekurzióból $g_{2j+1} = 0$, valamint $g_{2j} = = g^{(j)}/(2j)!$ adódik, így formálisan

$$u(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(t)}{(2j)!} x^{2j}. \tag{8.18}$$

A 8.23. Lemma alapján a nyilvánvaló $k!/(2k!) < 1/k!$ egyenlőtlenség figyelembe vételével

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{g^{(j)}(t)}{(2j)!} x^{2j} \right| &\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|x|^{2k}}{k!\,(\theta t)^k} \exp\left(-\frac{1}{2}t^{-\alpha}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{t}\left[\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{-\alpha}\right]\right) =: U(t,x).\end{aligned} \tag{8.19}$$

A fenti becslésből egyrészt következik, hogy a (8.18) sor minden $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, sőt nyilvánvalóan $t \le 0$ esetén is (ugyanis ekkor

$g^{(k)} = 0$). Másrészt $t \to 0$ esetén $u(t,x) \to 0$ egyenletesen x-ben, $\mathbb{R}$ minden kompakt részhalmazán, ugyanis $\alpha > 1$ folytán

$$\frac{1}{t}\left[\frac{|x|^2}{\theta} - \frac{1}{2}t^{-\alpha}\right] \xrightarrow{t\to 0+} 0.$$

Ezenkívül a (8.19) becslés azt is mutatja, hogy u hatványsorát tagonként majorálja U sora. Mivel U sora egyenletesen konvergens minden rögzített t-re és korlátos x-re, továbbá ugyanez igaz az összes x szerinti deriváltjára, ezért speciálisan a második derivált

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{g^{(j)}(t)}{(2j-2)!}x^{2j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j+1)}(t)}{(2j)!}x^{2j}$$

sor is egyenletesen konvergens. Azonban a fenti sor jobb oldalát formálisan t szerinti deriválással nyerjük u sorából, így a t szerinti tagonkénti deriválás jogos, továbbá $\partial_t u = \partial_x^2 u$. Az eljárást folytatva u sorának x szerinti negyedik deriváltja egyenletesen konvergens, ez viszont megegyezik a formális t-szerint második deriválttal, ezért $\partial_t^2 u = \partial_x^4 u$, és így tovább. Végeredményben $u \in \in C^\infty(\mathbb{R})$, amelyre definíció szerint nem azonosan 0, de $u(0,x) = 0$.
Megjegyezzük, hogy a fenti konstrukció azon múlt, hogy g olyan végtelen sokszor differenciálható függvény, amelynek a 0-ban minden deriváltja 0, azonban u mégsem azonosan 0. Világos, hogy u nem analitikus, hiszen a 0 körüli Taylor-sora nem állítja elő.

8.4. Vegyes feladatok

Ebben a szakaszban a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatokkal foglalkozunk. Ehhez legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ekkor a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatban olyan u függvényt keresünk, amely kielégíti az egyenletet az $\Omega \times (0,\infty]$ hengerben, továbbá u-ra valamilyen kezdeti feltétel adott az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ alaplapon, illetve valamilyen peremfeltétel teljesül a $\partial\Omega \times (0,\infty]$ paláston:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben,} \\ \text{kezdeti feltétel} & \overline{\Omega} \times \{0\}\text{-n,} \\ \text{peremfeltétel} & \partial\Omega \times (0,T]\text{-n.} \end{cases}$$

Az egyszerűség kedvéért a peremfeltételt válasszuk Dirichlet-félének, ekkor a klasszikus vegyes feladat így írható:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben,} \\ u(x{,}0) = \varphi_1(x) & (x \in \overline{\Omega}), \\ u(x,t) = \varphi_2(x,t) & (x \in \partial\Omega{,}0 < t \le T). \end{cases}$$

Korábban már bevezettük a $Q_T = \Omega \times (0,T]$ halmazt, amelyet parabolikus hengernek hívunk, illetve a $\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$ halmazt, amelyet pedig parabolikus peremnek. Ekkor a kezdeti és peremfeltételt egybevonhatjuk a parabolikus peremen megadott peremfeltétellé, mégpedig $u|_{\Gamma_T} = g$, ahol $g = \varphi_1$ az $\overline{\Omega} \times \{0\}$ halmazon és $g = \varphi_2$ a $\partial\Omega \times (0,T]$ halmazon. Világos, hogy ha a vegyes feladatnak olyan megoldását keressük, amely folytonos a Q_T henger lezártján, akkor g folytonos, így a φ_1, φ_2 függvényekre a $\varphi_1(x{,}0) = \lim_{t\to 0+} \varphi_2(x,t)$ *csatlakozási feltételnek* kell teljesülnie minden $x \in \partial\Omega$ esetén. Érdemes most pontosan megfogalmaznunk, mit is értünk a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladat megoldásán első peremfeltétel mellett.

8.24. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány és $0 < T < \infty$. Ekkor a (8.5) *hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus vegyes feladatban* (vagy *kezdeti-peremértékfeladatban*) olyan $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T])$ függvényt keresünk, amely kielégíti a (8.5) egyenletet $f \in C(\Omega \times (0,T])$ esetén, továbbá $u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$, valamint teljesül az $u|_{\Gamma_T} = g$ feltétel, ahol $g \in C(\Gamma_T)$ adott függvény:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ \qquad u|_{\Gamma_T} = g. \end{cases} \tag{8.20}$$

8.4.1. Maximum- és minimumelvek

Az alábbiakban a Laplace-egyenletre vonatkozó maximum- és minimumelveknek a hővezetési egyenletre vonatkozó megfelelőit tárgyaljuk. A motiváció a Laplace-egyenlet, vagyis a stacionárius hővezetés esetéhez hasonló. Ha az Ω tartományban nincsenek források, akkor a hőmérséklet bármely későbbi időpontban nem lehet nagyobb, mint a kezdeti hőmérséklet, illetve a perem hőmérséklete. Ezt a gyenge maximumelvet már megfogalmaztuk és be is láttuk a Cauchy-feladat egyértelműségével foglalkozó 8.3.4. szakaszban. A teljesség kedvéért most újra kimondjuk.

8.25. Tétel (Gyenge maximumelv)**.** *Tegyük fel, hogy az* $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{Q_T})$ *függvényre* $\partial_t u - \Delta u \le 0$ *a* Q_T *hengeren. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

8.26. *Megjegyzés.* A stacionárius hővezetés esetéhez hasonló módon a gyenge maximumelvnél valójában erősebb összefüggés is igaz: ha az $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \le 0$ a Q_T hengeren, ahol Ω korlátos tartomány (fontos az összefüggőség!), továbbá u felveszi $\overline{Q_T}$-beli maximumát Q_T egy (x_0, t_0) belső pontjában, akkor u konstansfüggvény a Q_{t_0} hengeren. Más szóval, ha u valamilyen időpillanatban Ω belsejében felveszi a maximumát, akkor minden korábbi időpillanatban ezzel a maximummal kell megegyeznie. Ez a későbbi időpillanatokra már nem feltétlenül igaz, ott a peremfeltételtől függően u „bármi" lehet. Az erős maximumelv bizonyítása a harmonikus függvények középértéktételének a hővezetési egyenletre vonatkozó analógiájának segítségével történhet. Ennek bizonyítása azonban túlmutat könyvünk keretein.

A gyenge maximumelvet a $-u$ függvényre alkalmazva nyerjük a *gyenge minimumelvet.*

8.27. Tétel (Gyenge minimumelv $q = 0$ esetén)**.** *Tegyük fel, hogy az* $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{Q_T})$ *függvényre* $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ *a* Q_T *hengeren. Ekkor*

$$\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

8.28. *Megjegyzés.* Hasonlóan az erős maximumelvhez, érvényes az erős minimumelv is: ha az $u \in C^{1,2}(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{Q_T})$ függvényre $\partial_t u - \Delta u \geq 0$ a Q_T hengeren, ahol Ω korlátos tartomány (fontos az összefüggőség!), továbbá u felveszi $\overline{Q_T}$-beli maximumát Q_T egy (x_0, t_0) belső pontjában, akkor u konstansfüggvény a Q_{t_0} hengeren.

A maximumelvet könnyedén általánosíthatjuk a $\partial_t u - \Delta u$ operátor helyett a

$$\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu$$

alakú operátorra is, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$.
Először a $q = 0$ esetet érdemes megfogalmaznunk.

8.29. Tétel (Gyenge maximumelv $q = 0$ esetén)**.** *Tegyük fel, hogy* $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$*, amelyre* $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u \leq 0$ *a* Q_T *hengeren, ahol* $p \in C^1(\overline{Q_T})$*,* $p > 0$ *és* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos nyílt halmaz. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

A bizonyítás szó szerint megegyezik a 8.25. Tétel bizonyításával, ezért a végiggondolását az Olvasóra bízzuk. A $q \geq 0$ esetben a következő tétel igaz.

8.30. Tétel (Gyenge maximumelv $q \geq 0$ esetén)**.** *Tegyük fel, hogy* $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$*, amelyre* $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u + qu \leq 0$ *a* Q_T *hengeren, ahol* $p \in C^1(\overline{Q_T})$*,* $p > 0$*,* $q \in C(\overline{Q_T})$*,* $q \geq 0$ *és* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos nyílt halmaz. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\partial_t u - \Delta u < 0$ és u-nak pozitív maximuma van a $(x_0, t_0) \in Q_T$ pontban. Ekkor $\partial_t u(x_0, t_0) - \Delta u(x_0, t_0) \geq 0$

a 8.29. Tétel bizonyításához hasonlóan, továbbá $c(x_0,t_0)u(x_0,t_0) > 0$, így az (x_0,t_0) pontban $\partial_t u - \Delta u + cu > 0$, ami ellentmond a feladat feltételeinek. Az általános esetben legyen $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$ (ahol $\varepsilon > 0$), ekkor $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + cu_\varepsilon < 0$. Ha u-nak pozitív maximuma lenne az $(x_0,t_0) \in Q_T$ pontban, akkor elég kis ε-t véve az u_ε függvénynek is pozitív maximum lenne egy Q_T-beli pontban, hiszen $u_\varepsilon \to u$ egyenletesen $\overline{Q_T}$-n. Azonban u_ε-nak nem lehet pozitív maximuma Q_T-n, így u-nak sem. Innen a feladat állítása nyilvánvalóan következik. □

8.31. *Megjegyzés.* A 8.30. Tételt a $-u$ függvényre alkalmazva nyerjük a következő minimumelvet: ha $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, amelyre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \geq 0$ a Q_T hengeren, ahol $q \in C(Q_T)$, $q \geq 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz, akkor

$$\min_{\overline{Q_T}} u \geq -\min_{\Gamma_T} u^-.$$

Amennyiben pedig $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$, akkor a maximum- és minimumelv is érvényes, így

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|.$$

8.32. Következmény. *Tegyük fel, hogy $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$, amelyre a Q_T hengeren $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u)u + qu \leq 0$ teljesül, ahol $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$, $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$ és $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos nyílt halmaz. Ekkor*

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |u|.$$

8.33. *Megjegyzés.* Az elliptikus esettől eltérően a parabolikus esetben megfogalmazhatók a maximum- és minimumelv bizonyos formái abban az esetben is, ha q nem feltétlenül adott előjelű, de alulról korlátos függvény. Ezeket például az $u(t,x) = e^{\gamma t} u(t,x)$ helyettesítés segítségével vezethetjük vissza a $q \geq 0$ esetre, ahol $q \geq \gamma \in \mathbb{R}$ (tehát q alulról korlátos).

8.4.2. Egyértelműség

A maximum- és minimumelvnek több fontos következménye van a vegyes feladat megoldásaira nézve: a megoldás egyértelműsége és folytonos függése.

8.34. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \leq 0$. Ha a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladatnak létezik $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ megoldása, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás. Legyenek u_1 és u_2 a vegyes feladat megoldásai, ekkor az $u = u_1 - u_2$ függvényre $\partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0$ a Q_T hengeren, továbbá $u|_{\Gamma_T} = 0$, így a 8.32. Következmény miatt $\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u| = 0$, tehát $u_1 = u_2$. □

8.35. Tétel (Folytonos függés)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \geq 0$. Ekkor létezik (csak Ω-tól, T-től, p-től és q-tól függő) $C > 0$ konstans, amellyel minden $f \in C(\overline{Q_T})$ és $g \in C(\Gamma_T)$ esetén a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladat egyértelmű $u \in C^{1,2}(Q_T) \cap C(\Gamma_T)$ megoldására

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \leq \max_{\Gamma_T} |g| + C \max_{\overline{Q_T}} |f|.$$

Bizonyítás. Legyen

$$Lu = \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu.$$

Válasszunk egy tetszőleges Φ függvényt, amelyre $\Phi \geq 0$ és $L\Phi \leq -1$ a Q_T hengeren, például a $\Phi(x) = e^{\lambda x_1}$ függvény elég nagy λ-t választva megfelelő lesz, hiszen

$$L(e^{\lambda x_1}) = \lambda(-p\lambda + \partial_1 p + q)e^{\lambda x_1}.$$

Tekintsük a

$$v(x) = u(x) + \Phi(x) \max_{\overline{Q_T}} |Lu| \quad \text{és} \quad \tilde{v}(x) = -u(x) - \Phi(x) \max_{\overline{Q_T}} |Lu|,$$

függvényeket, ekkor

$$Lv = Lu + L\Phi \max_{\overline{Q_T}} |Lu| \leq 0$$

és hasonlóan

$$L\tilde{v} = -Lu - L\Phi \max_{\overline{Q_T}} |Lu| \geq 0.$$

A v és $\tilde{v}$ függvényekre érvényes tehát a gyenge maximum- és minimumelv, így

$$\max_{\overline{Q_T}} v \leq \max_{\Gamma_T} v^+ \leq \max_{\overline{Q_T}} |u| + \max_{\overline{Q_T}} |\Phi| \max_{\overline{\Omega}} |Lu|,$$

valamint

$$\max_{\overline{Q_T}} \tilde{v} \leq \max_{\Gamma_T} \tilde{v}^+ \leq \max_{\Gamma_T} |\tilde{v}| \leq \max_{\overline{Q_T}} |u| + \max_{\overline{Q_T}} |\Phi| \max_{\overline{Q_T}} |Lu|.$$

Mivel $u \le v$ és $-u \le \tilde{v}$, ezért a fenti egyenlőtlenségekből a $\max_{\overline{Q_T}} |\Phi|$ konstanssal kapjuk, hogy

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| \le \max_{\Gamma_T} |u| + C \max_{\overline{Q_T}} |Lu|.$$

□

A maximum- és minimumelvek mellett a megoldás egyértelműsége igazolható a Green-formulák segítségével is, ahogy ezt a stacionárius hővezetés esetében tettük a 7.23. Tételben. Ekkor azonban csak erősebb simaságú megoldás egyértelműségét tudjuk garantálni a Green-tétel alkalmazhatósági feltételei miatt.

8.36. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T <$ $< \infty$, $p \in C^1(\overline{Q_T})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{Q_T})$, $q \ge 0$. A*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n,} \\ u|_{\Gamma_T} = g \end{cases}$$

vegyes feladat $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ megoldása egyértelmű.

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy ha az $u \in C^{1,2}(\overline{Q_T})$ függvényre

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = 0 & Q_T\text{-n,} \\ u|_{\Gamma_T} = 0, \end{cases}$$

akkor $u = 0$. Legyen

$$E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\,dx \quad (0 \le t \le T),$$

ami nem más, mint a megoldás t időpontbeli potenciális energiája (annak konstansszorosa). Megmutatjuk, hogy E monoton csökkenő függvény, vagyis az energia az időben nem növekedhet, ha nincsenek források. Mivel $E(0) = 0$, ezért $0 \ge E(t) \ge 0$ folytán $E(t) = 0$ minden t esetén, ahonnan pedig $u = 0$ adódik. Az energia monoton csökkenésének igazolásához vegyük észre, hogy a simasági feltételek miatt

$$E'(t) = 2\int_\Omega u\partial_t u = 2\int_\Omega u(\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu) = -2\int_\Omega \left(p\,|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2\right) \le 0.$$

□

A hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladat megoldásának egyértelműségét egy másik esetben is igazolhatjuk, nevezetesen, ha nem egy kezdeti feltételt, hanem egy „végső” feltételt szabunk a megoldásra. Ez azt jelenti, hogy $u(x,0) = \varphi_1(x)$ helyett $u(x,T) = \varphi_1(x)$ feltétel adott, illetve a peremfeltétel. Ekkor „fordított irányú” vegyes feladatról beszélhetünk. Az egyértelműség igazolásához feltesszük, hogy p és q nem függ t-től.

8.37. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, $0 < T < < \infty$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p > 0$ és $q \in C(\overline{\Omega})$, $q \geq 0$. Ha a*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f & Q_T\text{-n}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad u = g & (\partial\Omega \times [0,T]) \cup \left(\overline{\Omega} \times \{T\}\right) \end{cases}$$

„fordított irányú” vegyes feladat $u \in C^2(\overline{Q_T})$ megoldása egyértelmű.

Bizonyítás. Elegendő belátnunk, hogy $f = 0$ esetén a vegyes feladat egyetlen megoldása $u = 0$. Legyen

$$E(t) := \int_\Omega u^2(x,t)\,dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

Megmutatjuk, hogy $E(t) = 0$ minden $0 \leq t \leq T$ esetén. Ehhez először belátjuk, hogy

$$(E'(t))^2 \leq E(t)E''(t). \tag{8.21}$$

Ekkor

$$E'(t) = 2\int_\Omega u\partial_t u = 2\int_\Omega u(\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu) = -2\int_\Omega \left(p\,|\operatorname{grad} u|^2 + qu^2\right).$$

Emiatt

$$\begin{aligned} E''(t) &= -4\int_\Omega (p \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \partial_t u + qu\partial_t u) = \\ &= 4\int_\Omega (\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu)\,\partial_t u = \\ &= 4\int_\Omega (\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu)^2. \end{aligned}$$

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján tehát

$$\left(2\int_\Omega u(\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu)\right)^2 \leq \int_\Omega u^2 \cdot 4\int_\Omega (\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu)^2,$$

ami éppen a (8.21) egyenlőtlenség. Tegyük fel most, hogy $E(t) > 0$ valamilyen $[t_1, t_2] \subset [0,T]$ intervallumon. Ekkor t_2 megválasztható úgy, hogy $E(t_2) = = 0$, hiszen $E(T) = 0$. Értelmezzük az $F(t) = \log E(t)$ függvényt a $[t_1, t_2)$

intervallumon! Erre a (8.21) egyenlőtlenség alapján teljesül, hogy

$$F''(t) = \frac{E''(t)}{E(t)} - \frac{(E'(t))^2}{E^2(t)} \geq 0,$$

vagyis F konvex függvény, így

$$F((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)F(t_1) + \tau F(t).$$

Következésképpen

$$0 \leq E((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq E(t_1)^{1-\tau} E(t)^{\tau},$$

ahonnan $t \to t_2$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$0 = E((1-\tau)t_1 + \tau t_2)$$

minden $0 < \tau < 1$ esetén. Ez viszont azt jelenti, hogy $E(t) = 0$ minden $t_1 \leq t \leq t_2$ esetén, ami ellentmondás. $\square$

8.4.3. Fourier-módszer

A Laplace-egyenlet esetében ismertettünk egy eljárást, amelynek segítségével a megoldásokat állíthatjuk elő Fourier-sor alakjában. Ezt a módszert a hővezetési egyenletre vonatkozó vegyes feladatra is általánosíthatjuk. Tekintsük tehát a következő vegyes feladatot homogén Dirichlet-peremfeltétellel:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \Omega \times (0,T]\text{-ben}, \\ \quad u(x,0) = g(x) & (x \in \overline{\Omega}) \\ \quad u(t,x) = 0 & \partial\Omega \times (0,T]\text{-n}. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük a homogén Dirichlet-peremfeltételű $-\Delta$ operátornak az Ω tartományhoz tartozó sajátértékeit és sajátfüggvényeit. Ismeretes (lásd például a [80] könyvet), hogy megfelelően sima határú korlátos Ω tartomány esetén a $(-\Delta)$ operátorra vonatkozó klasszikus sajátérték-feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok nemnulla λ_k sajátértéke van, és ehhez tartozó u_k sajátfüggvények teljes ortogonális rendszert alkotnak. Ekkor a vegyes feladat megoldását célszerű

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) u_k(x)$$

alakban keresni. A sor megfelelő konvergenciája mellett a peremfeltétel automatikusan teljesül, másrészt pedig

$$\partial_t u - \Delta u = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi'(t) - \xi_k L u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k) u_k.$$

Írjuk fel az f függvényt is minden rögzített t esetén a sajátfüggvények bázisában

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) u_k(x),$$

ekkor szükségképpen

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = c_k(t).$$

Ezenkívül a kezdeti feltételt is célszerű felírni a sajátfüggvények bázisában,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k(x),$$

így szükségképpen

$$\xi(0) = d_k.$$

A ξ_k függvényekre tehát kezdetiérték-feladatokat nyertünk, ezeknek egyértelmű megoldásából kapjuk a ξ_k függvényeket, és így az u megoldás Fourier-sor alakját. A kapott sor általában csak L^2-ben konvergens. Természetesen homogén Dirichlet-peremfeltétel helyett az ismert peremfeltételek bármelyikét vehetjük, ekkor a Laplace-operátor megfelelő sajátfüggvényei szerint kell sorba fejtenünk a megoldást. Végül homogén peremfeltétel helyett inhomogén peremfeltételt is vehetünk, ekkor célszerű egy partikuláris megoldás megkeresésével kezdeni a feladatot, és így visszavezetni a homogén peremfeltétel esetére.

8.38. Példa. Oldjuk meg az alábbi vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = \sin 2x \cos 2x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

A Fourier-módszert alkalmazzuk. Először is vegyük észre, hogy $\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$. Bontsuk szét a feladatot két részproblémára:

$$\begin{cases} \partial_t v_1(t,x) - \partial_x^2 v_1(t,x) = \dfrac{1}{2} \sin 4x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ v_1(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ v_1(t,0) = v_1(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+) \end{cases}$$

és

$$\begin{cases} \partial_t v_2(t,x) - \partial_x^2 v_2(t,x) = 0 & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ v_2(0,x) = \sin 3x - 4 \sin 5x & (x \in [0,\pi]), \\ v_2(t,0) = v_2(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Tekintsük az első problémát! Írjuk fel a $\sin 4x$ függvényt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot \sin kx$ alakban! Világos, hogy $c_k = 1$, ha $k = 4$ különben pedig $c_k = 0$. Ekkor az u_1 megoldást $v_1(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \sin kx$ alakban keresve, az egyenlet és a mellékfeltétel felhasználásával kapjuk, hogy $\xi_k = 0$, ha $k \neq 4$, továbbá ξ_4-re a $\xi_4'(t) + 16\xi_4(t) = \frac{1}{2}$ közönséges differenciálegyenlet és a $\xi_4(0) = 0$ kezdeti feltétel adódik. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^{16t}-vel szorozva $e^{16t}\xi_4'(t) + 16e^{16t}\xi_4(t) = \frac{1}{2}$, azaz $(e^{16t}\xi_4(t))' = \frac{1}{2}e^{16t}$, így $\xi_4(t) = e^{-16t}\xi(0)_4 + \frac{1}{32}(1-e^{-16t}) = \frac{1}{32}(1-e^{-16t})$. Az első részfeladat megoldása tehát $v_1(t,x) = \frac{1}{32}(1-e^{-16t}) \sin 4x$.

Tekintsük most a második részfeladatot! Mivel a kezdeti függvény a homogén Dirichlet-féle peremfeltétellel adott (mínusz) Laplace-operátor sajátfüggvénye, ezért keressük a megoldást $v_2(t,x) = d_1(t) \sin 3x + kd2(t) \sin 5x$ alakban. Ekkor az egyenletbe helyettesítve és a kezdeti feltételt figyelembe véve (az előző rész gondolatmenetére támaszkodva) d_1-re és d_2-re a következő egydimenziós kezdetiérték-feladat adódik: $d_1'(t) = -9d_1(t), d_1(0) = 1$ és $d_2'(t) = -25d_2, d_2(0) = -4$. Ezek megoldásai $d_1(t) = e^{-9t}$ és $d_2(t) = -4e^{-25t}$, így a második részfeladat megoldása $v_2(t,x) = e^{-9t} \sin 3x - 4e^{-25t} \sin 5x$.
A vegyes feladat megoldása a linearitás miatt a két részfeladat megoldásának összege, vagyis $u(t,x) = \frac{1}{32}(1-e^{-16t}) \sin 2x + e^{-9t} \sin 3x - 4e^{-25t} \sin 5x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű.

8.39. Példa. Oldjuk meg a következő vegyes feladatot a Fourier-módszerrel!

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t \cos x & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = 0 & (x \in [0,\pi]), \\ u'(t,0) = u'(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

Az előzőek mintájára a Fourier-módszert alkalmazzuk, keressük most az u megoldást $u(t,x) = d(t) \cos x$ alakban, hiszen Neumann-típusú peremfeltétel adott, amelynek $\cos x$ sajátfüggvénye a $(0,\pi)$ intervallumon. Ekkor a kezdeti feltételből $d(0) = 0$ adódik, továbbá u-t az egyenletbe helyettesítve a $d'(t) + d(t) = t$ közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A differenciálegyenlet mindkét oldalát e^t-vel szorozva $e^t d'(t) + e^t d(t) = te^t$ adódik, így $(e^t d(t))' = te^t$, tehát (mivel $(te^t - e^t)' = te^t$, ezért) $d(t) = t - 1 + ce^{-t}$, így a kezdeti feltétel alapján $d(t) = t - 1 + e^{-t}$. A parabolikus vegyes feladat megoldása tehát $u(t,x) = (e^t + t - 1) \cos x$. Más megoldás nincs, mert a vegyes feladat megoldása egyértelmű (lásd előadás).

8.5. Feladatok

8.1. Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatokat!

a) $$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u(x,0) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R} \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u(x,0) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

8.2. Tekintsük a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R} \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u(x,0) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ha g páratlan függvény, akkor a feladat egyértelmű megoldása is páratlan minden rögzített t esetén.

8.3. Tekintsük a következő, negyedtéren értelmezett vegyes feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times (0,\infty)\text{-ben}, \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^+), \\ u(0,t) = \varphi(t), \end{cases}$$

ahol $\varphi(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy ekkor a következő formulával értelmezett u függvény megoldása az előbbi feladatnak:

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} \varphi(s)\, ds.$$

8.4. Tegyük fel, hogy u megoldása a hővezetési egyenletnek, és legyen $\Phi \in \in C^2(\mathbb{R})$ konvex függvény. Igazoljuk, hogy ekkor a $v = \Phi(u)$ függvényre $\partial_t v - \Delta v \leq 0$.

8.5. Igazoljuk, hogy ha u megoldása a hővezetési egyenletnek, akkor a $v = = |\operatorname{grad} u|^2 + (\partial_t u)^2$ függvényre $\partial_t v - \Delta v \leq 0$.

III. rész

Disztribúcióelmélet

9. fejezet

Disztribúcióelmélet

Utasítsak vissza egy finom vacsorát csupán azért, mert nem teljesen értem az emésztés folyamatát?

Oliver Heaviside (1850–1925)

A fejezet tartalma. Bevezetjük a disztribúció fogalmát, a disztribúciókkal kapcsolatos műveleteket, a deriváltat, direkt szorzatot és a konvolúciót.

9.1. Motiváció

A matematikában számtalan helyen találkozunk olyan problémával, amelyet az addig megalkotott eszközeink segítségével nem tudunk kezelni. Gondoljunk például arra a folyamatra, ahogy a természetes számok halmazát fokozatosan kibővítettük, először bevezetve a negatív egészeket, majd a racionális számokat, aztán a valós számokat és végül a komplex számokat (amelyet még természetesen tovább bővíthetünk).

Mindenki számára világos, hogy ezek a bővítések korántsem öncélúak, hiszen a természetes számok halmazán kisebb számból nagyobb szám kivonásának nincs értelme, enélkül a mindennapi életünk is megállna, a legegyszerűbb műveleteket sem tudnánk elvégezni. A racionális számokra többek között az osztás elvégzése miatt van szükség, de valós számok nélkül nem tudnánk megadni egy egység oldalú négyzet átlójának hosszát. Végül a komplex számokra (sok egyéb ok mellett) például a harmadfokú egyenletek megoldóképlete kapcsán van nagy szükség, ugyanis csak a valós számok segítségével a képlet nem adja vissza az egyenlet három különböző valós gyökét (ez az úgynevezett casus irreducibilis). Másfelől, aki már használta a komplex számokat, az tudja, hogy rengeteg, a valós számok körében nehéznek látszó vagy kevésbé világos

(például közönséges differenciálegyenletekkel kapcsolatos) probléma komplex számokra áttérve sokszor könnyedén kezelhető.
Ez utóbbi bővítések látszólag a mindennapi életben már szinte alig, hanem kizárólag a matematikusok számára lehetnek fontosak. Azonban a fent említettekhez hasonló problémákkal számos igen egyszerű fizikai probléma, például pontszerű töltések vagy egységnyi impulzusok matematikai megfogalmazása során is szembesülünk. Az egységnyi impulzus leírására például Paul Dirac Nobel-díjas fizikus a következő, úgynevezett Dirac-delta „függvényt" vezette be 1927-ben:

$$\delta(x) := \begin{cases} \infty, & \text{ha } x = 0, \\ 0, & \text{ha } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{9.1}$$

Világos, hogy a Dirac-delta klasszikus értelemben nem függvény, azonban meglepő módon ennek segítségével számos fizikai összefüggés levezethető. Vegyük észre, hogy meg tudunk adni a „Dirac-deltához közelítő" függvénysorozatot. A 3. fejezetben tárgyalt egységapproximációt generáló η_ε függvények a (3.3) tulajdonságából következően az η_ε sorozat egy a (9.1) alakú „függvényhez" tart.
A Dirac-delta a fizikai összefüggésekben általában egy függvénnyel vett integrálként fordul elő, és az érvelések gyakran az alábbi „tulajdonságára" támaszkodnak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\, dx = f(0). \tag{9.2}$$

A matematikai „képtelenségeket" fokozandó megjegyezzük, hogy Dirac a fenti „függvényt" a következő, úgynevezett Heaviside-függvény deriváltjának tekintette:

$$H(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Ezt a függvényt (ez valóban az) Oliver Heaviside angol villamosmérnök, matematikus és fizikus vezette be elektromágnesességi vizsgálódásai során (egyébként rengeteg, az elektromágnesesség témakörében használatos kifejezés, például impedancia, permeabilitás stb. Heaviside-tól ered). Heaviside a deriválás műveletét operátorként kezelte, és az általa kidolgozott operátorkalkulust közönséges differenciálegyenletek megoldására alkalmazta. Azonban munkáiban sokszor nélkülözte a matematikai precizitást, amiért kortársai gyakran kritikával illették, amelyre ő egyszerűen csak a következőképpen felelt:

> *Utasítsak vissza egy finom vacsorát csupán azért, mert nem teljesen értem az emésztés folyamatát?*

A Dirac-delta „függvény", annak deriválása és egyéb hasonló furcsaságok feloldásának irányában az első lépést Szergej Lvovics Szoboljev (1908–1989) orosz matematikus tette meg 1935–36-ban (lásd [82]) az *általánosított derivált* fogalmának bevezetésével. Általánosított (vagy gyenge) értelemben már nem feltétlenül sima függvényeknek is létezhet deriváltja, amely sima esetben megegyezik a klasszikus deriválttal, tehát ennek a fogalomnak egy kiterjesztése. Az általánosított deriváltakat Szoboljev (főként hiperbolikus) parciális differenciálegyenletek tanulmányozására alkalmazta, a klasszikus megoldások helyett *általánosított (vagy gyenge) megoldások* fogalmát bevezetve.

A Dirac-delta problémájának végső megoldását az *általánosított függvények* vagy *disztribúciók* elmélete hozta meg. Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002) francia matematikus 1944 novemberében egy éjszaka alatt (ahogy ő fogalmazott) „fedezte fel” a disztribúciók elméletét, amelyért 1950-ben megkapta az egyik legnagyobb matematikai elismerést, a Fields-medált. Schwartz saját bevallása szerint élete két legnagyszerűbb pillanata közül az egyik a disztribúciók felfedezésének estéje volt, a másik, amikor egy éjszaka alatt 450 különleges lepkét sikerült begyűjtenie (Schwartz egyik kedvenc időtöltése lepkék gyűjtése volt).

A disztribúciók elméletének alapötlete az volt, hogy függvények általánosítását bizonyos speciális függvények terén értelmezett folytonos lineáris funkcionálokként definiáljuk, amely tulajdonképpen természetesen adódik, hiszen például a (9.2) összefüggés is azt fejezi ki, hogy a Dirac-delta az f függvényre ható funkcionál. Az alaptér a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények tere lesz, és az így nyert disztribúciók tere részhalmazként tartalmazni fogja a klasszikus függvények egy elég nagy osztályát, a lokálisan integrálható függvényeket, ezért valóban általánosított függvényeknek tekinthetjük őket. Azzal, hogy a végtelen sokszor differenciálható függvények terén értelmezett funkcionálokként definiáljuk a disztribúciókat, a deriválás művelete korlátlanul végezhető lesz. Így minden lokálisan integrálható függvénynek értelmezhetjük akármilyen rendű általánosított (vagy disztribúció értelemben vett) deriváltját. Azok az L^p-beli függvények, amelyek általánosított deriváltjai egy bizonyos rendig megfelelő L^p térbeli függvénynek, úgynevezett Szoboljev-tereket alkotnak. A témában Schwartz első cikke (lásd [74]) már tulajdonképpen a teljesen kidolgozott elméletet tartalmazta, amelyeket a későbbiekben mi is tárgyalni fogunk.

A sima függvények egyébként már az általánosított derivált kapcsán Szoboljevnél is megjelentek, később Kurt Otto Friedrichs német-amerikai matematikus alkalmazta a sima függvényekre épülő egységapproximációt, amely végül a disztribúciók és a Szoboljev-terek elméletének egyik alappillére lett (az egységosztás mellett). Később Laurent Schwartznak a disztribúcióelméletről, illetve Szoboljevnek az általánosított derivált matematikai fizikai alkalmazásairól szóló könyve ugyanabban az évben, 1950-ben jelent meg (lásd [75, 84]).

Megjegyezzük, hogy a disztribúció elnevezés a francia *distribution* szóból származik, amelynek jelentése eloszlás. A név abból ered, hogy a lokálisan integ-

rálható függvények, illetve a Dirac-delta tömegeloszlást vagy töltéseloszlást stb. írnak le.
A következőkben (a történeti sorrenddel ellentétben) először rövid betekintést adunk a disztribúcióelméletbe (lásd még a [75, 80] könyveket, illetve a [42] cikket), majd ezt követően a Szoboljev-terek elméletébe (lásd még az [1, 7, 20, 80] könyveket, illetve a [48] jegyzetet). A disztribúcióelmélet az általánosított Cauchy-feladatok megoldása során (lásd a 10. és a 11. fejezeteket), a Szoboljev-terek pedig peremérték-feladatok, illetve vegyes feladatok általánosított (vagy más szóval gyenge) megoldásával kapcsolatban játszik fontos szerepet (lásd a 13. fejezetet). Az általánosított megoldásokra vonatkozó eredményeket a klasszikus megoldásokkal kapcsolatban is alkalmazhatjuk, ezáltal az általánosított függvények köréből visszalépve a függvények körébe.
A fenti történeti áttekintéssel remélhetőleg sikerült motivációt adnunk a következő, kissé idegennek tűnő fogalmak megértéséhez. Akinek ez nem lenne elég, annak zárásképpen álljon itt Dirac egy kedves feladata (lásd a [32] jegyzetet) és a hozzá kapcsolódó szellemes megoldása, amely kiválóan érzékelteti az előbbiekben megfogalmazott gondolatokat.
Hat ember elmegy kókuszdiót gyűjteni. Rengeteg diót szednek össze, de rájuk esteledik, s így az osztozkodást másnapra halasztják. Éjszaka azonban az egyikük felébred, és nem bízván a társaiban, hatfelé osztja a készletet. Ezt meg is tudja tenni úgy, hogy marad egy dió, amelyet a közeli fáról figyelő majomnak dob, a készlet egyhatodát pedig eldugja. Társai sem bíznak jobban egymásban, és az éjszaka során mindegyikük megismétli a szétosztást. Mindig marad egy dió a majomnak, s mindegyikük eldugja az általa szétosztott diók egyhatodát. Végül reggel szétosztják a megmaradt készletet, és a maradék egyetlen diót a majomnak adják. Kérdés: hány diót gyűjtöttek az előző nap?
A feladat nyilván határozatlan, mert ha n egy megoldás, akkor $n+k\cdot 6^7$ is megoldás (k egész), hiszen a két megoldás különbsége hétszer egymás után hatfelé osztható kell, hogy legyen. Elegendő tehát egyetlen megoldását meghatároznunk. Dirac azt vette észre, hogy $n = -5$ jó megoldás, hiszen ebből egyet elvéve -6 marad, ez osztható 6-tal, és az öthatoda, -5 ismét a kezdeti szám, tehát az eljárás akárhányszor ismételhető. Fizikailag azonban az $n = -5$ dió teljesen értelmetlen, a megoldás csupán formálisan jó. Mivel azonban $n+k\cdot 6^7$ is jó megoldás, a legkisebb fizikailag is reális megoldás a $6^7 - 5$.

9.2. A disztribúció fogalma, példák

9.2.1. Disztribúció fogalma

A bevezetőben említettük, hogy az általánosított függvényeket egy függvénytéren értelmezett folytonos lineáris funkcionálokként fogjuk definiálni. Ez a függvénytér a végtelen sokszor differenciálható kompakt tartójú függvények tere lesz, azaz $C_0^\infty(\Omega)$. Azonban $C_0^\infty(\Omega)$ egyelőre csak egy vektortér, így ahhoz, hogy ezen a téren értelmezett lineáris funkcionálok folytonosságáról tudjunk beszélni, szükségünk van valamilyen konvergenciafogalom bevezetésére. A fejezet további részében a jelölések egyszerűsítése céljából az alábbi megállapodással élünk.

9.1. Megállapodás. A továbbiakban, ha másképp nem jelezzük, Ω mindig egy tetszőleges, $\mathbb{R}^n$-beli ($n \geq 1$) nyílt halmazt jelöl.

9.2. Definíció. Tekintsük a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vektorteret a függvények közötti szokásos összeadással és számmal való szorzással. Azt mondjuk, hogy a $(\varphi_j) \subset$ $\subset C_0^\infty(\Omega)$ függvénysorozat tart a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvényhez, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) létezik olyan $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \Omega$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén;

(ii) minden α multiindexre $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial^\alpha \varphi$ egyenletesen az Ω halmazon.

A fenti konvergenciával ellátott teret $\mathscr{D}(\Omega)$-val jelöljük, a tér elemeit *alapfüggvényeknek* (vagy *tesztfüggvényeknek*) nevezzük. A konvergenciára a továbbiakban a $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ tömör jelölést használjuk.

9.3. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az (i)–(ii) feltételekből $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ következik.
A $\mathscr{D}(\Omega)$ tér valójában egy lokálisan konvex topologikus tér, amelyet a $C_0^\infty(\Omega)$ téren egy alkalmas félnormacsalád generál. A fenti konvergenciafogalmat éppen úgy vezettük be, hogy ezen a lokálisan konvex téren pontosan azok a funkcionálok legyenek folytonosak, amelyek a fenti konvergenciára nézve sorozatfolytonosak (lásd a [73] könyvet).
Emlékeztetünk arra, hogy korábban a 3.12. Példában már találkoztunk a következő igen fontos $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$-beli függvényekkel:

$$\eta_{a,r}(x) := \begin{cases} \exp(1/(r^2 - |x-a|^2)), & \text{ha } |x| < r, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq r, \end{cases} \tag{9.4}$$

ahol $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ tetszőleges. A fenti hozzárendeléssel $a = 0$, $r = 1$ esetén nyert η_1 függvény segítségével elkészíthetjük a 3.13. Példában tárgyalt η_ε függvényeket, amelyek η_1 tartójának az egységkörről az ε sugarú körre kicsinyítésével adódnak a $\tilde{\eta}_\varepsilon(x) = \eta_1(\frac{x}{\varepsilon})$ hozzárendelés alapján. A $c_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_1$ jelölést bevezetve, az $\tilde{\eta}_\varepsilon$ függvények integrálját egységnyivé normálhatjuk, és így kapjuk az $\eta_\varepsilon(x) = \tilde{\eta}_\varepsilon/\varepsilon^n c_\varepsilon$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy

$$\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \eta_\varepsilon \geq 0, \quad \operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1.$$

A fenti tulajdonságú függvényekről azt mondtuk, hogy egységapproximációt generálnak, és a 3.18. Tételben megmutattuk, fontos szerepük van $L^p(\Omega)$-beli függvények sima függvényekkel való közelítésében. Ezek az eredmények hamarosan igen hasznos eszközként kerülnek elő a disztribúciókkal kapcsolatban.

A fenti előkészületek után rátérhetünk a disztribúció fogalmának bevezetésére.

9.4. Definíció. A $\mathscr{D}(\Omega)$-n értelmezett valós értékű lineáris és a 9.2. Definícióban bevezetett konvergenciára nézve sorozatfolytonos funkcionálokat *disztribúcióknak* (vagy *általánosított függvényeknek*) nevezzük. (A sorozatfolytonosságon a szokásos fogalmat értjük: ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, akkor $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$.)

9.5. *Megjegyzés.* Megjegyezzük, hogy léteznek olyan $\mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok, amelyek nem folytonosak a 9.2. Definícióban megfogalmazott konvergenciára nézve, ám ennek bizonyítása a kiválasztási axiómára épül.

A 9.2. Definícióban megfogalmazott konvergencia ellenőrzése sokszor nehézkes, ezért az alábbiakban egy azzal ekvivalens és gyakran egyszerűbben kezelhető feltételt bizonyítunk be.

9.6. Tétel. *Egy $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha bármely $K \subset \Omega$ kompakt halmazhoz található $C_K > 0$ valós és $m_K \geq 0$ egész szám úgy, hogy*

$$|u(\varphi)| \leq C_K \cdot \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi| \quad \textit{minden} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \tag{9.5}$$
$$\textit{alapfüggvényre, amelyre} \quad \operatorname{supp} \varphi \subset K.$$

Bizonyítás. Az elégségesség igazolásához tegyük fel, hogy u-ra teljesül a (9.5) feltétel. Megmutatjuk, hogy ekkor u sorozatfolytonos. Ehhez be kell látni, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$, akkor $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$. A $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia definíciója miatt létezik $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, hogy $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ minden j-re (ekkor a 9.3. Megjegyzés miatt $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ is teljesül), továbbá minden α multiindexre $\partial^\alpha \varphi_j \to \partial \varphi$ egyenletesen Ω-n. Ekkor a (9.5) feltételt a K kompakt halmazra és a $(\varphi_j - \varphi)$ függvényekre alkalmazva, u és a deriválás linearitását felhasználásával kapjuk, hogy

$$|u(\varphi_j) - u(\varphi)| = |u(\varphi_j - \varphi)| \leq C_K \cdot \sum_{|\alpha| \leq m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi|.$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala nullához tart a (φ_j) sorozat $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciája miatt, ezért a bal oldalnak is nullához kell tartania, és éppen ezt akartuk igazolni.

A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy u sorozatfolytonos és lássuk be, hogy ekkor teljesül a (9.5) feltétel. Ellenkező esetben létezne $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, amelyre minden $C > 0$ valós és $m \geq 0$ egész szám esetén található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ és

$$u(\varphi) > C \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|.$$

Ekkor a $C = m = j \in \mathbb{N}$ választással nyerünk olyan $(\varphi_j) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ sorozatot, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$, továbbá

$$u(\varphi_j) > j \cdot \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |\partial^\alpha \varphi_j|. \tag{9.6}$$

Bevezetve a $\psi_j = \varphi_j / u(\varphi_j)$ függvényeket ($u(\varphi_j) \neq 0$), ezek ugyancsak $\mathscr{D}(\Omega)$-beliek, tartójuk a K kompakt halmaznak részhalmaza, $u(\psi) = 1$, valamint (9.6) alapján

$$1 = u(\psi_j) > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_K |\partial^\alpha \psi_j|.$$

Ha α tetszőleges rögzített multiindex, akkor a fenti egyenlőtlenségből következően $j \geq |\alpha|$ esetén $\sup_K |\partial^\alpha \psi_j| < 1/j$, és így $j \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $\partial^\alpha \psi_j \to$ egyenletesen K-n. Az előbbi konvergencia minden multiindexre teljesül, továbbá $\operatorname{supp} \psi_j \subset K$, következésképpen $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$. Ekkor az u sorozatfolytonossága miatt $u(\psi_j) \to 0$, ami ellentmondás, hiszen $u(\psi_j) = 1$ minden j-re. □

9.7. *Megjegyzés.* A (9.5) feltételben a szuprémumot K helyett az egész $\mathbb{R}^n$ téren vehetjük, sőt szuprémum helyett maximumot is írhatunk, hiszen csak kompakt tartójú végtelen sokszor differenciálható φ függvényeket tekintünk.

9.2.2. Példák

9.8. Példa. A disztribúciókat általánosított függvényeknek is neveztük, ezzel jelezve, hogy a klasszikus függvények vagy legalábbis azok egy elég bő osztályának általánosításáról van szó. Megmutatjuk, hogy ez az osztály a lokálisan integrálható függvények tere, vagyis $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pontosabban minden $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ térbeli függvénynek megfeleltethetünk egy disztribúciót, a hozzá tartozó úgynevezett *reguláris disztribúciót.*

9.9. Definíció. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tetszőleges. Ekkor tekintsük a következő $T_f \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált:

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{9.7}$$

A T_f funkcionált az f lokálisan integrálható függvényhez tartozó *reguláris disztribúciónak* nevezzük.

A T_f funkcionál linearitása nyilvánvaló, a folytonosságát az alábbiakban igazoljuk.

9.10. Állítás. *A $T_f\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál folytonos a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciára nézve, tehát valóban disztribúció.*

Bizonyítás. Világos, hogy T_f jól definiált, hiszen $f\varphi$ lokálisan integrálható függvény, mert f lokálisan integrálható, φ pedig kompakt tartójú korlátos függvény. A (9.7) integrálban Ω helyett a $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt halmazt vehetjük. Ha adott $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, akkor

$$|T_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f\varphi\right| = \left|\int_K f\varphi\right| \leq \sup|\varphi| \cdot \int_K |f|,$$

vagyis a $C_K = \int_K |f|$ és $m_K = 0$ választással teljesül a (9.5) feltétel, tehát T_f folytonos. □

Felmerül a kérdés, előfordulhat-e, hogy különböző függvényekhez ugyanaz a reguláris disztribúció tartozik? Ezt válaszolja meg az alábbi állítás.

9.11. Állítás. *Tegyük fel, hogy az $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvényekre $T_f = T_g$, azaz $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Ekkor $f = g$ m.m. Ω-n.*

Bizonyítás. Legyen $h = f - g$, ekkor $T_h = T_f - T_g = 0$, és azt kell belátni, hogy $h = 0$ m.m. Ω-n. Vegyük észre, hogy utóbbi helyett elegendő igazolni, hogy tetszőleges $K \subset \Omega$ halmazt véve $h = 0$ m.m. K-n. Valóban, hiszen Ω előáll megszámlálható sok kompakt halmaz (speciálisan zárt gömb) uniójaként, és megszámlálható sok nullmértékű halmaz (tudniillik, ahol h nem nulla az adott gömbön) uniója is nullmértékű. Legyen $d := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Ekkor az 1.16. Állítás szerint $d > 0$. Tekintsük most azt a $\tilde{h}$ függvényt, amely a K halmaz $d/2$ sugarú környezetében megegyezik h-val, egyébként pedig nullával egyenlő:

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x), & \text{ha } x \in K_{\frac{d}{2}}, \\ 0, & \text{ha } x \in \Omega \setminus K_{\frac{d}{2}}. \end{cases}$$

Nyilvánvalóan $\tilde{h} \in L^1(\Omega)$, amely nullával egyenlő Ω egy kompakt részhalmazán (nevezetesen $K_{\frac{d}{2}}$-n) kívül. A 3. fejezet alapján elkészíthetjük a $(\tilde{h}_\varepsilon) \subset \subset L^1(\Omega)$ függvényeket, amelyekre $\varepsilon \to 0+$ esetén $\tilde{h}_\varepsilon \to \tilde{h}$ az $L^1(\Omega)$ normája szerint. Megmutatjuk, hogy $\tilde{h}_\varepsilon(x) = 0$, ha $x \in K$ és $\varepsilon < d/2$. Ekkor készen leszünk, hiszen határátmenettel $h(x) = 0$ adódik minden $x \in K$-ra. Legyen tehát $x \in K$, ekkor $\varepsilon < d/2$ esetén $B_\varepsilon(x) \subset K_{\frac{d}{2}}$, így a $\tilde{h}_\varepsilon$ függvények definíciója (lásd a 3. fejezetet) és a $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ tartalmazás alapján:

$$\tilde{h}_\varepsilon(x) = \int_\Omega \tilde{h}(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{K_{\frac{d}{2}}} h(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy =$$
$$= \int_\Omega h(y)\eta_\varepsilon(x-y)\,dy = T_h(y \mapsto \eta_\varepsilon(x-y)) = 0,$$

hiszen a feltevés miatt $T_h(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. □

9.12. Következmény. *A (9.7) összefüggés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvények és a T_f reguláris disztribúciók között.*

9.13. Példa. A következő példánk a bevezetőben szereplő (9.1) Dirac-delta „függvény”, amelyet most már disztribúcióként definiálunk.

9.14. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ rögzített, ekkor a $\delta_a \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$ összefüggéssel értelmezett funkcionált az a pontra koncentrált (vagy az a ponthoz tartozó) *Dirac-delta disztribúciónak* nevezzük.

9.15. Állítás. *A 9.14. Definícióval értelmezett δ_a funkcionál disztribúció.*

Bizonyítás. Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, olyan, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K \subset \mathbb{R}^n$, ahol K kompakt, akkor
$$|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \le \sup_K |\varphi|,$$
tehát $C_K = 1$, $m_K = 0$ választással teljesül a folytonosság ekvivalens feltétele. □

Vegyük észre, hogy a 9.14. Definíció egybevág a Dirac-delta „függvény” (9.2) tulajdonságával. Végül megjegyezzük (lásd a 9.7. Feladatot), hogy δ_a nem reguláris disztribúció, azaz nem létezik olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\delta_a(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$.

9.16. Példa. A reguláris disztribúciók mintájára értelmezhetjük a következő típusú disztribúciót. Rögzítsünk egy α multiindexet, amelyre $|\alpha| \ge 1$, továbbá legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Értelmezzük ekkor az $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) = \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)).$$

Egyszerűen igazolható, hogy u disztribúció, azonban a reguláris disztribúciókkal ellentétben az u disztribúció nem határozza meg m. m. egyértelműen az f függvényt, lásd a 9.6. Feladatot.

9.17. Példa. Legyen $\Omega = (0,2) \subset \mathbb{R}$, és definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(-1,1) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(0,2)). \tag{9.8}$$

Egyszerűen igazolható, hogy u disztribúció, lásd a 9.8. Feladatot.

9.18. *Megjegyzés.* A korábbi példákkal ellentétben a (9.8) úgynevezett *végtelen rendű disztribúciót definiál.* Ez azt jelenti, hogy nem létezik olyan univerzális m egész szám, amelyre a (9.5) feltétel minden K kompakt halmaz esetén $m_k = m$ választással teljesülne. Amennyiben létezik ilyen univerzális egész szám, akkor a legkisebb ilyet a disztribúció *rendjének* nevezzük. A fenti példák közül a Dirac-delta és a reguláris disztribúciók nulladrendűek, mert a 9.15. és 9.10. Állítások bizonyítása alapján az $m_K = 0$ választás minden K kompakt halmazhoz megfelel.

9.3. Algebrai műveletek, disztribúció tartója

9.3.1. Algebrai műveletek

Természetes módon értelmezhetjük a disztribúciókkal kapcsolatos bizonyos algebrai műveleteket.

9.19. Definíció. Legyen u és v disztribúció Ω-n. Ekkor az $u+v$ disztribúciót az $(u+v)(\varphi) = u(\varphi)+v(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük. Ha $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor a λu disztribúciót $(\lambda u)(\varphi) = \lambda \cdot u(\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ módon definiáljuk.

Nyilvánvaló, hogy $u + v$ és λu lineáris és folytonos, tehát valóban disztribúció. Mivel van azonosan 0 disztribúció és minden disztribúciónak van (-1)-szerese, ezért igaz a következő

9.20. Állítás. *A 9.19. Definícióban bevezetett műveletekkel a $\mathscr{D}(\Omega)$-n értelmezett disztribúciók vektorteret alkotnak. Ezt a vektorteret a továbbiakban $\mathscr{D}'(\Omega)$-val jelöljük.*

9.21. *Megjegyzés.* A $\mathscr{D}'(\Omega)$ térben szokás bevezetni a *gyenge konvergencia* alábbi fogalmát. Az $(u_j) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciósorozat gyengén konvergál az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúcióhoz, ha minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényre $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ (mint valós számsorozat). A továbbiakban a $\mathscr{D}'(\Omega)$-beli gyenge konvergenciára a tömörebb $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\Omega)} u$ jelölést használjuk.

A 9.19. Definícióban megfogalmazott algebrai műveletek mellett disztribúció sima függvénnyel való szorzása is természetes módon értelmezhető.

9.22. Definíció. Legyen $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Ekkor a ψu disztribúciót a $(\psi u)(\varphi) = u(\psi\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük.

Vegyük észre, hogy ha $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, akkor $\psi\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, így a fenti definíció korrekt. Másrészt pedig egyszerűen igazolható (lásd a 9.11. Feladatot), hogy ψu valóban disztribúció. Érdemes megvizsgálni, hogy speciális esetben, nevezetesen reguláris u esetén a ψu disztribúció milyen alakot ölt.

9.23. Példa. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. A 9.22. Definíció alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén

$$(\psi T_f)(\varphi) = T_f(\psi\varphi) = \int_\Omega f(\psi\varphi) = \int_\Omega (f\psi)\varphi = T_{f\psi}(\varphi).$$

Ez azt jelenti, hogy ψT_f a ψf függvényhez tartozó reguláris disztribúció, vagyis disztribúciók $C^\infty(\Omega)$-beli függvénnyel való szorzása a függvények körében végzett $C^\infty(\Omega)$-beli függvénnyel való szorzás általánosításának tekinthető.

9.24. *Megjegyzés.* A $\mathscr{D}'(\Omega)$ és a $C^\infty(\Omega)$ terek elemei közötti szorzás nem terjeszthető ki a $\mathscr{D}'(\Omega)$ térre úgy, hogy a szorzás kommutatív és asszociatív maradjon. Egyfelől két lokálisan integrálható függvény szorzata sem feltétlenül lokálisan integrálható, gondoljunk csak $\mathbb{R}$-en az $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ lokálisan integrálható függvény önmagával vett szorzatára, amely az $x \mapsto 1/x$ függvény, és erről tudjuk, hogy a 0 semmilyen környezetében sem integrálható. Másrészt pedig a 9.17. Feladat szerint vannak olyan $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúciók és $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ függvény, amelyekre $(\psi u)v \neq (\psi v)u$.

9.3.2. Disztribúció tartója

Az előzőekben már többször használtuk azt a kézenfekvő gondolatot, hogy két disztribúciót akkor tekintünk egyenlőnek, ha minden alapfüggvényen megegyezik az értékük. Két disztribúció ilyenfajta egyenlőségét nevezhetjük *globális egyenlőségnek*.

9.25. Definíció. Legyen u és v két disztribúció Ω-n, továbbá $G \subset \Omega$ nyílt halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $u = v$ a G halmazon (vagy u és v *globálisan egyenlő* G-n), ha minden $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ alapfüggvényre $u(\varphi) = v(\varphi)$.

A globális egyenlőség mellett értelmezhetjük disztribúciók *lokális egyenlőségét* is az alábbi módon.

9.26. Definíció. Legyen u és v két disztribúció Ω-n, továbbá $G \subset \Omega$ nyílt halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy $u = v$ *lokálisan* a G halmazon, ha minden $x \in G$ pontnak van olyan $U_x \subset G$ nyílt környezete, ahol $u = v$ globálisan.

Világos, hogy két disztribúció globális egyenlőségéből következik a lokális egyenlőségük, azonban a lokális egyenlőség első látásra gyengébb fogalomnak tűnik. Valójában viszont a két definíció ekvivalens egymással.

9.27. Állítás. *Legyen* $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *és* $G \subset \Omega$ *nyílt. Amennyiben* $u = v$ *lokálisan a* G *halmazon, akkor* $u = v$ *globálisan is teljesül* G*-n.*

Bizonyítás. Nyilván feltehető, hogy $G = \Omega$. Meg kell mutatnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényre $u(\varphi) = v(\varphi)$. Rögzítsünk először egy $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ alapfüggvényt, és legyen $K = \operatorname{supp}\varphi$, amely nyilván Ω kompakt részhalmaza. A két disztribúció lokális egyenlőségéből következően minden $x \in \Omega$ pontnak van olyan $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete, amelyen $u = v$ globálisan. Világos, hogy $K \subset \bigcup_{x\in\Omega} U_x$, és így K kompaktsága folytán kiválasztható véges sok x_j, hogy $K \subset \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$. Az előbbi véges nyílt fedésre az egységosztás tételét (lásd a 3.23. Tételt) alkalmazva léteznek $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ $(j = 1, \ldots, m)$ függvények, amelyekre $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_{x_j}$ és $\sum_{j=1}^m \varphi_j(x) = 1$ minden x-re a K halmaz egy nyílt környezetében. Ekkor nyilván $\varphi = \varphi\sum_{j=1}^m \varphi_j = \sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j$, továbbá $\operatorname{supp}\varphi\varphi_j \subset U_{x_j}$, ezért u és v lokális egyenlőségéből következően

$$u(\varphi) = u\left(\sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j\right) = \sum_{j=1}^m u(\varphi\varphi_j) = \sum_{j=1}^m v(\varphi\varphi_j) = v\left(\sum_{j=1}^m \varphi\varphi_j\right) = v(\varphi).$$

□

9.28. Következmény. *Ha* $u = 0$ *lokálisan* Ω*-n, akkor* $u = 0$ *globálisan* Ω*-n.*

A fenti 9.28 Következmény lehetőséget nyújt arra, hogy függvények tartójához hasonlóan értelmezhessük disztribúciók tartóját.

9.29. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}(\Omega)$. Ekkor *u tartója*

$$\operatorname{supp} u := \Omega \setminus \{x \in \Omega : \text{ létezik } U_x \subset \Omega \text{ nyílt, hogy } u = 0 \text{ az } U_x\text{-en}\}.$$

9.30. *Megjegyzés.* A fenti definíció azt jelenti, hogy $u = 0$ lokálisan az $\Omega \setminus \setminus \operatorname{supp} u$ halmazon, de ekkor a 9.28. Következmény alapján $u = 0$ globálisan is az $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ halmazon.
A definícióból következően (ahogy függvények esetében is) $\operatorname{supp} u$ relatív zárt halmaz Ω-ban.

Érdemes megemlíteni disztribúciók tartójával kapcsolatban az alábbi hasznos tulajdonságot, amely számos helyen fel fog bukkanni.

9.31. Állítás. *Legyen* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *disztribúció, továbbá* ψ *tetszőleges függvény, amely* $\operatorname{supp} u$ *egy környezetében* 1*-gyel egyenlő. Ekkor* $\psi u = u$*, azaz minden* $\chi \in \mathscr{D}(\Omega)$ *függvényre* $u(\psi\chi) = u(\chi)$.

Bizonyítás. Az u disztribúció linearitásából következően

$$u(\psi\chi) - u(\chi) = u(\chi(1-\psi)) = 0,$$

mert $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp}(1-\psi) = \emptyset$. □

9.32. *Megjegyzés.* A 9.31. Állításban a $\psi = 1$ egyenlőség $\operatorname{supp} u$ egy környezetében való teljesülésének feltétele nem gyengíthető, lásd a 9.12. Feladatot.

A későbbiekben fontos szerephez jutnak azok disztribúciók, amelyek *kompakt tartójúak.*

9.33. Definíció. Egy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúciót *kompakt tartójú* disztribúciónak nevezünk, ha $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ kompakt halmaz.

Példaképpen meghatározzuk két speciális disztribúció tartóját.

9.34. Példa. Tekintsük a δ_a Dirac-delta disztribúciót tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ esetén. Ekkor $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$, hiszen $x \neq a$ esetén létezik $U_x \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz úgy, hogy $a \notin U_x$, és így $\delta_a(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$. Az is világos, hogy a-nak minden U nyílt környezetéhez létezik olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ és $\varphi(a) \neq 0$. Valóban, elég kis $r > 0$ számra $B(a, r) \subset U$, és ekkor a (9.4) függvény megfelel. Mindezek alapján szükségképpen $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

9.35. Példa. Legyen $f \in C(\Omega)$. Ekkor könnyen igazolható (lásd a 9.13. Feladatot, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

9.36. Következmény. *A Dirac-delta disztribúció, továbbá kompakt tartójú folytonos függvényhez tartozó reguláris disztribúció kompakt tartójú.*

9.4. Disztribúció deriváltja

A disztribúciókkal kapcsolatos alapvető fogalmak és tulajdonságok után rátérhetünk az általánosított függvények körében az egyik legfontosabb művelet, a deriválás bevezetésére. Most is úgy járunk el, ahogy eddig, vagyis a függvények körében végzett deriválás művelet általánosításaként szeretnénk definiálni. A kapcsolatot a disztribúciók és a függvények között természetesen a reguláris disztribúciók jelentik, ezért érdemes megfogalmaznunk a függvények körében végzett deriválás egy fontos tulajdonságát, amelyet mindenképpen szeretnénk a disztribúciókra átörökíteni.

9.37. Állítás. *Legyen $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Ekkor $T_{\partial_j f}(\varphi) = -T_f(\partial_j \varphi)$ minden $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ esetén.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $j = 1$. Írjuk ekkor az $x \in \mathbb{R}^n$ vektorokat $x = (x_1, x')$ alakban, ahol $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Világos, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ esetén $f, \partial_1 f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (sőt folytonosak is), így a hozzájuk tartozó reguláris disztribúció értelmes. A kompakt tartójú lokálisan integrálható $(\partial_1 f)\varphi$ függvényre az x_1 változójában parciális integrálást végrehajtva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T_{\partial_1 f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 f)\varphi = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_1 f(x_1, x')\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x')\partial_1\varphi(x_1, x')\, dx_1\, dx' = -\int_{\mathbb{R}^n} f\partial_1\varphi = -T_f(\partial_1\varphi). \end{aligned}$$

□

9.38. *Megjegyzés.* Egyszerűen belátható, hogy a fenti állítás $\mathbb{R}^n$ helyett tetszőleges Ω tartományra is igaz, ebben az esetben parciális integrálás helyett a Gauss–Osztrogradszkij-tételt használhatjuk.

A 9.37. Állítás egymás utáni alkalmazásával adódik az alábbi

9.39. Következmény. *Legyen $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$ $(m \in \mathbb{N})$ és α tetszőleges multiindex, amelyre $|\alpha| \le m$. Ekkor $T_{\partial^\alpha f}(\varphi) = -T_f(\partial^\alpha\varphi)$ minden $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén.*

A fenti 9.37. Állítás alapján kézenfekvő disztribúció parciális deriváltját a következőképpen értelmezni.

9.40. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Ekkor a $\partial_j u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *parciális deriváltat* a $\partial_j u(\varphi) := -u(\partial_j\varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$ összefüggéssel értelmezzük.

9.41. Állítás. *A 9.40. Definícióban értelmezett $\partial_j u$ funkcionál lineáris és folytonos, tehát disztribúció.*

Bizonyítás. A linearitás nyilvánvaló, egyedül a folytonosságot kell bizonyítani. Vegyük észre, hogy $\partial_j u = u \circ \partial_j$, ahol $u \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ disztribúció, tehát folytonos, továbbá $\partial_j \colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ a kompakt tartójú sima függvények körében végzett parciális deriválás művelete, amely lineáris és nyilván sorozatfolytonos a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergenciára nézve (ez a $\mathscr{D}(\Omega)$-beli konvergencia 9.2. Definíciója alapján nyilvánvaló, valójában ezért vezettük be így a konvergenciát). Az előbbiekből következően a $\partial_j u = u \circ \partial_j$ kompozíció is folytonos. □

9.42. *Megjegyzés.* A 9.37. Állítás alapján $f \in C^1(\Omega)$ esetén $\partial_j T_f = T_{\partial_j f}$.

A parciális deriválás definícióját többször egymás után alkalmazva a 9.39. Következmény mintájára természetes módon értelmezhetjük disztribúciók többszörös parciális deriváltját.

9.43. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és α multiindex. Ekkor a $\partial^\alpha u$ deriváltat a $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ összefüggéssel értelmezzük.

9.44. *Megjegyzés.* A Young-tétel miatt $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\partial^\alpha \varphi$ nem függ a deriválások sorrendjétől, így $\partial^\alpha u$ sem függ a deriválások sorrendjétől, tehát a 9.43. Definíció korrekt. Vegyük észre továbbá, hogy minden a disztribúciók körében a deriválás korlátlanul végezhető művelet, valójában éppen ezért definiáltuk a végtelen sokszor differenciálható függvények terén ezeket a funkcionálokat.

9.45. Állítás. *Legyen $u, v \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ekkor a következők teljesülnek:*

$$\begin{aligned} \partial_j(u+v) &= \partial_j u + \partial_j v, \\ \partial_j(\lambda u) &= \lambda \partial_j u \qquad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ \partial_j(\psi u) &= (\partial_j \psi) u + \psi \partial_j u \qquad (\psi \in C^\infty(\Omega)), \\ \partial^\alpha(uv) &= \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta u)(\partial^{\alpha-\beta} v). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A parciális deriválás 9.40. Definíciója, illetve az általános Leibniz-szabály (3.8. Állítás) alapján az állítás nyilvánvaló. $\square$

A következőkben kiszámoljuk néhány konkrét disztribúció deriváltját, amelyekre később a másodrendű parciális differenciálegyenletek tanulmányozása során visszatérünk.

9.46. Példa. Kezdjük rögtön a fejezet bevezetőjében a (9.3) hozzárendeléssel értelmezett Heaviside-függvénnyel, amelyről azt szeretnénk igazolni, hogy a deriváltja a Dirac-delta. Emlékeztetőül: a Heaviside-függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \ge 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \tag{9.9}$$

A függvény 0-beli értéke valójában nem lényeges számunkra, ugyanis a hozzá tartozó reguláris disztribúciót nem befolyásolja, mert a 9.11. Állításban láttuk, hogy m. m. egyenlő függvényekhez ugyanaz a reguláris disztribúció tartozik. A deriválás definíciója alapján (egy változóban a deriválást az egyszerűség kedvéért ∂ helyett vesszővel jelölve)

$$T_H'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H\varphi' = -\int_0^\infty \varphi' = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Ezért $T_H' = \delta_0$, aminek tehát sikerült matematikailag korrekt és precíz értelmet adnunk.

9.47. *Megjegyzés.* Gyakran a reguláris disztribúciók esetében az egyszerűség kedvéért a disztribúció helyett magukról a lokális integrálható függvényekről és azok általánosított vagy *disztribúció értelemben vett deriváltjáról* beszélünk, például $H' = \delta_0$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges lokálisan integrálható függvény disztribúció értelemben korlátlanul differenciálható. Természetesen a derivált nem feltétlenül lesz reguláris disztribúció, mint azt a 9.46. Példa is mutatja.
Megmutatható, hogy általában minden disztribúció lokálisan előáll, mint egy integrálható függvény valamilyen deriváltja, ha pedig a disztribúció kompakt tartójú, akkor az előállítás globális, lásd a [80] könyvet.
Azoknak a lokálisan integrálható, vagy valamilyen L^p térbeli függvényeknek, amelyeknek disztribúció értelemben vett deriváltjai egy megfelelő L^p térbeli függvényhez tartozó reguláris disztribúcióként írhatók fel, kitüntetett szerepük lesz később a 12. fejezetben, ahol az ilyen típusú függvények segítségével definiáljuk az úgynevezett *Szoboljev-féle függvénytereket*.

9.48. Példa. A Heaviside-függvény mintájára tetszőleges szakaszonként folytonosan differenciálható függvény általánosított deriváltját is ki tudjuk számolni.

9.49. Állítás. *Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ (véges vagy végtelen) intervallum, továbbá $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$, és tegyük fel, hogy $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, amelyre $f \in C^1(a_k, a_{k+1})$ $(k = 0, \ldots, m)$, valamint f-nek létezik jobb és bal oldali határértéke az $a_1, \ldots, a_m$ pontokban, továbbá $f' \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Ekkor*

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{m} (f(a_k+0) - f(a_k-0))\delta_{a_k},$$

ahol f' az f függvény szakaszonkénti (klasszikus) deriváltja, amely az $a_1, \ldots, a_m$ pontokban nincs értelmezve.

Bizonyítás. A feltételekből következően $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$, így T_f értelmes. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciójából kiindulva a parciális integrálás tételének alkalmazásával kapjuk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(a,b)$ esetén

$$\begin{aligned} &T'_f(\varphi) = \\ &= -T_f(\varphi') = -\int_a^b f\varphi' = -\sum_{k=0}^{m} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f\varphi' = -\sum_{k=0}^{m} \left([f\varphi]_{a_k}^{a_{k+1}} - \int_{a_k}^{a_{k+1}} f'\varphi \right) = \\ &= \int_a^b f'\varphi + (f\varphi)|_{a+0} - (f\varphi)|_{b-0} + \sum_{k=0}^{m} \big(f(a_k+0)\varphi(a_k) - f(a_k-0)\varphi(a_k) \big) = \\ &= T_{f'}(\varphi) + \sum_{k=1}^{m} (f(a_k+0) - f(a_k-0))\delta_{a_k}, \end{aligned}$$

felhasználva, hogy φ kompakt tartójú, ezért $(f\varphi)|_{a+0} = (f\varphi)|_{b-0} = 0$. $\square$

9.50. *Megjegyzés.* A fenti állítás általánosítható magasabb dimenzióra is „darabonként" sima függvényekre, lásd a 9.10. Feladatot.

9.51. Példa (Közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása)**.** Tegyük fel, hogy az $y \in C^m(0,\infty)$ függvény első $(m-1)$ deriváltja folytonos a $[0,\infty)$ intervallumon, továbbá y klasszikus értelemben kielégíti az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$y^{(m)} + c_{m-1}y^{(m-1)} + \dots + c_1 y' + c_0 y = 0 \quad \text{a } (0,\infty)\text{-en}, \tag{9.10}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \dots,\ y^{(m-1)}(0) = 1. \tag{9.11}$$

Definiáljuk az $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt az alábbi hozzárendeléssel:

$$E(x) := \begin{cases} y(x), & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

Hasonlóan a Heaviside-függvény esetéhez, a fenti függvény 0-beli értéke sem lényeges számunkra, mert E mindig ugyanazt a reguláris disztribúciót fogja meghatározni.

9.52. Állítás. *Az E-hez tartozó T_E reguláris disztribúció disztribúció értelemben kielégíti a következő differenciálegyenletet:*

$$T_E^{(m)} + c_{m-1}T_E^{(m-1)} + \dots + c_1 T_E' + c_0 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}\text{-}en.$$

Bizonyítás. Mivel az y függvény $(m-1)$-szer folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon, ezért a (9.11) kezdeti feltételek miatt E is ugyanilyen tulajdonságú $\mathbb{R}$-en, tehát az egész $\mathbb{R}$-en klasszikus értelemben létezik $E^{(j)}$ $(j = 0,\dots,m-1)$. Ez viszont azt jelenti, hogy $T_E^{(j)} = T_{E^{(j)}}$ minden $j = 0,\dots,m-1$ esetén. Vegyük észre, hogy $E^{(m-1)}$ folytonosan differenciálható a $(-\infty,0)$ intervallumon, hiszen ott azonosan 0, továbbá ugyancsak folytonosan differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon, mert ott megegyezik $y^{(m-1)}$-gyel, amely folytonos. Ezenkívül $y^{(m-1)}$-nek a 0-ban a jobb oldali határértéke 0, a bal oldali határértéke pedig a (9.11) kezdeti feltételből adódóan 1. Alkalmazhatjuk tehát a 9.49. Állítást az $(a,b) = (-\infty,\infty)$ intervallummal és az $a_1 = 0$ szereposztással, így

$$T_E^{(m)} = ((T_E)^{(m-1)})' = (T_{E^{(m-1)}})' = T_{E^{(m)}} + \delta_0.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} &T_E^{(m)} + c_{m-1}T_E^{(m-1)} + \dots + c_1 T_E' + c_0 T_E = \\ &= \delta_0 + T_{E^{(m)}} + c_{m-1}T_{E^{(m-1)}} + \dots + c_1 T_E' + c_0 T_E = \\ &= \delta_0 + T_{E^{(m)} + c_{m-1}E^{(m-1)} + \dots + c_1 E' + c_0 E} = \delta_0, \end{aligned}$$

hiszen a $(0,\infty)$ intervallumon

$$\begin{aligned}&E^{(m)} + c_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + c_1E' + c_0E\\&= y^{(m)} + c_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + c_1y' + c_0y,\end{aligned}$$

a $(-\infty,0)$ intervallumon pedig definíció szerint

$$E^{(m)} + c_{m-1}E^{(m-1)} + \cdots + c_1E' + c_0E = 0.$$

□

9.53. *Megjegyzés.* Általában az olyan disztribúciót, amely egy, a (0-hoz tartozó) Dirac-delta jobb oldallal adott differenciálegyenletnek disztribúció értelemben vett megoldása, az adott egyenlet *alapmegoldásának* nevezzük.

9.54. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása egy dimenzióban)**.** A most következő példával a 10. fejezetben a hullámegyenlet általánosított megoldásával kapcsolatban részletesebben fogunk foglalkozni. Tekintsük az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvényt:

$$E(x_0, x_1) := \frac{1}{2}H(x_0 - |x_1|), \tag{9.12}$$

ahol H a Heaviside-függvény.

9.55. Állítás. *A* (9.12) *formulával értelmezett függvény alapmegoldása az egydimenziós hullámegyenletnek, azaz disztribúció értelemben kielégíti a Dirac-delta jobb oldallal adott egydimenziós hullámegyenletet:*

$$\partial_0^2 T_E - \partial_1^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^2\text{-ben.}$$

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\partial_0^2 T_E(\varphi) - \partial_1^2 T_E(\varphi) = \delta_0(\varphi).$$

A fenti egyenlet bal oldala a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján a következő alakot ölti:

$$\partial_0^2 T_E(\varphi) - \partial_1^2 T_E(\varphi) = T_E(\partial_0^2\varphi) - T_E(\partial_1^2\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} E\partial_0^2\varphi - \int_{\mathbb{R}^2} E\partial_1^2\varphi. \tag{9.13}$$

A (9.13) egyenlet jobb oldalán álló integrálokat a Newton–Leibniz-tétel alkalmazásával, és φ kompakt tartójú voltának felhasználásával alakíthatjuk.

Ekkor egyfelől

$$\int_{\mathbb{R}^2} E\partial_0^2\varphi = \int_{\mathbb{R}}\int_{|x_1|}^{\infty} \frac{1}{2}\partial_0^2\varphi(x_0,x_1)\,dx_0\,dx_0 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\partial_0\varphi(|x_1|,x_1)\,dx_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \partial_0\varphi(-x_1,x_1)\,dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \partial_0\varphi(x_1,x_1)\,dx_1 =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \partial_0\varphi(x_1,-x_1)\,dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \partial\varphi(x_1,x_1)\,dx_1, \tag{9.14}$$

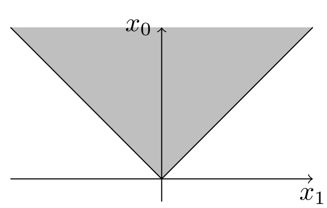
másrészt pedig

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} E\partial_1^2\varphi &= \int_0^{\infty}\int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{2}\partial_0^2\varphi(x_0,x_1)\,dx_1\,dx_0 = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_1\varphi(x_0,x_1) - \partial_1(x_0,-x_0))\,dx_0.\end{aligned} \tag{9.15}$$

Most a (9.14) és a (9.15) összefüggéseket egybevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(\partial_0^2 T_E - \partial_1^2 T_E)(\varphi) &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_0\varphi(x_0,-x_0) - \partial_1(x_0,-x_0))\,dx_0 - \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(\partial_0\varphi(x_0,x_0) + \partial_1\varphi(x_0,x_0))\,dx_0 = \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx_0}\varphi(x_0,-x_0)\,dx_0 - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d}{dx_0}\varphi(x_0,x_0)\,dx_0 = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0{,}0) + \frac{1}{2}\varphi(0{,}0) = \varphi(0{,}0) = \delta_0(\varphi),\end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani. □



9.1. ábra. Az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ konvex körkúp

9.56. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a (9.12) függvényhez tartozó reguláris disztribúció tartója része az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ konvex körkúpnak. A 9.1. ábrán az x_0 és x_1 tengelyek azért vannak felcserélve, mert az x_0 változót gyakran az

időnek tekintjük (és t-vel jelöljük), és hagyományosan az időtengely mutat mindig „felfelé”.
A fentiekben említett állítás magasabb dimenzióban is igaz: a hullámegyenlet alapmegoldásának tartója része egy konvex körkúpnak. Ennek következménye, hogy a hullámegyenlet véges sebességű hullámterjedést ír le, lásd a 10.7. Következményt.

9.57. Példa (A hővezetési egyenlet alapmegoldása)**.** A következőkben bemutatásra kerülő disztribúciót a 11. fejezetben a parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok tanulmányozása során részletesebben fogjuk tárgyalni. Az E függvényt definiáljuk a következő hozzárendeléssel:

$$E(x_0, x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi x_0})^n} \cdot \exp(-|x|^2/4x_0), & \text{ha } x_0 > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } x_0 \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{9.16}$$

9.58. Állítás. *A* (9.16) *formulával értelmezett függvényre* $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, *továbbá az* E*-hez tartozó reguláris disztribúció alapmegoldása az* n*-dimenziós hővezetési egyenletnek, azaz*

$$\partial_0 T_E - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben.}$$

Bizonyítás. Lásd a 9.113. Állítást. □

9.59. *Megjegyzés.* A fentiek alapján a hővezetési egyenlet alapmegoldásának tartója egy féltér része. Ennek eredményeképpen a hővezetési egyenlet végtelen sebességgel történő hőterjedést modellez, lásd a 11.13. Megjegyzést.

9.5. Disztribúciók direkt szorzata

A most következő szakaszban disztribúciók direkt szorzatával foglalkozunk. E fogalom tárgyalására azért is van szükség, hogy később ennek segítségével tudjuk értelmezni disztribúciók konvolúcióját, amely az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek megoldása kapcsán rendkívül fontos szerepet fog játszani (ezzel a 9.7. szakaszban foglalkozunk).

9.5.1. A direkt szorzat definíciója

Először, ahogy ezt a deriválásnál is tettük, nézzük meg, hogy függvények esetén mit is értünk direkt szorzaton.

9.60. Definíció. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Ekkor f és g *direkt szorzatát* az $(f \times g)(x, y) = f(x)g(y)$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m)$ összefüggéssel értelmezzük.

9.61. *Megjegyzés.* A Fubini-tétel alapján világos, hogy $f \times g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Korábban láttuk, hogy a disztribúciók és a klasszikus függvények közötti kapcsolat a reguláris disztribúciókon keresztül valósul meg. Érdemes tehát a függvények körében értelmezett direkt szorzat disztribúciókra való általánosítása előtt megvizsgálni, hogy az $f \times g$ függvényhez tartozó reguláris disztribúció milyen kapcsolatban áll az f-hez, illetve g-hez tartozó reguláris disztribúciókkal. Az így kapott összefüggés alapján a direkt szorzat definíciója kézenfekvő módon fog adódni.

9.62. Állítás. *Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Ekkor*

$$T_{f\times g}(\varphi) = T_f\{x \mapsto T_g[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})).$$

Bizonyítás. Definíció alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén

$$\begin{aligned} T_{f\times g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} (f \times g)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\varphi(x,y)\,dy\,dx = \\ &= T_f\{x \mapsto T_g[y \mapsto \varphi(x,y)]\}. \end{aligned}$$

□

A 9.62. Állítás alapján kézenfekvő lenne az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ disztribúciók direkt szorzatát az

$$(u \times v)(\varphi) = u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})) \tag{9.17}$$

összefüggéssel definiálni. Világos, hogy rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén az $y \mapsto \varphi(x,y)$ függvény $\mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$-beli, így $v[y \mapsto \varphi(x,y)]$ értelmes, ám az $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]$ függvényről nem látszik azonnal, hogy $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli lenne, ami viszont mindenképpen szükséges ahhoz, hogy a fenti (9.17) formula értelmes legyen. A következő állítás garantálja, hogy a (9.17) definíció valóban korrekt.

9.63. Tétel. *Legyen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, és definiáljuk a $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt a $\psi(x) = v[y \to \varphi(x,y)]$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ hozzárendeléssel. Ekkor $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, továbbá az $A\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $A(\varphi) = \psi = v[y \to \varphi(x,y)]$ formulával értelmezett operátor lineáris és folytonos (a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ terekbeli konvergenciára nézve).*

Bizonyítás. A $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ állítás igazolását több lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy ψ kompakt tartójú, folytonos, ezt követően ψ folytonos differenciálhatóságát látjuk be, végül mindezekből következni fog a végtelen sokszor differenciálhatóság.

1. lépés. A ψ függvény definíciója alapján világos, hogy $\operatorname{supp}\psi$ a $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt halmaz vetülete $\mathbb{R}^n$-re, tehát kompakt.

Tegyük fel most, hogy az $(x^{(k)}) \subset \mathbb{R}^n$ sorozatra $x^{(k)} \to x$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\psi(x^{(k)}) \to \psi(x)$. Az egyszerűség kedvéért legyen $\chi_k(y) = \varphi(x^{(k)}, y)$ és $\chi(y) = \varphi(x, y)$ (x rögzített). Elég belátnunk, hogy $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \chi$, hiszen ψ definíciója és v folytonossága alapján $\psi(x^{(k)}) = v[y \to \chi_k] \to v[y \to \chi(y)] = \psi(x)$. Nyilvánvaló, hogy a χ_k függvények tartója részhalmaza a $\operatorname{supp}\varphi$ halmaz $\mathbb{R}^n$-re vett vetületének, ezenkívül tetszőleges α multiindexet véve $\partial_y^\alpha \chi_k(y) \to \partial_y^\alpha \chi(y)$ egyenletesen $\mathbb{R}^n$-ben. Valóban, a kompakt tartójú φ függvény Heine tétele miatt egyenletesen folytonos, ezért

$$|\partial_y^\alpha \chi_k(y) \to \partial_y^\alpha \chi(y)| = |\partial_y^\alpha \varphi(x^{(k)}, y) - \partial_y^\alpha \varphi(x^{(k)}, y)| < \varepsilon,$$

amennyiben $|x^{(k)} - x|$ elég kicsi. Ezzel beláttuk, hogy $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$.
2. lépés. Most megmutatjuk, hogy $j = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_j \psi(x) = v[y \mapsto \partial_{x_j}^\alpha \varphi(x, y)],$$

amiből következik $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Legyen $x \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és válasszunk egy tetszőleges (h_k) valós sorozatot úgy, hogy $h_k \to 0$ és $h_k \neq 0$. Jelölje $h_k^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ azt a vektort, amelynek minden koordinátája 0, kivéve a j-ediket, amely h_k-val egyenlő. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{\psi(x + h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} &= \frac{1}{h_k}\big(v[y \mapsto \varphi(x + h_k^{(j)}, y)] - v[y \mapsto \varphi(x, y)]\big) = \\ &= v\left[y \mapsto \frac{\varphi(x + h_k^{(j)}, y) - \varphi(x, y)}{h_k}\right]. \end{aligned} \tag{9.18}$$

A Lagrange-középértéktételből következően létezik (x-től és y-tól függő) $0 < \theta_k < 1$ valós szám úgy, hogy $\varphi(x + h_k^{(j)}, y) - \varphi(x, y) = h_k \partial_{x_j} \varphi(x + \theta_k h_k^{(j)}, y)$, ezért (9.18) alapján

$$\frac{\psi(x + h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} = v[y \mapsto \partial_{x_j} \varphi(x + \theta_k h_k^{(j)}, y)] = v[y \mapsto \kappa_k(y)], \tag{9.19}$$

ahol $\kappa_k(y) = \partial_{x_j} \varphi(x + \theta_k h_k^{(j)}, y)$. A bizonyítás 1. lépéséhez hasonló módon igazolhatjuk, hogy $\kappa_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \kappa$, ahol $\kappa = \partial_j \varphi(x, y)$. Ekkor v folytonossága miatt a (9.19) egyenletből kapjuk, hogy

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi(x + h_k^{(j)}) - \psi(x)}{h_k} = v[y \mapsto \partial_{x_j} \varphi(x, y)],$$

amit igazolni akartunk.

3. lépés. A 2. lépés eredményét egymás után alkalmazva

$$\partial^\alpha \psi(x) = v[y \mapsto \partial_x^\alpha \varphi(x, y)]$$

adódik, ahol α tetszőleges multiindex. Ebből következően $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
4. lépés. Most megmutatjuk, hogy a tétel feltételei mellett az A operátor folytonos. Ehhez igazolnunk kell, hogy ha $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})} \varphi$, akkor $A\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} A\varphi$. A φ_k függvények $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-beli konvergenciájából következően létezik $K_0 \subset \subset \mathbb{R}^{n+m}$ kompakt halmaz úgy, hogy $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K_0$. Legyen K a K_0 halmaz vetülete $\mathbb{R}^n$-re, ekkor K kompakt és $\operatorname{supp} \chi_k \subset K_0$, ahol $\chi_k(y) = \varphi_k(x, y)$ (x rögzített). Mivel $A\varphi_k = v(\chi_k) = v[y \mapsto \varphi(x, y)]$, ezért $\operatorname{supp} A\varphi_k \subset K_0$. Be kell még látnunk, hogy minden α multiindex esetén $\partial^\alpha(A\varphi_k) \to \partial^\alpha(A\varphi)$ egyenletesen. A 3. lépésben bizonyítottuk alapján

$$\partial^\alpha(A\varphi_k)(x) = v[y \mapsto \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y)],$$

így v folytonosságának a 9.6. Tételben megfogalmazott tulajdonságát, valamint a φ_k függvények $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciáját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\left|\partial^\alpha(A\varphi_k)(x) - \partial^\alpha(A\varphi)(x)\right| = \\
&= \left|v[y \mapsto \partial_x^\alpha \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \varphi(x, y)]\right| \le \\
&\le C_{K_0} \sum_{|\beta| \le m_{K_0}} \sup_{y \in K_0} \left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)\right| \le \\
&\le C_{K_0} \sum_{|\beta| \le m_{K_0}} \sup_{(x,y) \in K} \left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi_k(x, y) - \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \varphi(x, y)\right| \to 0.
\end{aligned}$$

Ebből következően $(\partial^\alpha(A\varphi_k) - \partial^\alpha(A\varphi)) \to 0$ egyenletesen. Ezzel az állítás bizonyítása teljes. □

A fenti tétel alapján tehát korrekt a következő definíció.

9.64. Definíció. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Ekkor u és v *direkt szorzatát* az

$$(u \times v)(\varphi) := u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})\big)$$

összefüggéssel értelmezzük.

9.65. Következmény. *A 9.63. Tétel alapján $u \times v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ jól definiált disztribúció.*

9.66. Következmény. *A 9.62. Állítás alapján $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ esetén $T_{f\times g} = T_f \times T_g$.*

9.5.2. Műveleti tulajdonságok

9.67. Állítás. *Legyen* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *és* $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. *Ekkor*

$$\begin{aligned}(u \times v)(\varphi) &= u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\big\} = \\ &= v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi(x,y)]\big\} \qquad \big(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})\big).\end{aligned}$$

A bizonyítás előtt szükségünk van egy lemmára, amelynek bizonyítás megtalálható a [80] könyvben.

9.68. Lemma. *Tekintsük a következő alakú függvényeket:*

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y), \tag{9.20}$$

ahol $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ $(j = 1, \ldots, N)$ *és* $N \in \mathbb{N}$ *tetszőlegesek. Ekkor a fenti alakban felírható függvények sűrűn vannak a* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ *térben (a* $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$*-beli konvergenciára nézve).*

A 9.67. Állítás bizonyítása. A bizonyítást két lépésben végezzük el, első lépésként a (9.20) speciális alakú φ függvényekre látjuk be. Mivel az ilyen típusú függvények sűrűn vannak $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-ben, így határátmenettel tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-re nyerjük az állítást.
1. lépés. Tekintsük a

$$\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y) \tag{9.21}$$

alakú függvényeket, ahol $\psi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\chi_j \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ $(j = 1, \ldots, N)$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Megmutatjuk, hogy az ilyen speciális alakú φ függvényekre igaz az állítás. Valóban, a disztribúciók linearitását felhasználva

$$u\left\{x \mapsto v\left[y \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y)\right]\right\} = u\left\{x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)v(\chi_j)\right\} = \sum_{j=1}^{N} v(\chi_j)u(\psi_j),$$

valamint

$$v\left\{y \mapsto u\left[x \mapsto \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x)\chi_j(y)\right]\right\} = v\left\{y \mapsto \sum_{j=1}^{N} \chi_j(x)u(\psi_j)\right\} = \sum_{j=1}^{N} u(\psi_j)v(\chi_j),$$

amiből az állítás a (9.21) alakban felírható függvényekre következik.
2. lépés. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ tetszőleges. A 9.68. Lemma alapján létezik (9.21) alakú függvényekből álló $(\varphi_k) \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ sorozat úgy, hogy $\varphi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})} \varphi$. Ekkor az 1. lépés alapján

$$u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi_k(x,y)]\big\} = v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi_k(x,y)]\big\}.$$

A 9.65. Következmény szerint a fenti egyenlet jobb oldala disztribúció $\mathbb{R}^{n+m}$-en, ekkor nyilván a bal oldal is disztribúció ugyanezen a téren (hiszen u és v, valamint x és y szerepcseréjével kapjuk), így a (φ_k) sorozat $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$-beli konvergenciájának felhasználásával $k \to \infty$ határátmenet esetén

$$u\big\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\big\} = v\big\{y \mapsto u[x \mapsto \varphi(x,y)]\big\}$$

adódik. □

9.69. Állítás (linearitás)**.** *Legyen* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $v_1, v_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ *és* $\lambda_1, \lambda_2 \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. *Ekkor*

$$u \times (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 (u \times v_1) + \lambda_2 (u \times v_2).$$

Bizonyítás. A disztribúciókra vonatkozó direkt szorzat definíciója alapján nyilvánvaló. □

9.70. Állítás. *Legyen* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *és* $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. *Ekkor tetszőleges* α *multiindexre*

$$\partial_y^\alpha (u \times v) = u \times \partial^\alpha v \quad \textit{és} \quad \partial_x^\alpha (u \times v) = \partial^\alpha u \times v.$$

Bizonyítás. Lásd a 9.37. Feladatot. □

9.71. Állítás. *Legyen* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *és* $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. *Ekkor*

$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

Bizonyítás. Lásd a 9.34. Feladatot. □

9.6. Disztribúciók konvolúciója

Az előző szakaszban bevezettet direkt szorzat fogalom segítségével az alábbiakban értelmezni fogjuk disztribúciók konvolúcióját. A konvolúciónak az általánosított Cauchy-feladatokkal kapcsolatban (lásd a 10. és a 11. fejezeteket) igen fontos alkalmazása, ha ismerjük egy disztribúció értelemben vett Cauchy-feladatnak a Dirac-delta jobb oldalhoz tartozó megoldását, vagyis a differenciálegyenlet alapmegoldását (ilyeneket már láttunk a 9.51., 9.54. és 9.57. Példákban), akkor a konvolúció segítségével a Cauchy-feladat bármilyen jobb oldalhoz tartozó disztribúció értelemben vett megoldását meg tudjuk adni.

9.6.1. Függvények konvolúciója

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, hogy mit is értünk $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ térbeli függvények konvolúcióján.

9.72. Definíció. Legyenek $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvények, és tegyük fel, hogy

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{9.22}$$

Ekkor azt mondjuk, hogy f és g *konvolúciója* létezik, mégpedig

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{9.23}$$

9.73. *Megjegyzés.* Gondoljuk meg, hogy a (9.23) definíció korrekt, hiszen a jobb oldalon szereplő integrál a (9.22) feltétel miatt m.m. $x \in \mathbb{R}^n$ esetén véges. Jegyezzük meg, hogy csak $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$-beli függvények konvolúcióját értelmeztük, az $\mathbb{R}^n$ tér szerepe lényeges. A (9.22) feltétel alapján $f * g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Végül a Fubini-tétel alapján világos, hogy ha $f * g$ létezik, akkor $g * f$ is létezik, továbbá $g * f = f * g$.

Világosan érzékelhető, hogy a 9.72. Definíció feltételei nehézkesen ellenőrizhetők, ezért érdemes néhány elégséges (és könnyebben kezelhető) feltételt megfogalmazni két függvény konvolúciójának létezésére.

9.74. Állítás. *Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, akkor $f * g$ létezik és $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben van.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Fubini-tételt az $(x, y) \mapsto |f(y)g(x-y)|$ nemnegatív függvényre, és használjuk fel, hogy az f, g függvények $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben vannak. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)\,dy \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,dy \le \\ &\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.\end{aligned}$$

Ebből következően

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

és így $f * g$ létezik és $L^1(\mathbb{R}^n)$-ben van. $\square$

9.75. Állítás. *Ha $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, és valamelyikük egy kompakt halmazon kívül 0-val egyenlő, akkor $f * g$ értelmes.*

Bizonyítás. Ha például az f függvény a P kompakt halmazon kívül nulla, akkor az $y \mapsto f(y)g(x-y)$ függvény is nulla K-n kívül (minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén). Ekkor tetszőleges K kompakt halmazt véve f és g lokális integrálhatósága, valamint a Fubini-tétel alapján

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx \leq \int_P |f(y)| \int_K |g(x-y)|\,dy\,dx \leq$$
$$\leq \|f\|_{L^1(P)} \cdot \|g\|_{L^1(K-P)},$$

ahol $K-P = \{x-y : x \in K, y \in P\}$, amely korlátos, hiszen K és P is azok. □

9.76. Állítás. *Ha $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, és létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = g(x) = 0$ minden $x < a$ esetén, akkor $f * g$ értelmes.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a feltételekből adódóan az $y \mapsto f(y)g(x-y)$ függvény minden rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén csak $a \leq y \leq x-a$ esetén lehet nem nulla (hiszen különben $f(y) = 0$ vagy pedig $g(x-y) = 0$). Emiatt, ha x eleme a $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaznak, akkor a Fubini-tétel felhasználásával

$$\int_K \int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)\,dy\,dx = \int_a^{\max K - a} |f(y)| \int_K |g(x-y)|\,dy\,dx \leq$$
$$\leq \|f\|_{L^1([a,\max K-a])} \cdot \|g\|_{L^1(K-[a,\max K-a])},$$

ahol $K-[a,\max K-a] = \{x-y : x \in K,\ y \in [a,\max K-a]\}$, amely kompakt halmaz, mert K is az. □

A konvolúció egy fontos műveleti tulajdonsága a linearitás.

9.77. Állítás (linearitás)**.** *Legyenek $f_1, f_2, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvények, amelyekre $f_1 * v$ és $f_2 * v$ létezik. Ekkor minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) * v = \lambda_1 f_1 * v + \lambda_2 f_2 * v.$$

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség alapján nyilvánvaló, hogy ha

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(y)g(x-y)\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ és } x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)g(x-y)\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

akkor

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} |(\lambda_1 f_1(y) + \lambda_2 f_2(y))g(x-y)|\,dy \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

□

9.6.2. Disztribúciók konvolúciója: definíció, példák

A függvények körében értelmezett konvolúció műveletének disztribúciókra való általánosításának céljából vizsgáljuk meg, hogy két függvény konvolúciójához tartozó reguláris disztribúció milyen kapcsolatban áll a függvényekhez tartozó reguláris disztribúciókkal.

9.78. Állítás. *Legyenek $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és tegyük fel, hogy $f * g$ értelmes. Ekkor*

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)). \tag{9.24}$$

Bizonyítás. A Fubini-tétel alapján (itt használjuk egyedül a (9.22) feltételt)

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f*g)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy\varphi(x)\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\varphi(x)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\varphi(y+z)\,dz\,dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz. \end{aligned}$$

□

A (9.24) egyenlet jobb oldalán látszólag $(T_f \times T_g)[(y,z) \mapsto \varphi(y+z)]$ áll, ám vegyük észre, hogy az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvény nem feltétlenül kompakt tartójú, így nem feltétlenül van $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$-ben. Valóban, például vegyünk egy olyan sima függvényt, amelynek tartója a $B(0,1)$ gömb (ilyen van, lásd például a (9.4) alakú függvényeket). Ekkor az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvény tartója az $\{(y,z) \in \mathbb{R}^{2n} : |y+z| \le 1\}$ végtelen sáv, tehát nem korlátos.
Az előbb említett problémát a következőképpen oldhatjuk fel: az $(y,z) \mapsto \varphi(y+z)$ függvényt kompakt tartójú sima függvényekkel közelítjük, ezekre alkalmazható $T_f \times T_g$, és ebből határátmenettel nyerjük disztribúciók konvolúciójának definícióját.

9.79. Definíció. Legyen $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ függvénysorozat. Azt írjuk, hogy $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, ha az alábbi két feltétel teljesül:

(i) minden α multiindexre $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán;

(ii) minden α multiindex esetén létezik C_α konstans úgy, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\mathbb{R}^{2n}} |\partial^\alpha \zeta_k| \le C_\alpha.$$

Első látásra nem teljesen világos, hogy egyáltalán léteznek-e a 9.79. Definícióban megfogalmazott feltételeknek eleget tevő ζ_k függvények.

9.80. Állítás. *Léteznek a 9.79. Definícióban szereplő* (i)–(ii) *feltételeket kielégítő függvények.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ függvényt, amelyre $\zeta(y,z) = 1$, ha $|(y,z)| \le 1$, egyébként pedig $|\zeta(y,z)| \le 1$ (ilyen létezik, lásd például a (9.4) alakú függvényeket). Legyen ekkor $\zeta_k(y,z) = \zeta(\frac{y}{k}, \frac{z}{k})$ $(k \in \mathbb{N})$. Világos, hogy az így nyert ζ_k függvények $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$-beliek, továbbá $\zeta_k(y,z) = 1$, ha $|(y,z)| \le$ ≤ 1, egyébként pedig $|\zeta_k(y,z)| \le 1$. Tetszőleges α multiindexet véve $\partial^\alpha \zeta_k =$ $= k^{-|\alpha|}\partial^\alpha \zeta$, amiből következően a (ζ_k) sorozat egyenletesen korlátos, továbbá $\partial^\alpha(\zeta_k - 1) \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán. □

A ζ_k függvények segítségével a (9.24) összefüggés jobb oldalát tovább alakíthatjuk.

9.81. Állítás. *Legyenek $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ és tegyük fel, hogy $f * g$ értelmes. Ha $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, akkor*

$$\begin{aligned} T_{f*g}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\varphi(y+z)\,dy\,dz = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(y)g(z)\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)\,dy\,dz \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $\zeta_k \to 1$ pontonként $\mathbb{R}^{2n}$-ben, továbbá a 9.79. Definícióban szereplő (ii) feltétel miatt a (ζ_k) sorozat egyenletesen korlátos, így az állítás a Lebesgue-tételből következik. □

Mivel az $(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ függvény már kompakt tartójú, ezért (9.24) alapján

$$T_{f*g}(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (T_f \times T_g)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).$$

Ennek alapján kézenfekvő disztribúciók konvolúcióját a következőképpen értelmezni.

9.82. Definíció. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy minden rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ és $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ sorozat esetén létezik és véges, továbbá folytonos φ függvényében a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciára nézve az alábbi határérték:

$$\lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]. \tag{9.25}$$

Ekkor az u és v disztribúciók *konvolúciója* értelmes, mégpedig

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)).$$

9.83. *Megjegyzés.* Vigyázzunk, hogy a direkt szorzattal ellentétben csak azonos térbeli disztribúciók konvolúcióját értelmeztük: definíció szerint két $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúció konvolúciója $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli. Könnyű látni, hogy (9.25) határérték, ha minden (ζ_k) sorozatra létezik, nem függ a (ζ_k) sorozat választásától, hiszen összefésülhetjük a sorozatokat. Az is világos, hogy ez a határérték φ-től lineárisan függ. Sőt, valójában megmutatható, hogy a határérték folytonos a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-beli konvergenciára nézve ezt mi csak az egyszerűség kedvéért tettük fel a definícióban. A folytonosság belátása általánosan nehéz (lásd a [94] könyvet), de konkrét disztribúciók esetében viszonylag egyszerűen igazolható.

A következőkben meghatározzuk néhány speciális típusú disztribúció egymással vett konvolúcióját, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

9.84. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, amelyekre $f * g$ (függvény értelemben) létezik. Ekkor $T_f * T_g$ értelmes, és $T_f * T_g = T_{f*g}$.*

Bizonyítás. A konvolúció definíciója és a 9.81. Állítás alapján nyilvánvaló (valójában ezért definiáltuk így a konvolúciót). □

9.85. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy v kompakt tartójú. Ekkor $u * v$ értelmes, és*

$$(u * v)(\varphi) = (u \times v)[(y, z) \mapsto \psi(z)\varphi(y + z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}), \tag{9.26}$$

ahol $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\psi(z) = 1$, ha z a $\operatorname{supp} v$ *halmaz egy nyílt környezetének eleme.*

Bizonyítás. Legyen ψ a kívánt tulajdonságú függvény. Először is gondoljuk meg, hogy ekkor az $(y, z) \mapsto \psi(z)\varphi(y + z)$ $(y, z \in \mathbb{R}^n)$ hozzárendeléssel értelmezett függvény egyrészt végtelen sokszor differenciálható, másrészt pedig kompakt tartójú. Valóban, $\psi(z)\varphi(y + z)$ pontosan akkor nem nulla, ha $z \in \operatorname{supp}\psi$, amely kompakt halmaz, és $y + z \in \operatorname{supp}\varphi$, azaz $y = (y + z) - z \subset \subset \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp}\psi$, amely ugyancsak kompakt halmaz. Ez alapján (9.26) jobb oldala jól definiált. A disztribúciókra vonatkozó konvolúció definíciója alapján minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ esetén

$$\begin{aligned}(u * v)(\varphi) &= \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y, z) \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)] = \\ &= \lim_{k\to\infty} u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)]\},\end{aligned} \tag{9.27}$$

ahol $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. Mivel $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} v$ halmaz egy környezetében, ezért A 9.31. Állítás felhasználásával a (9.27) összefüggés alapján

$$\begin{aligned}(u * v)(\varphi) &= u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] = \\ &= u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)] = \\ &= (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)] = \\ &= (u \times v)(\chi_k),\end{aligned}$$

ahol $\chi_k(y,z) = \zeta_k(y,z)\psi(z)\varphi(y+z)$. Elég belátnunk, hogy $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})} \chi(y,z) = = \psi(z)\varphi(y+z)$, ugyanis ekkor az $u \times v$ disztribúció folytonossága miatt

$$(u \times v)(\chi_k) \to (u \times v)(\chi),$$

vagyis a (9.27) egyenlet jobb oldalán lévő határérték minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ függvényre létezik és megegyezik a (9.26) jobb oldalán lévő kifejezéssel.
A ζ_k függvények definíciójából világosan látható, hogy $\operatorname{supp}\chi_k \subset \operatorname{supp}\chi$, amely kompakt halmaz $\mathbb{R}^{2n}$-ben. Most legyen α tetszőleges multiindex, és mutassuk meg, hogy $\partial^\alpha\chi_k \to \partial^\alpha\chi$ egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$-en. Mivel $\chi_k = \zeta_k\chi$, ezért a Leibniz-szabály alapján

$$\partial^\alpha\chi_k = \zeta_k\partial^\alpha\chi + \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ |\beta|>0}} c_\beta\partial^\beta\zeta_k\partial^\gamma\chi. \tag{9.28}$$

A $\zeta_k \xrightarrow{(*)} \zeta$ konvergencia folytán $\zeta_k \to 1$, $\partial^\beta\zeta_k \to 0$ ($|\beta| \neq 0$) egyenletesen $\mathbb{R}^{2n}$ minden kompakt részhalmazán, speciálisan $\operatorname{supp}\chi$-n is, amelynek következtében a (9.28) egyenlőség jobb oldala $\partial^\alpha\chi$-hez tart egyenletesen. Ezzel beláttuk, hogy a (9.27) egyenlőségben szereplő határérték minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ esetén létezik és megegyezik a (9.26) egyenlet jobb oldalán álló kifejezéssel.
Már csak annak igazolása van hátra, hogy a kérdéses határérték folytonosan függ φ-től. Ehhez $u\times v$ folytonossága miatt elég belátni, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})} \varphi$, akkor a $\vartheta_j(y,z) = \psi(z)\varphi_j(y+z)$ függvényekből álló sorozat tart a $\vartheta(y,z) = = \psi(z)\varphi(y+z)$ függvényhez a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$-beli konvergencia szerint. Ennek igazolása teljesen hasonlóan történik, mint az előbbiekben a $\chi_k \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})} \chi$ konvergenciáé, a bizonyítást nem részletezzük. □

Érdemes rögtön a fenti állítást a legegyszerűbb kompakt tartójú disztribúcióra, a nulla pontra koncentrált Dirac-deltára alkalmazni.

9.86. Példa. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges, továbbá $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, amely 1-gyel egyenlő a 0 egy környezetében. Ekkor a 9.85. Állítás alapján minden

$\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}(u * \delta_0)(\varphi) &= (u \times \delta_0)[(y,z) \mapsto \psi(z)\varphi(y+z)] = \\ &= u\{y \mapsto \delta_0[z \mapsto \psi(z)\varphi(y+z)]\} = \\ &= u\{y \mapsto \psi(0)\varphi(y)\} = u\{y \mapsto \varphi(y)\} = \\ &= u(\varphi).\end{aligned}$$

Következésképpen $u * \delta_0 = u$.

9.87. *Megjegyzés.* A fenti példával matematikailag értelmet adtunk a disztribúciók motivációjával kapcsolatban említett (9.2) összefüggésnek.

Vizsgáljuk meg egy újabb speciális esetben a konvolúció létezését, nevezetesen amikor mindkét disztribúciónak speciális halmaz a tartója. Ezt az esetet később a hullámegyenlethez tartozó általánosított Cauchy-feladat megoldásában fogjuk alkalmazni.

9.88. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy* $\operatorname{supp} u$ *része egy F féltérnek, továbbá* $\operatorname{supp} v$ *része egy P ($90°$-nál kisebb félnyílásszögű) konvex körkúpnak, amelynek tengelye párhuzamos a félsík normálisával, és a két halmaz metszete nem korlátos. Ekkor $u * v$ értelmes, mégpedig*

$$(u * v)(\varphi) = (u \times v)[(y,z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

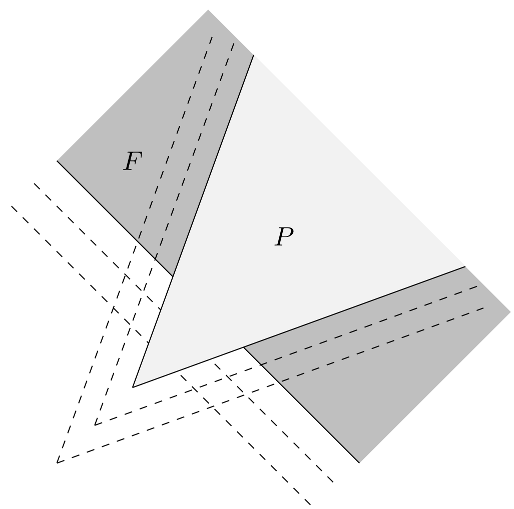
ahol $\psi, \chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyekre a következő teljesül:

(i) *$\psi = 1$ egy, az F-et (valódi részhalmazként) tartalmazó, F normálisával párhuzamos normálisú $\tilde{F}$ féltérben, továbbá $\psi = 0$ egy, az $\tilde{F}$-ot (valódi részhalmazként) tartalmazó, és annak normálisával párhuzamos normálisú $\tilde{\tilde{F}}$ féltéren kívül;*

(ii) *$\chi = 1$ egy, a P-t (valódi részhalmazként) tartalmazó, azzal egybevágó $\tilde{P}$ körkúpban, továbbá $\chi = 0$ egy, a $\tilde{P}$-ot (valódi részhalmazként) tartalmazó, azzal egyebevágó $\tilde{\tilde{P}}$ körkúpon kívül.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása teljesen hasonló a 9.85. Állítás bizonyításához, ezért nem részletezzük, lásd a 9.39. Feladatot. □

9.89. *Megjegyzés.* Jogosan vetődik fel a kérdés, léteznek-e egyáltalán a 9.88. Állításban megfogalmazott tulajdonsággal rendelkező $\psi, \chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvények. Természetesen bárki „el tud képzelni” ilyen függvényeket, azonban a pontos leírásuk egyáltalán nem triviális. A félsík esetében viszonylag könnyű ilyet megadni, elég egy, a félsík normálisának irányával párhuzamos egyenesen meghatározni a függvényt, és az erre merőleges irányban konstansként kiterjeszteni a függvényt. A kúp esetében célszerű a csúcsot „lekerekíteni” és az



9.2. ábra.

így kapott halmazhoz megkonstruálni a függvényt, amelyet például a féltérhez tartozó függvény „behajtásával” nyerhetünk. A pontos megvalósítás kissé technikás és a részletes bizonyítás hiánya egyáltalán nem megy a precizitás rovására. Az érdeklődőknek a [80] könyvet ajánljuk ezzel kapcsolatban.

9.90. *Megjegyzés.* A 9.88. Állítás feltételeinek eleget tevő disztribúciókkal már találkoztunk. Az egydimenziós hullámegyenlet 9.54. Példában szereplő alapmegoldásának tartója része az $\{x_0 \geq |x_1|\}$ körkúpnak (ahogy ezt a 9.56. Megjegyzésben is említettük). Ez egyébként nemcsak egy dimenzióban, hanem általában is igaz (lásd a 10.5. Tételt), a hullámegyenlet alkalmasan választott alapmegoldásának tartója mindig része egy hasonló körkúpnak. Az n-dimenziós hővezetési egyenlet 9.57. Példában szereplő alapmegoldásának tartója pedig része az $\{x_n \geq 0\}$ féltérnek.

9.6.3. Műveleti tulajdonságok

A függvények körében végzett konvolúció műveleti tulajdonságai öröklődnek az általánosított függvények körében vett konvolúció műveletére, így disztribúciók konvolúciója kommutatív, lineáris művelet.

9.91. Állítás (kommutativitás)**.** *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u * v$ értelmes. Ekkor $v * u$ is értelmes és $v * u = u * v$.*

Bizonyítás. A disztribúciók körében vett konvolúció definíciója szerint minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(u * v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u \times v)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)],$$

ahol $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. A disztribúciók direkt szorzatára vonatkozó 9.67. Állítás alapján

$$\begin{aligned}(u\times v)[(y,z)\mapsto\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] &= u\{y \mapsto v[z \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\} = \\ &= v\{z \mapsto u[y \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\} = \\ &= v\{y \mapsto u[z \mapsto \zeta_k(z,y)\varphi(z+y)\}] = \\ &= (v \times u)[(y,z) \mapsto \zeta_k(z,y)\varphi(y+z)].\end{aligned} \tag{9.29}$$

Világos, hogy ha $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$, akkor a $\tilde{\zeta}_k(y,z) = \zeta_k(z,y)$ függvényekre is teljesül, hogy $\tilde{\zeta}_k \xrightarrow{(*)} 1$. Az állítás feltételei szerint létezik $u * v$ és $v * u$, ebből következően (9.29) bal oldala $k \to \infty$ esetén $(u*v)(\varphi)$-hez, jobb oldala pedig $(v*u)(\varphi)$-hez tart, tehát szükségképpen $(u*v)(\varphi) = (v*u)(\varphi)$. □

9.92. Állítás (linearitás)**.** *Legyenek $u_1, u_2, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u_1 * v$ és $u_2 * v$ létezik. Ekkor minden $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) * v = \lambda_1(u_1 * v) + \lambda_2(u_2 * v).$$

Bizonyítás. A disztribúciókra vonatkozó konvolúció definíciója, illetve a határérték linearitása alapján az állítás nyilvánvaló. □

9.93. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v$. Ekkor*

$$\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$

ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$.

Bizonyítás. Lásd a 9.41. Feladatot. □

Végezetül vizsgáljuk meg, hogyan viszonyul egymáshoz a konvolúció és a deriválás művelete.

9.94. Állítás. *Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre $u * v$ létezik. Ekkor minden α multiindexre*

$$\partial^\alpha(u*v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v).$$

Bizonyítás. Nyilván elég belátni, hogy minden $j = 1, \ldots, n$ esetén $\partial_j(u*v) = \partial_j u * v = u * \partial_j v$. Ezt egymás után ismételve adódik az állítás tetszőleges α multiindexre.
A deriválás definíciója szerint minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\begin{aligned}\partial_j(u*v)(\varphi) &= -(u*v)(\varphi) = -\lim_{k\to\infty}(u\times v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\partial_j(y+z)] = \\ &= -\lim_{k\to\infty}(u\times v)\{y\mapsto v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\partial_j\varphi(y+z]\},\end{aligned} \tag{9.30}$$

ahol $(\zeta_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$. A szorzatfüggvény deriválási szabályából következően

$$\begin{aligned}\zeta_k(y,z)\partial_j\varphi(y+z) &= \zeta_k(y,z)\partial_{z_j}\varphi(y+z) = \\ &= \partial_{z_j}(\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)) - \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z).\end{aligned}$$

Ezt a (9.30) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_j(u*v)(\varphi) &= \lim_{j\to\infty}\big(-u\{y\mapsto v[z\mapsto \partial_{z_j}(\zeta_k(y,z)\varphi(y+z))]\}- \\ &\quad - u\{y\mapsto v[z\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}\big) = \\ &= \lim_{j\to\infty}\big(u\{y\mapsto \partial_j v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\}- \\ &\quad - (u\times v)[(y,z)\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\big).\end{aligned} \tag{9.31}$$

Vegyük észre, hogy $\partial_{z_j}\zeta_k = (\partial_{z_j}\zeta_k + \zeta_k) - \zeta_k$ és $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ folytán

$$(\partial_{z_j}\zeta_k + \zeta_k) \xrightarrow{(*)} 1.$$

Ebből a konvolúció definícióját felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(u\times v)[(y,z)\mapsto \partial_{z_j}\zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] = \\ &= (u\times v)[(y,z)\mapsto (\partial_{z_j}\zeta_k(y,z)+\zeta_k(y,z))\varphi(y+z)]- \\ &\quad - (u\times v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \xrightarrow{k\to\infty} (u*v)(\varphi)-(u*v)(\varphi)=0.\end{aligned} \tag{9.32}$$

Ezért a (9.31) összefüggés jobb oldalán az első tag határértéke létezik, és így

$$\begin{aligned}&u\{y\mapsto \partial_j v[z\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)]\} = \\ &= (u\times \partial_j v)[(y,z)\mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] \xrightarrow{k\to\infty} (u*\partial_j v)(\varphi).\end{aligned} \tag{9.33}$$

A (9.32), (9.33) összefüggéseket (9.31) jobb oldalába visszahelyettesítve

$$\partial_j(u*v)(\varphi) = u*\partial_j v.$$

□

A 9.86. Példa alapján adódik

9.95. Következmény. *Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Ekkor tetszőleges α multiindexre*

$$\partial^\alpha u = \partial^\alpha (u * \delta) = u * \partial^\alpha \delta.$$

9.7. Alapmegoldások

A következőkben röviden bemutatjuk a disztribúcióknak egy alkalmazását differenciálegyenletek megoldására. Korábban a 9.6. szakasz bevezetőjében említettük, hogy kitüntetett szerepük van egy adott differenciálegyenlet esetén a Dirac-delta jobb oldalhoz tartozó disztribúció értelemben vett megoldásnak: ennek segítségével az egyenlet minden jobb oldalhoz tartozó megoldása megkapható. Néhány speciális egyenlet, nevezetesen közönséges differenciálegyenletek, az egydimenziós hullámegyenlet és az n-dimenziós hővezetési egyenlet alapmegoldásával már a 9.51., a 9.54., a 9.57. Példákban találkoztunk. Ebben a szakaszban az előbbiek mellett ismertetjük a Laplace-egyenlet és a hullámegyenlet magasabb dimenziós alapmegoldásait, amelyek a későbbi fejezetekben újra elő fognak kerülni. Mindezek előtt azonban ismerkedjünk meg az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek alapmegoldásával kapcsolatos fontos alkalmazással.

9.96. Definíció. Legyen P egy n változós k-adfokú polinom, amelyet

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \xi^\alpha$$

alakban írunk, ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$, és $\xi^\alpha = (\xi_1^{\alpha_1}, \dots, \xi_n^{\alpha_n})$. Ekkor a $P(\partial)\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ *állandó együtthatós lineáris differenciáloperátort* a

$$P(\partial)u := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha u$$

hozzárendeléssel értelmezzük.

A fenti differenciáloperátor segítségével tekinthetjük a következő *állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletet*:

$$P(\partial)u = F,$$

ahol $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ adott és $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ keresendő. Megjegyezzük, hogy a fenti egyenlet nemcsak $a_\alpha \in \mathbb{R}$, hanem $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén is értelmezhető lenne. Az $F = \delta_0$-hoz tartozó megoldásnak az alábbiakban kitüntetett szerepe lesz.

9.97. Definíció. Legyen $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyan, hogy $P(\partial)E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^n$-ben. Ekkor E-t $P(\partial)u = F$ egyenlet *alapmegoldásának* nevezzük.

9.98. Tétel. *Legyen E a $P(\partial)u = F$ differenciálegyenlet egy alapmegoldása. Ha $E*F$ létezik, ahol $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, akkor $P(\partial)(E*F) = F$ $\mathbb{R}^n$-ben. Ezenkívül a $P(\partial)u = F$ egyenletnek legfeljebb egy olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ megoldása lehet, amelyre $u * E$ értelmes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $E * F$ értelmes, ekkor a 9.92. és 9.94. Állítások, továbbá E alapmegoldás voltának felhasználásával kapjuk, hogy

$$P(\partial)(E * F) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha (E * F) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha [(\partial^\alpha E) * F] =$$
$$= \left(\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha E \right) * F = (P(\partial)E) * F = \delta_0 * F = F.$$

Most tegyük fel, hogy $u_1, u_2 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ olyanok, hogy $P(\partial)u_j = F$ $(j = 1, 2)$. Legyen $u := u_1 - u_2$, így a differerenciáloperátor linearitása miatt $P(\partial)u = 0$, továbbá a 9.92. Állításból következően $u * E$ létezik, mégpedig $u * E = u_1 * * E - u_2 * E$. Megmutatjuk, hogy $u = 0$. Valóban, a 9.92., 9.94. Állítások és $P(\partial)u = 0$ felhasználásával

$$u = u * \delta_0 = u * (P(\partial)E) = u * \left(\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha E \right) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha (u * \partial^\alpha E) =$$
$$= \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha (u * E) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha (\partial^\alpha u * E) = \left(\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha \partial^\alpha u \right) * E = 0 * E = 0.$$

□

9.7.1. Példák alapmegoldásra

9.99. Példa (Közönséges differenciálegyenlet alapmegoldása)**.** Ezzel az alapmegoldással a 9.51. példában már találkoztunk, ezért csak röviden emlékeztetünk rá.

Tegyük fel, hogy az $y \in C^m(0, \infty)$ függvény első $(m - 1)$ deriváltja folytonos a $[0, \infty)$ intervallumon, továbbá y klasszikus értelemben kielégíti az alábbi kezdetiérték-feladatot:

$$\begin{gathered} y^{(m)} + c_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + c_1 y' + c_0 y = 0 \quad \text{a } (0, \infty)\text{-en}, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0, \ldots,\ y^{(m-1)}(0) = 1. \end{gathered} \tag{9.34}$$

Definiáljuk az $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt az alábbi hozzárendeléssel:

$$E(x) := \begin{cases} y(x), & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

Ekkor a 9.52. Állítás szerint

9.100. Állítás. *Az E-hez tartozó T_E reguláris disztribúció disztribúció értelemben kielégíti a (9.34) differenciálegyenletet, azaz*

$$T_E^{(m)} + c_{m-1}T_E^{(m-1)} + \cdots + c_1 T_E' + c_0 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}\text{-en.}$$

A következőkben a hullámegyenlet és hővezetési egyenlet alapmegoldásai kapcsán áttérünk a klasszikus jelölésekre, és a nulladik változót ezentúl t-vel fogjuk jelölni, ezzel is jelezve, hogy az időről van szó. Ennek megfelelően, ha nem okoz félreértést, a nulladik változó szerinti parciális deriválást ∂_0 helyett ∂_t-vel jelöljük, az x_i változó szerinti deriválást pedig ∂_{x_i}-vel.

9.101. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása egy dimenzióban)**.** A most következő alapmegoldással is találkoztunk már a 9.54. Példában. Tekintsük az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvényt:

$$E(t,x) := \frac{1}{2}H(t-|x|), \tag{9.35}$$

ahol H a Heaviside-függvény. Ekkor a 9.55. Állítás alapján adódik

9.102. Állítás. *A* (9.35) *formulával értelmezett függvény alapmegoldása az egydimenziós hullámegyenletnek, azaz disztribúció értelemben kielégíti a Dirac-delta jobb oldallal adott egydimenziós hullámegyenletet:*

$$\partial_t^2 T_E - \partial_x^2 T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^2\text{-ben.}$$

9.103. *Megjegyzés.* Amint azt a 9.56. Megjegyzésben említettük, a (9.35) függvényhez tartozó reguláris disztribúció tartója része az $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq |x|\}$ konvex körkúpnak.

A fenti megjegyzés magasabb dimenziókban való érvényességének érzékeltetése céljából az alábbiakban bizonyítás nélkül megadjuk a két- és háromdimenziós hullámegyenlet alapmegoldását.

9.104. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása két dimenzióban)**.** Tekintsük a következő hozzárendeléssel értelmezett E függvényt:

$$E(t,x) := \frac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2-|x|^2}}, \tag{9.36}$$

ahol $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ és H a Heaviside-függvény.

9.105. Állítás. *A* (9.36) *hozzárendeléssel definiált E függvényre $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, továbbá E a kétdimenziós hullámegyenlet alapmegoldása, azaz*

$$\partial_t^2 T_E - \partial_{x_1}^2 T_E - \partial_{x_2}^2 E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^3\text{-ben.}$$

9.106. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^3 : t \geq |x|\}$, amely egy konvex körkúp.

9.107. Példa (A hullámegyenlet alapmegoldása három dimenzióban)**.** Az hullámegyenlet egy- és kétdimenziós alapmegoldásával szemben a háromdimenziós alapmegoldás már nem reguláris disztribúció. Definiáljuk ugyanis az alábbi E funkcionált a következő hozzárendeléssel:

$$E(\varphi) := \int_0^\infty \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S(0,t)} \varphi(x)\, d\sigma_x \right) dt \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3)), \tag{9.37}$$

ahol $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $S(0,t)$ az origó középpontú t sugarú gömbfelület, valamint σ_x a felszíni mértéket jelöli.

9.108. Állítás. *A* (9.37) *formulával értelmezett funkcionálra* $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$, *továbbá* E *alapmegoldása a háromdimenziós hullámegyenletnek, azaz*

$$\partial_t^2 T_E - \partial_{x_1}^2 T_E - \partial_{x_2}^2 E - \partial_{x_3}^2 E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^4\text{-ben.}$$

9.109. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t = |x|\}$, amely része a $\{(t,x) \in \mathbb{R}^4 : t \leq |x|\}$ konvex körkúpnak.

9.110. *Megjegyzés.* A fentiek alapján tehát a hullámegyenlet alapmegoldásának tartója egy, két és három dimenzióban része egy konvex körkúpnak. Ebből az következik (lásd a 10.7. Következményt), hogy a hullámegyenlet véges sebességű hullámterjedést ír le. Megjegyezzük, hogy az alábbi tétel szerint ez nemcsak az említett dimenziókban és nemcsak a hullámegyenletre, hanem általánosan a kanonikus alakú hiperbolikus egyenletekre is igaz. A tétel bizonyítása a disztribúciókra vonatkozó Fourier-transzformáció segítségével történik, részletesen lásd a [80] könyvet.

9.111. Tétel. *Az* n*-dimenziós* $\partial_t^2 u - \Delta u + cu = f$ *(ahol* $c \in \mathbb{R}$*) egyenletnek létezik olyan* E *alapmegoldása, amelyre* $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, *mégpedig*

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{H(t)}{2\pi \cdot \pi^{(n-3)/2}} \left(\dfrac{d}{dt^2} \right)^{(n-3)/2} \left(\dfrac{1}{2t} \delta_{S(0,t)} \right), & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\[2ex] \dfrac{(-1)^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{(n+1)/2}} \cdot \dfrac{H(t-|x|)}{(t^2 - |x|^2)^{(n-1)/2}}, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases}$$

ahol $\delta_{S(0,t)}(\varphi) = \int_{S(0,T)} \varphi\, d\sigma$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n))$ *az úgynevezett* 1 *sűrűségű* egyszerű réteg, *valamint* Γ *a gamma-függvény, azaz* $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dz$.

A hővezetési egyenlet alapmegoldását a 9.57. Példában már felírtuk, most részletesen igazoljuk, hogy valóban alapmegoldás. Érdekes módon a fentiekkel ellentétben a hővezetési egyenlet alapmegoldására egy általános, tetszőleges n-re érvényes formula adható.

9.112. Példa (A hővezetési egyenlet alapmegoldása)**.** Az E függvényt definiáljuk a következő hozzárendeléssel:

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp(-|x|^2/4t), & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{9.38}$$

9.113. Állítás. *A* (9.16) *formulával értelmezett függvényre $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, valamint az E-hez tartozó reguláris disztribúció alapmegoldása az n-dimenziós hővezetési egyenletnek, azaz*

$$\partial_t T_E - \sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j} T_E = \delta_0 \quad \mathbb{R}^{n+1}\text{-}\mathit{ben}.$$

A bizonyítást előtt emlékeztetünk arra, hogy az E függvény néhány tulajdonságát már korábban a 8.2. Állításban igazoltuk:

- minden $t > 0$ esetén $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)\,dx = 1$;
- $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$;
- $\partial_t E(x,t) - \Delta E(x,t) = 0$, ha $x \in \mathbb{R}^n$ és $t \neq 0$.

Ennyi előkészület után rátérhetünk a 9.113. Állítás igazolására.

A 9.113. Állítás bizonyítása. Mivel $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, így a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján már csak annyit kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ esetén

$$-T_E(\partial_t \varphi) - T_E(\Delta\varphi) = \delta_0(\varphi). \tag{9.39}$$

Tegyük fel, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T) \times B(0,R)$. A továbbiakban a (9.39) egyenlet bal oldalának (-1)-szeresét alakítjuk át úgy, hogy végül a jobb oldal (-1)-szeresét kapjuk, és ezzel készen leszünk. Először vegyük észre, hogy φ kompakt tartója és E definíciója miatt

$$\begin{aligned} T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt = \\ &= \int_0^T \int_{B(0,R)} (E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} (E\partial_t\varphi + E\Delta\varphi)\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Vizsgáljuk meg egyenként a (9.40) egyenlőség jobb oldalán szereplő integrandusokat! Az első tagban az integrálás sorrendjét felcserélve, majd parciálisan integrálva és felhasználva, hogy φ kompakt tartójú, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} E\partial_t\varphi\, dx\, dt &= \int_{B(0,R)} \int_\varepsilon^T E\partial_t\varphi\, dt\, dx = \\ &= \int_{B(0,R)} \left[[E\varphi]_{t=\varepsilon}^T - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi\, dt \right] dx = \\ &= \int_{B(0,R)} \left(-E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) - \int_\varepsilon^T \partial_t E\varphi\, dt \right) dx.\end{aligned} \tag{9.41}$$

Most (9.40) jobb oldali integráljának második integrandusát vegyük szemügyre, a második Green-formulát (7.5. Tétel) alkalmazva, valamint kihasználva, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T)\times B(0,R)$ miatt a peremintegrál nullával egyenlő,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} E\Delta\varphi\, dx\, dt &= \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} \Delta E\, \varphi\, dx\, dt + \\ &\quad + \int_{S(0,R)} (E\partial_\nu\varphi - \partial_\nu E\, \varphi)\, d\sigma\, dt = \\ &= \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} \Delta E\varphi\, dx\, dt\end{aligned} \tag{9.42}$$

adódik.

A (9.41), a (9.42) összefüggéseket a (9.40) egyenletbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}&T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\int_{B(0,R)} E(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\, dx - \int_\varepsilon^T \int_{B(0,R)} (\partial_t E - \Delta E)\varphi\, dx\, dt \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\varphi(\varepsilon,0) \int_{\mathbb{R}^n} E(\varepsilon,x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(\varepsilon,x) - \varphi(\varepsilon,0)) E(\varepsilon,x)\, dx \right).\end{aligned} \tag{9.43}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-T,T)\times B(0,R)$ folytán az integrálási tartományokban $B(0,R)$ helyett $\mathbb{R}^n$ is írható, továbbá E kielégíti a $\partial_t E(t,x) - \Delta E(t,x) = 0$ differenciálegyenletet, ha $t > 0$ és $x \in \mathbb{R}^n$. Vegyük észre, hogy φ folytonossága miatt $\varepsilon \to 0+$ esetén $\varphi(\varepsilon,0) \to \varphi(0,0)$, továbbá $\int_{\mathbb{R}^n} E(x,\varepsilon)\, dx = 1$. Ezenkívül a (9.43) egyenlőség második integrálja a

Lagrange-becslés segítségével a következő módon becsülhető:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\varphi(\varepsilon,x)-\varphi(\varepsilon,0))E(\varepsilon,x)\,dx\right| &\le \int_{\mathbb{R}^n}|x|\cdot\sup_{\mathbb{R}^n}|\varphi'|\cdot E(\varepsilon,x)\,dx \le \\ &\le \text{const}\int_{\mathbb{R}^n}|x|E(\varepsilon,x)\,dx = \\ &= \text{const}\cdot\frac{1}{2(\sqrt{\pi\varepsilon}\,)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|x|\exp(-|x|^2/4\varepsilon)\,dx = \\ &= \text{const}\cdot\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{(\sqrt{\pi}\,)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\eta|e^{-|\eta|^2}\,d\eta,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az $\eta = x/(2\sqrt{\varepsilon})$ helyettesítést hajtottuk végre. Világos, hogy a fenti egyenlőség jobb oldala $\text{const}\cdot\sqrt{\varepsilon}$ nagyságrendű, így $\varepsilon \to 0+$ esetén 0-hoz tart. Mindezek alapján

$$T_E(\partial_t\varphi) + T_E(\Delta\varphi) = -\varphi(0,0) = -\delta_0(\varphi),$$

és éppen ezt akartuk belátni. □

9.114. *Megjegyzés.* A fentiek alapján a hővezetési egyenlet alapmegoldásának tartója része egy féltérnek. Ez azt eredményezi, hogy a hővezetési egyenlet végtelen sebességgel történő hőterjedést modellez, lásd a 11.13. Megjegyzést.

Végezetül az elliptikus egyenletek alapmegoldásával foglalkozunk.

9.115. Példa (A Poisson-egyenlet alapmegoldása)**.** Tekintsük az alábbi függvényeket:

$$E(x) := \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\cdot\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{ha } n \ge 3,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x|}, & \text{ha } n = 2,\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \end{cases} \tag{9.44}$$

ahol ω_n jelöli az egység sugarú n-dimenziós gömb felszínét (lásd a 2.9. Állítást). Vegyük észre, hogy $\log(1/|x|) = -\log|x|$, amelyet csak az egyszerűbb megjegyezhetőség (az $n \ge 3$ esethez való hasonlóság) kedvéért írtunk a „bonyolultabb" alakban.
Első látásra az sem világos, hogy E lokálisan integrálható függvény, természetesen ez csak a 0 körül kérdéses.

9.116. Állítás. *Minden $n \ge 2$ esetén $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

Bizonyítás. Legyen $\varrho > \varepsilon > 0$, ekkor az $n = 2$ esetben a 2.11. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\varrho)\setminus B(0,\varepsilon)} E &= \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\varrho \int_{S(0,r)} \log|x|\, d\sigma_x\, dr = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\varrho \int_{S(0,r)} \log r\, d\sigma_x\, dr = \int_\varepsilon^\varrho r\log r\, dr = \\ &= \left[\frac{r^2}{2}\log r - \frac{r^2}{4}\right]_\varepsilon^\varrho = \frac{\varrho^2}{2}\log\varrho - \frac{\varrho^2}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\log\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}.\end{aligned} \tag{9.45}$$

A klasszikus analízisből jól ismert $x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggés alkalmazásával a (9.45) egyenletből nyerjük, hogy

$$\int_{B(0,\varrho)} E = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{B(0,\varrho)\setminus B(0,\varepsilon)} E = \frac{\varrho^2}{2}\log\varrho - \frac{\varrho^2}{4} < \infty.$$

Az előbbiek mintájára $n \ge 3$ esetén

$$\begin{aligned}\int_{B(0,\varrho)\setminus B(0,\varepsilon)} E &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_\varepsilon^\varrho \int_{S(0,r)} |x|^{-n+2}\, d\sigma_x\, dr = \\ &= -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_\varepsilon^\varrho\int_{S(0,r)} r^{-n+2}\, d\sigma_x\, dr = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_\varepsilon^\varrho \omega_n r\, dr = \\ &= \frac{1}{n-2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_\varepsilon^\varrho = \frac{1}{n-2}\left(\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \frac{\varrho^2}{2(n-2)}.\end{aligned}$$

□

9.117. *Megjegyzés.* A 9.116. Állítás mintájára könnyen igazolható, hogy ha $0 \le \alpha < n$, akkor az $x \mapsto 1/|x|^\alpha$ függvény lokálisan integrálható $\mathbb{R}^n$-en (ebből az $n = 1$ eset jól ismert a klasszikus analízisből).

A hővezetési egyenlet alapmegoldásának esetéhez hasonlóan a (9.44) hozzárendeléssel értelmezett függvények kielégítik a Poisson-egyenletet a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon.

9.118. Állítás. *A* (9.44) *hozzárendeléssel definiált E függvényre minden $n \ge$ ≥ 2 esetén $\Delta u = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon.*

Bizonyítás. Az $n = 2$ esetben

$$2\pi\partial_x E(x,y) = \partial_x\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\partial_x\left(\log(x^2+y^2)\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

így

$$2\pi\partial_x^2 E(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

és ezért szimmetriaokok miatt

$$2\pi\partial_y^2 E(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

amiből $\Delta E = \partial_x^2 E + \partial_y^2 E = 0$ azonnal következik.
Az $n \geq 3$ esetben pedig

$$\omega_n \partial_{x_i} E = x_i |x|^{-n}, \qquad \omega_n \partial_{x_i}^2 E = |x|^{-n-2}\left(|x|^2 - n x_i^2\right),$$

ezért

$$\omega_n \Delta E = \omega_n \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 E \omega_n (-n-2)|x|^{-n-2}(n|x|^2 - n|x|^2) = 0.$$

□

9.119. Állítás. *A (9.44) hozzárendeléssel értelmezett E függvény alapmegoldása a Poisson-egyenletnek, azaz $\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben az $\mathbb{R}^n$ téren minden $n \geq 2$ esetén.*

Bizonyítás. Tekintsük először az $n \geq 3$ esetet! Be kell látnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $\Delta T_E(\varphi) = \delta_0$. Green második tételének felhasználásával

$$\begin{aligned}\Delta T_E(\varphi) &= E(\Delta\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} E\Delta\varphi \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi\Delta E + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{S(0,\varepsilon)} (E\partial_\nu\varphi - \varphi\partial_\nu E)\, d\sigma.\end{aligned} \tag{9.46}$$

A 9.118. Állítás szerint $\Delta E = 0$ az $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ halmazon, ezért $\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \varphi\Delta E = 0$. Ezenkívül vegyük észre, hogy az $S(0,\varepsilon)$ gömbfelületen a normális irányú derivált valójában a sugár szerinti derivált (-1)-szerese (hiszen a normális a gömb középpontja felé mutat), azaz

$$\partial_\nu E = -\partial_r E = -\partial_{|x|} E = -1/(|x|^{1-n}\omega_n).$$

Ekkor a (9.46) összefüggésből következően

$$\begin{aligned}\Delta T_E(\varphi) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} (\varphi - \varphi(0))\, d\sigma + \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n} \int_{S(0,\varepsilon)} \varphi(0)\, d\sigma + \\ &+ \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{S(0,\varepsilon)} E\partial_\nu\varphi\, d\sigma.\end{aligned} \tag{9.47}$$

Vegyük észre, hogy $\varepsilon^{n-1}\omega_n$ éppen $S(0,\varepsilon)$ felszíne, és így φ folytonossága miatt

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n}\int_{S(0,\varepsilon)}(\varphi-\varphi(0))\,d\sigma\right| \leq \sup_{S(0,\varepsilon)}|\varphi-\varphi(0)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0, \tag{9.48}$$

valamint

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}\omega_n}\int_{S(0,\varepsilon)}\varphi(0)\,d\sigma=\varphi(0). \tag{9.49}$$

Továbbá E definíciója alapján

$$\left|\int_{S(0,\varepsilon)}E\partial_\nu\varphi\,d\sigma\right| \leq |\sup\partial_\nu\varphi|\cdot\varepsilon^{n-2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0. \tag{9.50}$$

A (9.48)–(9.50) összefüggéseket a (9.47) egyenletbe helyettesítve $\Delta T_E(\varphi) = \varphi(0)$ adódik minden $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, ami éppen azt jelenti, hogy $\Delta E = \delta_0$ disztribúció értelemben.
A fenti bizonyítás szinte teljesen érvényben marad az $n=2$ esetre is, csak annyit kell megjegyeznünk, hogy a gömbfelületen $\partial_\nu E=-\partial_{|x|}E=-|x|^{-1}/\omega_2$, tehát a (9.47)–(9.49) összefüggések most is teljesülnek. Ezenkívül (9.50) továbbra is fennáll, mert a klasszikus analízisből ismert $x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggés folytán

$$\left|\int_{S(0,\varepsilon)}E\partial_\nu\varphi\,d\sigma\right| \leq \sup|\partial_\nu\varphi|\cdot\varepsilon|\log\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 0.$$

□

9.120. *Megjegyzés.* A fentiekben tárgyalt függvényekhez tartozó disztribúciók alapmegoldás voltának ellenőrzése, ha már ismerjük a függvényeket, mint láttuk, könnyen megy. Felmerül a kérdés, vajon hogyan lehet megtalálni ezeket a függvényeket? A három alapegyenletről szóló fejezetekben heurisztikus gondolatmenetet mutattunk az alapmegoldások meghatározására. Létezik azonban szisztematikus módszer is, ennek alapját a disztribúciók körében értelmezett Fourier-transzformáció képezi, ezzel kapcsolatban bővebben lásd a [80] könyvet.
Végül megemlítjük, hogy a Malgrange–Ehrenpreis-tétel szerint minden konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletnek van alapmegoldása. Ezt a tételt Leon Ehrenpreis (1930–) amerikai és Bernard Malgrange (1928–) francia matematikus (aki Laurent Schwartz tanítványa) egymástól függetlenül igazolta 1954-55-ben. A tételt illetően lásd a [41] monográfiát.

9.8. Feladatok

Az alábbiakban, ha másképp nem jelezzük, Ω mindig $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges nyílt részhalmazát jelöli.

9.1. Igazoljuk, hogy a (9.4) (vagy korábban a (3.2)) hozzárendeléssel értelmezett $\eta_{a,r}$ függvényre $\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

9.2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ és α ($|\alpha| \geq 1$) multiindex esetén található olyan $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ függvény, amelyre $\sup_\Omega \varphi = 1$, $\partial^\alpha \varphi(a) = c$, továbbá minden $\beta \neq \alpha$ esetén $\partial^\beta \varphi(a) = 0$. Sőt, igazoljuk, hogy olyan φ függvény is van, amely rendelkezik az előbbi tulajdonságokkal és ezenkívül $\sup_\Omega |\partial^\beta \varphi| \leq 1$ minden $|\beta| < |\alpha|$ multiindex esetén.

9.3. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ adott nem azonosan 0 függvény.

a) Igazoljuk, hogy a $\varphi_j(x) := \varphi(x)/j$ ($x \in \Omega, j = 1,2\dots$) hozzárendeléssel értelmezett sorozatra $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$.

b) Legyen $\Omega := \mathbb{R}^n$ és $\varphi_j(x) := \varphi(x/j)/j$ ($x \in \mathbb{R}^n, j = 1,2,\dots$). Konvergens-e a (φ_j) sorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben?

c) Legyen $\Omega := \mathbb{R}^n$ és $\varphi_j(x) := \varphi(jx)/j$ ($x \in \mathbb{R}^n, j = 1,2,\dots$). Konvergens-e a (φ_j) sorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ térben?

9.4. Igaz-e, hogy ha $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ és $\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \psi$, akkor $\varphi_j\psi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi\psi$?

9.5. Bizonyítsuk be, hogy ha $u\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál (a folytonosságot a C_0-beli maximumnormában értve), akkor $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Igaz-e a megfordítás, azaz ha $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, akkor u folytonos-e a maximumnormára nézve?

9.6. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, továbbá β multiindex, és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_\Omega f \partial^\beta \varphi$ hozzárendeléssel. Bizonyítsuk be, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű! Meghatározza-e u m.m. egyértelműen az f függvényt?

9.7. Legyen $a \in \Omega$ és mutassuk meg, hogy a δ_a Dirac-delta disztribúció nem reguláris, azaz nem létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $\delta_a = T_f$.

9.8. Legyen $\Omega = (0,2)$, és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$! Mutassuk meg, hogy u végtelen rendű! Lehet-e egy végtelen rendű disztribúció reguláris?

9.9. Adjunk meg tetszőleges k nemnegatív egész számra k-adrendű disztribúciót!

9.10. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges tartomány, továbbá $U \subset \overline{U} \subset \Omega$ korlátos tartomány, amelynek pereme folytonosan differenciálható. Tegyük fel, hogy $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, amelyre $f|_U \in C^1(\overline{U})$ és $f|_{\Omega \setminus \overline{U}} \in C^1(\Omega \setminus U)$. Jelölje

$$f_+(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega \setminus U}} f(y), \qquad f_-(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in U}} f(y)$$

az f függvénynek az U határán kívülről, illetve belülről vett határértékét. Mutassuk meg, hogy ekkor $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ és $j = 1, \ldots, n$ esetén

$$\partial_j T_f(\varphi) = T_{\partial_j f}(\varphi) + \int_{\partial U} (f_- - f_+)(\partial_j \varphi) \nu_j \, d\sigma,$$

ahol ν az U-ból kifelé mutató normális egységvektor.

9.11. Legyen $\psi \in C^\infty(\Omega)$ és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$(\psi u)(\varphi) := u(\psi\varphi) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\Omega))$$

összefüggéssel értelmezett $\psi u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionál disztribúció!

9.12. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és tegyük fel, hogy $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} u$ halmazon. Következik-e ebből, hogy $\psi u = u$?

9.13. Legyen $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

9.14. Mutassuk meg, hogy ha egy disztribúció tartója nem üres megszámlálható halmaz, akkor a disztribúció nem lehet reguláris.

9.15. Legyen $u, v \in \mathscr{D}(\Omega)$ és $\psi \in C^\infty(\Omega)$. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{supp}(u + v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v,$$
$$\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u.$$

Adjunk meg konkrét u és v disztribúciókat, továbbá ψ függvényt, amelyek esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül!

9.16. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$ és α multiindex. Hogyan hat egy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvényre $\partial^\alpha \delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$? Határozzuk meg $\partial^\alpha \delta_a$ tartóját! Bizonyítsuk be, hogy $\partial^\alpha \delta_a$ rendje $|\alpha|$.

9.17. Értelmezzük az $\mathscr{P}_1 \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő hozzárendeléssel:

$$\mathscr{P}_1(\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx =: \text{V.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$

amelyet az (amúgy esetleg értelmetlen) integrál ún. *Cauchy-féle főértékének* (valeur principale) nevezünk. Igazoljuk, hogy $\mathscr{P}_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, továbbá $\mathscr{P}_1 = (x \mapsto \log|x|)'$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en. Határozzuk meg $\mathscr{P}_1$ rendjét! Lehet-e $\mathscr{P}_1$ reguláris disztribúció? Legyen $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, és mutassuk meg, hogy $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 \neq \psi\mathscr{P}_1)\delta_0$.

9.18. Vezessük be a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket: $\text{abs}(x) := |x|$,

$$r(x) := \begin{cases} x, \text{ ha } x \geq 0, \\ 0, \text{ ha } x < 0, \end{cases} \qquad \text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(az előjelfüggvény), valamint H a Heaviside-függvény. Igazoljuk, hogy

a) $T_r' = T_H$, b) $T_{\text{abs}}' = T_{\text{sgn}}$, c) $T_{\text{sgn}}' = 2\delta_0$,

9.19. Van-e olyan $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $u' = \delta_{-1} + \delta_1$?

9.20. Bizonyítsuk be, hogy az $u(x) = H(x)\sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény disztribúció értelemben megoldása az $u'' + u = \delta_0$ differenciálegyenletnek $\mathbb{R}$-en!

9.21. Legyen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x-2$. Keressünk olyan $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $f'' + f + g = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en!

9.22. Adjunk meg olyan $y \in L^1_{\text{loc}}\mathbb{R}$ függvényt, amelyre $y'' - 4y = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en!

9.23. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ ha } xy \geq 0, \\ 0 \;\text{ különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a $\partial_{12}T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

9.24. Legyen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amelyre

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, \text{ ha } 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 \;\text{ különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg a $\partial_{21}T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

9.25. Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, amely 1-gyel egyenlő az (1,0), (0,1), $(-1,0)$,$(0,-1)$ csúcspontok által meghatározott négyzeten, és azon kívül 0. Adjuk meg a $\partial_1^2 T_f - \partial_2^2 T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

9.26. Értelmezzük az n-dimenziós $\tilde{H}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Heaviside-függvényt a következőképpen:

$$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \ldots, n\text{-re}, \\ 0 \text{ különben.} \end{cases}$$

a) Bizonyítsuk be, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n \tilde{H} = \delta_0$.

b) Mutassuk meg, hogy $\partial_1\partial_2 \cdots \partial_n r = \tilde{H}$, ahol

$$r(x) = \begin{cases} x_1 x_2 \cdots x_n, & \text{ha } x_i \geq 0 \text{ minden } i = 1, \ldots, n\text{-re}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

9.27. Definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(0,y)dy$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2))$ hozzárendeléssel. Igazoljuk, hogy

a) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$,

b) $\partial_2 u = \delta_{(0,0)}$,

c) van olyan $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, amelyre $u = \partial_1 T_f$.

9.28. Definiáljuk az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált az $u(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(x,-x)\,dx$ $(\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2))$ hozzárendeléssel. Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$. Adjuk meg a $\partial_1 u - \partial_2 u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$ disztribúciót egyszerűbb alakban!

9.29. Legyen $g_\varepsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R})} \delta_0$.

9.30. Igazoljuk, hogy ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$, akkor minden α multiindexre

$$\partial^\alpha u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} \partial^\alpha u.$$

9.31. Legyen α multiindex és $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{supp} \partial^\alpha u \subset$ $\subset \operatorname{supp} u$. Adjunk meg olyan u disztribúciót, amely esetében szigorú tartalmazás áll fenn. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség teljesül.

9.32. Egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúcióról azt mondjuk, hogy nem függ a j-edik változótól, ha tetszőleges $h = (0, \ldots, 0, h_j, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ és $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $u(x \mapsto \varphi(x)) = u(x \mapsto \varphi(x+h))$. Mutassuk meg, hogy az u disztribúció pontosan akkor nem függ a j-edik változótól, ha $\partial_j u = 0$.

9.33. Legyen $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Hogyan hatnak egy $\varphi \in \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre a $\delta_a \times \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ és $\delta_a \times T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók?

9.34. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Igazoljuk, hogy

$$\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v.$$

9.35. Igaz-e, hogy ha az $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ disztribúciók előállnak egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és egy $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$-beli disztribúció direkt szorzataként, akkor ugyanez igaz az $u + v$ disztribúcióra?

9.36. Tegyük fel, hogy $u \times v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?

9.37. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α (n hosszú) és β (m hosszú) multiindexre

$$\partial_x^\alpha(u \times v) = (\partial^\alpha u) \times v \quad \text{és} \quad \partial_y^\beta(u \times v) = u \times (\partial^\beta v).$$

9.38. Mutassuk meg, hogy a direkt szorzat a tényezőknek külön-külön folytonos függvénye, pontosabban, ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$, akkor

$$u_j \times v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})} u \times v \quad \text{és} \quad v \times u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})} v \times u.$$

9.39. Igazoljuk a 9.88. Állítást!

9.40. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^n$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Hogyan hatnak egy $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ függvényre a $\delta_a * \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ és $\delta_a * T_f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ disztribúciók?

9.41. Legyenek $u, v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciók, amelyekre létezik $u * v$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{supp}(u * v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v},$$

ahol $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v = \{y + z \in \mathbb{R}^n : y \in \operatorname{supp} u, z \in \operatorname{supp} v\}$. Adjunk meg olyan u és v disztribúciókat, amelyek esetében szigorú tartalmazás teljesül. Mutassunk olyan példát, amikor egyenlőség áll fenn!

9.42. Legyenek $u, v, w \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ a következő disztribúciók: $u = T_H$ (ahol H a Heaviside-függvény), $v = \delta_0'$, $w = T_1$ (ahol T_1 az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció). Bizonyítsuk be, hogy

$$(u * v) * w \quad \text{és} \quad u * (v * w)$$

létezik, de nem egyenlőek.

9.43. Legyen $u = v = T_1 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ahol T_1 az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció) és $w = \delta_0' \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Igazoljuk, hogy $u * (v * w)$ értelmes, de $(u * v) * w$ nem létezik.

9.44. Tegyük fel, hogy $u * v = 0$. Következik-e ebből, hogy $u = 0$ vagy $v = 0$?

9.45. Mutassuk meg, hogy a konvolúció folytonosan függ a tényezőktől a következő értelemben: ha $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ és $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kompakt tartójú, akkor

$$u_j * v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u * v \quad \text{és} \quad v * u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} v * u.$$

9.46. Adjunk meg az $(a_j) \subset \Omega$ pontsorozatra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt úgy, hogy $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{a_j}$ disztribúció legyen Ω-n!

9.47. Van-e olyan nem reguláris $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amely nulladrendű, kompakt tartójú és nem áll elő $u = \sum_{j=1}^{m} \delta_{s_i}$ alakban, ahol $s_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$?

9.48. Tegyük fel, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ disztribúció nulladrendű és $\operatorname{supp} u = \{a\}$, ahol $a \in \Omega$. Mutassuk meg, hogy ekkor $u = c \cdot \delta_a$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

9.49. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ tetszőleges. Bizonyítsuk be, hogy létezik $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ disztribúció, amelyre $v' = u$, továbbá ha $v_1' = v_2' = u$, akkor $v_1 - v_2$ konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

9.50. Tegyük fel, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ rendje $k \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor u' rendje $k + 1$.

10. fejezet

Állandó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok

A nehézségek, amelyekkel találkozol, maguktól megoldódnak, ahogy haladsz előre. Menj tovább és fényt fogsz látni, amely egyre jobban megvilágítja utadat.

Jean le Rond D'Alembert (1717–1783)

A fejezet tartalma. Értelmezzük az állandó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok fogalmát és igazoljuk a megoldások létezését. Az általánosított megoldásokból a klasszikus megoldásokra következtetünk.

Ahogy a bevezetőben jeleztük, ebben a fejezetben a hiperbolikus egyenletekre vonatkozó klasszikus kezdetiérték-feladatok (vagy Cauchy-feladatok) fogalmát szeretnénk kiterjeszteni a disztribúciók körére, és ezáltal értelmezni az általánosított Cauchy-feladatokat. Később az általánosított Cauchy-feladatok megoldásából tudunk következtetni a klasszikus feladatok megoldásaira.

10.1. Az általánosított Cauchy-feladat

Először emlékeztetünk a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatok megfogalmazására. A 6. fejezetében láttuk, hogy az állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakja hiperbolikus esetben a következő:

$$\partial_t^2 u - \Delta u + cu = f, \tag{10.1}$$

ahol c konstans és a keresett u függvény nulladik változóját t-vel jelöljük, a Δ operátor pedig csak az elsőtől az n-edik változóra vonatkozik.

10.1. Definíció. A (10.1) differenciálegyenletre vonatkozó *klasszikus Cauchy-feladat megoldásán* olyan $u \in C^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ függvényt értünk, amely (klasszikus értelemben) kielégíti a (10.1) egyenletet, továbbá $u, \partial_t u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, valamint teljesülnek az $u(0,x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ és $\partial_t u(0,x) = h(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltételek, ahol $g, h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvények.

Kérdés, hogy a fenti fogalom hogyan terjeszthető ki a disztribúciók körére. Ahhoz, hogy az u megoldáshoz tartozó reguláris disztribúcióról tudjunk beszélni, terjesszük ki az u és f függvény értelmezési tartományát $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$-ról $\mathbb{R}^{n+1}$-re, a szokásos módon 0-ként definiálva:

$$\tilde{u}(t,x) := \begin{cases} u(t,x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{10.2}$$

$$\tilde{f}(t,x) := \begin{cases} f(t,x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{10.3}$$

Világos, hogy ekkor $\tilde{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, hiszen $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Ahhoz, hogy az $\tilde{f}$ függvényhez tartozó reguláris disztribúcióról beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, ehhez elegendő például, ha $f \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Most már beszélhetünk az $\tilde{u}$ és $\tilde{f}$ függvényekhez tartozó $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$-beli reguláris disztribúciókról.

10.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az u függvény kielégíti a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (10.2) *alapján értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ teljesül. Ekkor a* (10.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{u}$ függvényre*

$$\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} + cT_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-}ben. \tag{10.4}$$

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ tetszőleges, ekkor disztribúciók deriválásának definíciója szerint

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} + cT_{\tilde{u}})(\varphi) &= T_{\tilde{u}}(\partial_t^2\varphi) - T_{\tilde{u}}(\Delta\varphi) + cT_{\tilde{u}}(\varphi) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{u}(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi) = \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \tilde{u}(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi).\end{aligned} \tag{10.5}$$

Most vizsgáljuk meg a (10.5) összefüggés jobb oldalán álló integrált, az integrandusokat külön-külön kezelve. Parciális integrálást végrehajtva egyrészt

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty u(t,x)\partial_t^2 u(t,x) &= -u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x) - \int_\varepsilon^\infty \partial_t u(t,x)\partial_t\varphi(t,x)\,dt = \\ &= -u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x) + \partial_t u(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x) + \\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty \partial_t^2 u(t,x)\varphi(t,x)\,dt,\end{aligned} \tag{10.6}$$

másrészt pedig a második Green-tételt alkalmazva

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)\varphi, \tag{10.7}$$

ahol a peremintegrálok φ kompakt tartójú volta miatt tűnnek el. A (10.6) és (10.7) összefüggések alapján

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi) &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(\varepsilon,x)\partial_t\varphi(\varepsilon,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(\varepsilon,x)\varphi(\varepsilon,x)\,dx + \\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t^2 u - \Delta u + cu)\varphi,\end{aligned}$$

mivel pedig u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, ezért $\partial_t^2 u - \Delta u + cu = f$ $\mathbb{R}_+^{n+1}$-on, így a $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ feltételből, valamint a kezdeti feltételekből adódóan

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u(\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi + c\varphi) = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(0,x)\partial_t(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u(0,x)\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f\varphi = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\partial_t\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(0,x)\,dx + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} f\varphi,\end{aligned} \tag{10.8}$$

ahol a határátmenetet a Lebesgue-tétel miatt végezhettük el, hiszen az integrandusok kompakt tartójú folytonos függvények. Vegyük észre, hogy a 9.65. Állítás szerint

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\varphi(0,x)\,dx = T_h\{x \mapsto \varphi(0,x)\} = T_h\{x \mapsto \delta[t \mapsto \varphi(t,x)]\} = \\ = \delta\{t \mapsto T_h[x \mapsto \varphi(t,x)]\} = (\delta \times T_h)(\varphi),\end{aligned} \tag{10.9}$$

a 9.70. Állítás alapján pedig

$$(\delta' \times T_g)(\varphi) = \partial_t(\delta \times T_g)(\varphi) = -(\delta \times T_g)(\partial_t \varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\partial_t\varphi(0,x)\,dx, \tag{10.10}$$

így a (10.8) és (10.5) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$(\partial_t^2 T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} + cT_{\tilde{u}})(\varphi) = (\delta' \times T_g)(\varphi) + (\delta \times T_h)(\varphi) + T_{\tilde{f}}(\varphi),$$

amit bizonyítani kellett. □

A (10.4) egyenlet lehetőség nyújt a klasszikus Cauchy-feladat fogalmának disztribúciókra való kiterjesztésére. Jegyezzünk meg még annyit, hogy a (10.4) egyenlet jobb oldalán álló disztribúcióra a 9.35. Példa és a 9.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp}(T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h) \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Ennek alapján kézenfekvő a következő definíció.

10.3. Definíció. Legyen $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ adott, amelyre $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A hiperbolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladat* megoldásán olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót értünk, amelyre

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben},$$

és $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A fenti egyenletet a hiperbolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladatnak* nevezzük.

A 10.2. Állításból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

10.4. Állítás. *Ha u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (10.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor a $v := T_{\tilde{u}}$ (ahol $\tilde{u}$ a* (10.2) *összefüggéssel definiált) disztribúció megoldása az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$ jobb oldallal.*

Az általánosított Cauchy-feladatok megoldására alkalmazhatjuk a 9. fejezet eredményeit, különösképpen a 9.98. és 9.111. Tételeket, és az alábbi tételt nyerjük.

10.5. Tétel. *A hiperbolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása, mégpedig $v = E * F$, ahol $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ olyan alapmegoldás, amelyre* $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$.

Bizonyítás. A 9.111. Tétel alapján létezik a hiperbolikus egyenletnek olyan $E \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ alapmegoldása, amelyre $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$. Ekkor a 9.88. Állítás szerint létezik az $E * F$ konvolúció, amelyre a 9.98. Tételből következően teljesül, hogy

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben.}$$

Ezenkívül a 9.93. Állítás folytán

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(E * F) \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} + \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} = \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Végül a 9.98. Tétel szerint az egyenletnek legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása létezhet, amelyre $v * E$ létezik, így mivel $\operatorname{supp} E \subset \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, ezért legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúció létezhet, amelyre $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ (hiszen az ilyen v-kre $v * E$ létezik). □

A fenti tételből máris következtethetünk a klasszikus Cauchy-feladat megoldásának egyértelműségére.

10.6. Következmény. *A hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy u_1 és u_2 klasszikus megoldások. Ekkor az $u := u_1 - u_2$ függvényre

$$\partial_t^2 u - \Delta u + cu = 0 \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben,}$$

valamint $u(0,x) = 0$ és $\partial_t u(0,x) = 0$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ebből következően a $v := T_{\tilde{u}}$ disztribúció kielégíti az alábbi egyenletet $\mathbb{R}^{n+1}$-ben:

$$\partial_t^2 v - \Delta v + cv = 0.$$

Világos (a 9.35. Példa miatt), hogy $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, így a 10.5. Tétel szerint szükségképpen $v = 0$ egyetlen megoldás, azaz $u = 0$. □

A 10.5. Tétel egy fontos következménye (amelyet már az alapmegoldások kapcsán a 9.7. szakaszban is említettünk), hogy a hiperbolikus egyenlet olyan jelenséget ír le, amelyben a hatás véges sebességgel terjed. Ezt disztribúciókra az alábbi következmény fogalmazza meg (a klasszikus esetet illetően lásd még a 10.14. Következményt).

10.7. Következmény. *Legyen $t_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ rögzített, és tekintsük a következő kúpot:*

$$A := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_0 - t > |x_0 - x|\}.$$

Ekkor az általánosított Cauchy-feladat megoldásának leszűkítése A-ra, azaz $v|_A$ csak $F|_A$-tól függ, más szóval $F|_A = 0$ esetén $v|_A = 0$.

Bizonyítás. Legyen $K := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq |x|\}$, ekkor $\operatorname{supp} E \subset K$. Tegyük fel, hogy $F|_A = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{supp} F \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. A 9.93. Állítás szerint

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(E * F) \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)}.$$

Állítjuk, hogy $\overline{K + \mathbb{R}^{n+1} \setminus A} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$, ekkor készen leszünk, hiszen $\operatorname{supp} v \subset$ $\subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ (amely zárt halmaz), és így $v = 0$ az A halmazon.
Legyen $(t_1, x^{(1)}) \in K$ és $(t_2, x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. Ebből következően $t_1 \geq |x^{(1)}|$ és $t_0 - t_2 \leq |x^{(0)} - x^{(2)}|$, így a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$t_0 - (t_1 + t_2) \leq |x^{(0)} - x^{(2)}| - |x^{(1)}| \leq |x^{(0)} - (x^{(2)} - x^{(1)})|,$$

vagyis $(t_1 + t_2, x^{(1)} + x^{(2)}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$, ezért $K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. Végül mivel $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ zárt halmaz (mert A nyílt), így $\overline{K + (\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$. □

10.8. *Megjegyzés.* A 10.7. Következményben szereplő kúpot szokás a $(t_0, x^{(0)})$ pont *függőségi kúpjának* vagy *karakterisztikus kúpjának* nevezni.

10.2. A klasszikus Cauchy-feladat

Most az előző szakaszban az általánosított Cauchy-feladatra kapott eredményeinket szeretnénk a klasszikus Cauchy-feladat megoldására alkalmazni. Az alapgondolat a következő. Amennyiben a klasszikus feladatban szereplő függvények eleget tesznek bizonyos simasági feltételeknek, akkor a (10.4) általánosított Cauchy-feladat megoldásáról (amelyre képletünk van) belátható, hogy reguláris disztribúció, amelynek megfelelő lokálisan integrálható függvény $\mathbb{R}^{n+1}_+$-ban kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot. Az egyszerűség kedvéért csak az egydimenziós hullámegyenlet (azaz $c = 0$) esetét vizsgáljuk meg részletesen, a két- és háromdimenziós hullámegyenlet esetében csak felírjuk a klasszikus Cauchy-feladat megoldását. A $c \neq 0$ esettel kapcsolatban lásd a 10.1. és a 10.2. Feladatokat.

10.9. Tétel. *Legyen $n = 1$, $c = 0$, továbbá tegyük fel, hogy $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$. Ekkor a hiperbolikus egyenletre vonatkozó klasszikus*

Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldása, mégpedig

$$\begin{aligned} u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau + \\ + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{10.11}$$

A (10.11) *képletet* D'Alembert-formulának *szokás hívni.*

Bizonyítás. Az egyértelműség a 10.6. Következményből adódik. A létezés bizonyítását három lépésben végezzük el. Először megmutatjuk, hogy a (10.11) formulával értelmezett függvény disztribúció értelemben megoldása a klasszikus Cauchy-feladathoz a (10.4) összefüggés alapján tartozó általánosított Cauchy-feladatnak. Ezután igazoljuk, hogy a megfelelő simasági feltételek mellett $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, végül pedig belátjuk a kezdeti feltételek teljesülését.
1. lépés. A 10.5. Tétel alapján a (10.4) egyenlet egyértelmű megoldása $E * F$, ahol a 9.101. Példa szerint $E(t,x) = H(t-|x|)/2$ (H a Heaviside-függvény), továbbá $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$. Belátjuk, hogy $E * F$ függvény értelemben létezik. Valóban,

$$\begin{aligned} (E * \tilde{f})(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\tau,\xi)E(t-\tau,x-\xi)\,d\tau\,d\xi = \\ &= \int_{\substack{0\le\tau\le t \\ |x-\xi|\le t-\tau}} \frac{1}{2}f(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

A (10.9) összefüggés felhasználásával $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$(\delta \times T_h)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(0,x)\,dx,$$

így a 9.88. Állítás szerint

$$\begin{aligned} &(E * (\delta\times T_h))(\varphi) = \\ &= (E \times (\delta\times T_h))[(t,x,\tau,\xi) \mapsto \psi(t,x)\chi(\tau,\xi)\varphi(t+\tau,x+\xi)] = \\ &= (\delta\times T_h)\big\{(\tau,\xi) \mapsto \psi(\tau,\xi)T_E[(t,x)\mapsto[\chi(t,x)\varphi(t+\tau,x+\xi)]]\big\} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\xi)\psi(0,\xi)\int_{\mathbb{R}^2} E(t,x)\chi(t,x)\varphi(t,x+\xi)\,dt\,dx\,d\xi, \end{aligned} \tag{10.12}$$

ahol $\psi = 1$ az $\mathbb{R}^2_+$ féltér egy környezetében és $\chi = 1$ a $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq |x|\}$ kúp egy környezetében. Ebből következően a Fubini-tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned}(E * (\delta \times T_h))(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} h(\xi) \int_{\mathbb{R}^2} E(t, x)\varphi(t, x + \xi)\, dt\, dx\, d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} E(t, x)\varphi(t, x + \xi)h(\xi)\, d\xi\, dt\, dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} E(t, \tilde{x} - \xi)\varphi(t, \tilde{x})h(\xi)\, d\xi\, dt\, d\tilde{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, \tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi| \leq t} h(\xi)\, d\xi \right) dt\, d\tilde{x}.\end{aligned} \tag{10.13}$$

Ez azt jelenti, hogy $E * (\delta \times T_h) = T_{u_2}$, ahol

$$u_2(t, \tilde{x}) = \frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi| \leq t} h(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} h(\xi)\, d\xi.$$

Teljesen hasonló módon, a (10.10) összefüggés alkalmazásával (10.12) és (10.13) mintájára kapjuk, hogy $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\begin{aligned}(E * (\delta' \times T_g))(\varphi) &= - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \varphi(t, \tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{|\tilde{x}-\xi| \leq t} g(\xi)\, d\xi \right) dt\, d\tilde{x} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \varphi(t, \tilde{x}) \left(\frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} g(\xi)\, d\xi \right) dt\, d\tilde{x}.\end{aligned}$$

A jobb oldalon egy parciális integrálást végrehajtva φ kompakt tartójú voltának, továbbá

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_{\tilde{x}-t}^{\tilde{x}+t} g(\xi)\, d\xi \right) = \frac{1}{2} \left(g(x + t) + g(x - t) \right)$$

felhasználásával adódik, hogy

$$(E * (\delta' \times T_g))(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t, \tilde{x}) \left(\frac{1}{2} g(x + t) + g(x - t) \right) dt\, d\tilde{x}.$$

Mindez azt jelenti, hogy $E * (\delta' \times T_g) = T_{u_3}$, ahol

$$u_3(t, x) = \frac{1}{2} \left(g(x + t) + g(x - t) \right).$$

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy ha $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$, akkor $E * F = T_u$, ahol u a (10.11) formulában szereplő függvény.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy a (10.11) képlettel adott u függvényre $u \in$ $\in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ez nyilvánvalóan következik a paraméteres integrál differenciálhatóságáról és a kirótt simasági feltételekből. Mivel az u függvény kétszer folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}^2_+$ féltérben, ezért u legfeljebb másodrendű klasszikus és általánosított parciális deriváltjai megegyeznek. Az u függvény általánosított értelemben kielégíti az $F = T_{\tilde{f}} + \delta' \times T_g + \delta \times T_h$ jobb oldallal adott általánosított Cauchy-feladatot, így a 10.4. Állítás alapján (és a klasszikus, illetve általánosított deriváltak egyenlősége folytán) u klasszikus értelemben is kielégíti az egydimenziós hullámegyenletet.
3. lépés. Végül már csak a kezdeti feltételek teljesülését kell ellenőriznünk. Nyilvánvalóan $u(0,x) = h(x)$, továbbá a 2.18. Tétel alapján

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(f(\tau, x+(t-\tau)) + f(t, x-(t-\tau))\right) d\tau +\\ + \frac{1}{2}(g'(x+t) - g'(x-t)) + \frac{1}{2}(h(x+t) + h(x-t)),\end{aligned}$$

így $\partial_t u(0,x) = h(x)$. □

10.10. *Történeti megjegyzés.* A D'Alembert-formula Jean le Rond D'Alembert (1717–1783) francia matematikus és filozófus nevét viseli. D'Alembert 1747-ben írt két cikkével kezdődött a rezgő húr problémakörének vizsgálata a parciális differenciálegyenletek segítségével (lásd [14, 15]). A probléma Brook Taylor (1685–1731) angol matematikustól ered (akiről a Taylor-sor is a nevét kapta), és ő az első, aki tulajdonképpen a hullámegyenletet először felírta. D'Alembert cikkében adott kezdeti kitérés és kezdeti sebesség mellett meghatározta a húr alakját, megadva a (10.11) formulát is. A cikk egy új területet nyitott meg, D'Alembert-t követve Euler és Daniel Bernoulli foglalkozott e témakörrel. Érdemes megjegyezni, hogy D'Alembert a matematika más területein is meghatározót alkotott, lásd például a D'Alembert-féle hányadoskritériumot, illetve a fizikában a D'Alembert-féle elv viseli a nevét, de foglalkozott a folyadékok mechanikájával és a fénytöréssel. Ezenkívül részt vett a francia Enciklopédia szerkesztésében is.
Végül érdekességként megemlítjük, hogy születésekor anyja a (Notre Dame melletti egykori) Saint Jean le Rond kápolna lépcsőin hagyta, és innen kapta keresztnevét, a D'Alembert vezetéknevet pedig később vette fel.
Az alábbiakban csak kimondjuk a két- és háromdimenziós hullámegyenlet klasszikus megoldására vonatkozó tételeket, a bizonyítás az egydimenziós esethez teljesen hasonlóan történik.

10.11. Tétel. *Legyen $n = 2$, $c = 0$, és tegyük fel, hogy $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $g \in$ $\in C^3(\mathbb{R}^2)$ és $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ekkor a kétdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$ megoldása,* *mégpedig*

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau^2)-|x-\xi|^2}}\,d\xi\,d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi\right) + \\ & + \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\,d\xi. \end{aligned} \tag{10.14}$$

10.12. Tétel. *Legyen $n = 3$, $c = 0$, valamint $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$, $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ és $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Ekkor a háromdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$ megoldása, méghozzá*

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(t-|x-\xi|,\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{S(x,t)} g\,d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{S(x,t)} h\,d\sigma. \end{aligned} \tag{10.15}$$

A (10.15) *képletet szokás* Kirchhoff-formulának *nevezni.*

10.13. *Megjegyzés.* Valójában a kétdimenziós eset visszavezethető a háromdimenziós esetre (lásd a 10.4. Feladatot), az egydimenziós pedig a kétdimenziósra (lásd a 10.5. Feladatot). Sőt, általában az $(n+1)$-dimenziós Cauchy-feladat megoldásának ismeretében az n-dimenziós feladat megoldását meg tudjuk határozni, ezt szokás a *leszállás módszerének* is nevezni.

A D'Alembert-, a (10.14) és a Kirchhoff-formula alapján adódik a következő nyilvánvaló állítás.

10.14. Következmény (Huygens-elv)**.** *Egy, két és három dimenzióban a hiperbolikus egyenlet megoldásának értéke egy (t_0, x^0) pontban csak az f függvénynek a (t_0, x^0) pont karakterisztikus kúpjára való megszorításától, valamint a g és h függvények $B(x^0, t_0)$ gömbre való megszorításától függ. Ez azt jelenti, hogy egy x^* pontbeli kezdeti $g(x^*)$ zavaró hatás az x^0-ban csak $|x^* - x^0|$ idő elteltével észlelhető, a hullám terjedési sebessége egységnyi. Sőt, az $n = 3$ esetben a (t_0, x^0) pontbeli érték, g-nek és h-nak csak a $B(x^0, t_0)$ gömb felületére vett megszorításától függ, a belsejében felvett értékektől nem. Más szóval x^* pontbeli kezdeti $g(x^*)$ (vagy $h(x^*)$) zavaró hatás csak a $\{(t,x) : t > 0, |x - x^*| = t\}$ kúp felületén befolyásolja az u megoldást, a kúp belsejében nem, azonban két dimenzióban a zavaró hatás a kúp belsejében is jelentkezik. A zavaró hatás tehát három dimenzióban egy hullámfront mentén terjed végig, annak elhaladtával újra nyugalmi állapot következik be. Azonban két dimenzióban az elülső hullámfront elhaladta után is jelentkezik a zavaró hatás,* *úgynevezett* hullámdiffúzió *megy végbe. A kétdimenziós eset tetszőleges páros dimenzióban, a háromdimenziós pedig tetszőleges páratlan dimenzióban igaz: páratlan dimenzióban a zavaró hatás egy hullámfront mentén halad végig, utána nyugalmi helyzet áll vissza, páros dimenzióban viszont a hullámfront elhaladása után jelentkezik a zavaró hatás, hullámdiffúzió megy végbe. Ez az úgynevezett* Huygens-elv*. (Szemléletesen: egy lámpát egy pillanatra felgyújtva bármely távolságban egy pillanatra látjuk a fényt, azonban a vízbe dobott kő által keltett kör hullámfront belseje nem kerül nyugalmi állapotba a hullámfront elhaladása után.)*

10.15. *Történeti megjegyzés.* A Kirchhoff-formula Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) német fizikus nevét viseli, aki egy 1882-es cikkében vizsgálta a rezgő lemezek elméletét.
A 10.13. Megjegyzésben említett leszállás módszerének elnevezése Jacques Salomon Hadamard (1865–1963) francia matematikustól származik, [37] könyvének első, 1923-as kiadásából (amelyből a Cauchy-feladat elnevezés is származik, lásd a 4.2. Megjegyzést). Ahogy Hadamard megjegyzi, gyerekes dolog egy olyan gyermekien egyszerű ötletre elnevezést bevezetni, amelyet ráadásul már az elmélet kialakulásától kezdve mindenki használt, de az egyszerűbb hivatkozás érdekében mégis hasznos. Az ötlet csupán annyi: aki a többet meg tudja oldani, az a kevesebbet is.
Christiaan Huygens (1629–1695) holland fizikus 1690-ban a fényről szóló könyvében írta le, hogy a fény terjedési hullámfrontja egy későbbi időpontban a hullámfrontból kiinduló hatások (másodlagos hullámok) burkolójaként áll elő. Később Augustin-Jean Fresnel francia fizikus ezt kiegészítette azzal, hogy egy adott pontbeli másodlagos hullámok amplitúdójának szuperpozíciójaént áll elő. A Huygens-elv elnevezést Huygens eredményének tiszteletére Hadamard vezette be a fentiekben említett könyvében. Hadamard felvetette a kérdést, hogy vajon melyek azok a másodrendű egyenletek, amelyekre teljesül a Huygens-elv, ez a probléma még ma sem teljesen megoldott. Később Peter David Lax (1926–) és Richard Courant (1888–1972) vezette be a gyenge Huygens-elvet, amely szerint egy pontbeli szingularitás csak a kezdeti értékeknek a pont karakterisztikus kúpjába eső szingularitásaitól függjön. A gyenge Huygens-elv minden hiperbolikus egyenletre teljesül.

10.3. Feladatok

10.1. Tegyük fel, hogy az $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúcióra $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^n_+}$, továbbá $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $h(x_n) = \exp(kx_n)$, ahol $k > 0$ adott. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció kielégíti a

$$\partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j u - k^2 u = F, \qquad \operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}^n_+} \tag{10.16}$$

általánosított Cauchy-feladatot, akkor a $v := u \times h$ disztribúció kielégíti

$$\partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v = F \times h, \qquad \operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}_+^n} \tag{10.17}$$

általánosított Cauchy-feladatot.

10.2. Igazoljuk a 10.1. Feladat megfordítását! Pontosabban, ha v a 10.17 feladat megoldása, akkor a $\tilde{h}(x_0, \ldots, x_n) := h(x_n)$ függvény segítségével értelmezett $v/\tilde{h} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúció nem függ az n-edik változótól (lásd a 9.32. Feladatot). Ekkor az

$$u(\varphi) := v(\varphi \times \varphi_0)$$

összefüggéssel értelmezett $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció kielégíti a (10.16) feladatot, ha $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 = 1$.

10.3. Bizonyítsuk be, hogy a hiperbolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladat megoldása folytonosan függ az $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciótól a következő értelemben. Ha $F_j \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{supp} F_j \subset \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$, amelyekre $F_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} F$ (a gyenge konvergencia szerint), akkor a megfelelő általánosított Cauchy-feladatok u_j megoldására $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} u$, ahol u az F-hez tartozó Cauchy-feladat megoldása.

10.4. Vezessük le a (10.14) képletet a Kirchhoff-formulából úgy, hogy a kétdimenziós Cauchy-feladatot háromdimenziós feladatnak tekintjük az f, g, h függvények alábbi kiterjesztésével:

$$\tilde{f}(t, \tilde{x}) := f(t, x), \quad \tilde{g}(t, \tilde{x}) := g(t, x), \quad \tilde{h}(t, \tilde{x}) := h(t, x), \tag{10.18}$$

ahol $\tilde{x} = (x, x_3) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

10.5. Vezessük le a D'Alembert-formulát a (10.14) képletből úgy, hogy az egydimenziós Cauchy-feladatot kétdimenziós feladatnak tekintjük az f, g, h függvények alábbi kiterjesztésével:

$$\tilde{f}(t, \tilde{x}) := f(t, x), \quad \tilde{g}(t, \tilde{x}) := g(t, x), \quad \tilde{h}(t, \tilde{x}) := h(t, x), \tag{10.19}$$

ahol $\tilde{x} = (x, x_2) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

11. fejezet

Állandó együtthatójú lineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok

A gyakorlati alkalmazások akkor bukkannak fel, amikor nem keressük azokat. Az egész emberiség fejlődése ezen az elven nyugszik.

Jacques Salomon Hadamard(1865–1963)

A fejezet tartalma. Értelmezzük az állandó együtthatójú lineáris parabolikus egyenletekre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatok fogalmát és igazoljuk a megoldások létezését. Az általánosított megoldásokból a klasszikus megoldásokra következtetünk.

Az előző fejezet mintájára az alábbiakban a parabolikus egyenletekre vonatkozó klasszikus kezdetiérték-feladatok fogalmát szeretnénk kiterjeszteni a disztribúciók körére, és az így definiált általánosított Cauchy-feladatok segítségével következtetünk a klasszikus feladat megoldásaira.

11.1. Az általánosított Cauchy-feladat

Először emlékeztetünk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmára. A 6. fejezetben foglaltak szerint az állandó együtthatós másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek kanonikus alakja parabolikus esetben a következő:

$$\partial_t u - \Delta u = f, \tag{11.1}$$

ahol a keresett u függvény nulladik változóját t-vel jelöljük, a Δ operátor pedig csak az elsőtől az n-edik változóra vonatkozik. Olyan u megoldást keresünk, amely a nulladik (azaz t) változóban egyszer, a többi változóban pedig kétszer folytonosan differenciálható. Ennek érdekében bevezetjük a $C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ teret:

$$C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) := \big\{u\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R} : \partial_t u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+), \partial_{ij} u \in C(\mathbb{R}^{n+1}_+), i, j \neq 0\big\}.$$

A fenti függvénytér segítségével már definiálhatjuk a klasszikus Cauchy-feladat fogalmát.

11.1. Definíció. A (11.1) differenciálegyenletre vonatkozó *klasszikus Cauchy-feladat megoldásán* olyan $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ függvényt értünk, amely (klasszikus értelemben) kielégíti a (11.1) egyenletet, továbbá $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, valamint teljesül az $u(0, x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ kezdeti feltétel, ahol $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott függvény.

A hiperbolikus esethez hasonlóan az általánosított Cauchy-feladat értelmezéséhez először az u és f függvényeket kiterjesztjük az egész $\mathbb{R}^{n+1}$ térre (nullaként definiálva $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on kívül), majd megvizsgáljuk, hogy a (11.1) milyen egyenletre vezet disztribúció értelemben.

$$\tilde{u}(t, x) := \begin{cases} u(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n; \end{cases} \tag{11.2}$$

$$\tilde{f}(t, x) := \begin{cases} f(t, x), & \text{ha } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11.3}$$

Nyilván $\tilde{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, hiszen $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Annak érdekében, hogy $T_{\tilde{f}}$-ről beszélhessünk, fel kell tennünk, hogy $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, amelyhez például elegendő, ha $f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$. Ekkor a 10.2. Állítás mintájára kapjuk a következő állítást.

11.2. Állítás. *Tegyük fel, hogy az u függvény kielégíti a parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (11.2) *alapján értelmezett $\tilde{f}$ függvényre $\tilde{f} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ teljesül. Ekkor a* (11.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde{u}$ függvényre*

$$\partial_t T_{\tilde{u}} - \Delta T_{\tilde{u}} = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-}ben. \tag{11.4}$$

Bizonyítás. A bizonyítás a 10.2. Állítás bizonyításához hasonló módon történik. □

Vegyük észre, hogy a (11.4) egyenlet jobb oldalán álló disztribúcióra a 9.35. Példa és a 9.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp}(T_{\tilde f} + \delta \times T_g) \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

Ennek alapján természetesen adódik a következő definíció.

11.3. Definíció. Legyen $F \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ adott, amelyre $\operatorname{supp} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A parabolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladat* megoldásán olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ disztribúciót értünk, amelyre

$$\partial_t v - \Delta v = F \qquad \mathbb{R}^{n+1}\text{-ben},$$

és $\operatorname{supp} v \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. A fenti egyenletet a parabolikus egyenletre vonatkozó *általánosított Cauchy-feladatnak* nevezzük.

A 11.2. Állításból nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

11.4. Állítás. *Ha u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, továbbá a* (11.3) *hozzárendeléssel értelmezett $\tilde f$ függvényre $\tilde f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, akkor a $v := T_{\tilde u}$ (ahol $\tilde u$ a* (11.2) *összefüggéssel definiált) disztribúció megoldása az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde f} + \delta \times T_g$ jobb oldallal.*

Az általánosított Cauchy-feladat megoldására alkalmazhatjuk a 9.98. Tételt, vagyis az alapmegoldás és a konvolúció műveletének segítségével előállíthatók a megoldások. Emlékeztetünk a parabolikus alapmegoldásra, amelyet a 9.112. Példában tárgyaltunk részletesen:

$$E(t,x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \cdot \exp(-|x|^2/4t), & \text{ha } t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{11.5}$$

Vegyük észre, hogy az E függvénynek csak bizonyos lassan növő függvényekkel vett konvolúciója létezik (nevezetesen olyanokkal, amelyeknek az $e^{-|x|^2}$ függvénnyel vett szorzata integrálható $\mathbb{R}^n$-en), így a hullámegyenlet esetével ellentétben a parabolikus alapmegoldás nem feltétlenül konvolválható bármely más disztribúcióval. Célunk egy olyan disztribúcióosztály keresése, amelynek elemei E-vel konvolválhatók. Ehhez vezessük be a következő $\mathscr{M}$ függvényteret.

11.5. Definíció. Jelölje $\mathscr{M}$ azon $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mérhető függvények összességét, amelyekre $f(t,x) = 0$, ha $t < 0$, továbbá minden $T > 0$ esetén $f|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^n)$.

11.6. Állítás. *Ha $f \in \mathscr{M}$, akkor $E * f$ függvény értelemben létezik, és $E * * f \in \mathscr{M}$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $f \in \mathscr{M}$ esetén $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$, másrészt a 8.2. Állítás c) része alapján $E \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$. A konvolúció definíciója szerint, felhasználva, hogy $t < 0$ esetén $f(t,x) = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(E * f)(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(\tau,\xi) f(t-\tau, x-\xi)\, d\tau\, d\xi \leq \\ &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi) |f(t-\tau, x-\xi)\, d\xi\, d\tau \leq \\ &\leq \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi,\end{aligned} \tag{11.6}$$

ahol a 8.2. Állítás b) részéből következően minden $\tau > 0$ esetén

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\, d\tau\, d\xi = 1,$$

továbbá $t \leq 0$ esetén $E(t,x) = 0$, következésképpen

$$|(E * f)(t,x)| \leq t \cdot \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)}.$$

A fenti becslés jobb oldala nyilván lokálisan integrálható $\mathbb{R}^{n+1}$-en, sőt minden $T > 0$ esetén $E * f|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$, tehát $E * f$ függvény értelemben létezik, és mivel $t < 0$ esetén $(E * f)(t,x) = 0$, ezért $E * f \in \mathscr{M}$. $\square$

Mivel az $E * f$ konvolúció függvény értelemben való létezése magában hordozza az $E * f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ feltételt, ezért tekinthetjük az $\mathscr{M}$ függvényosztálybeli függvényekhez tartozó reguláris disztribúciók deriváltjaiból képzett lineáris kombinációk összességét.

11.7. Definíció. Jelölje $\tilde{\mathscr{M}}$ az

$$F = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha} \tag{11.7}$$

alakban előálló disztribúciók osztályát, ahol $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in \mathscr{M}$ és $m \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek.

11.8. Állítás. *Ha $F \in \tilde{M}$, akkor $E * F$ disztribúció értelemben létezik, és $E * F \in \tilde{\mathscr{M}}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, azaz F a (11.7) egyenletnek megfelelő alakú. A 11.6. Állítás folytán $f_\alpha \in \mathscr{M}$ esetén $E * f_\alpha$ függvény értelemben létezik és $E * f \in \mathscr{M}$. Ekkor a 9.84. Állításból következően $T_E * T_{f_\alpha} = T_{E*f_\alpha}$. A 9.94. Állítás folytán $\partial^\alpha(T_E * T_{f_\alpha}) = T_E * \partial^\alpha T_{f_\alpha}$, ezért

$$E * F = T_E * \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{f_\alpha} = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha (T_E * T_{f_\alpha}) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha T_{E*f_\alpha},$$

és mivel $E * f_\alpha \in \mathscr{M}$, ezért $E * f \in \tilde{\mathscr{M}}$. □

Most már az $\tilde{\mathscr{M}}$ téren kimondhatjuk az általánosított Cauchy-feladat megoldásának létezéséről és egyértelműségéről szóló tételt, amely analóg a 10.5. Tétellel.

11.9. Tétel. *Legyen $F \in \tilde{\mathscr{M}}$. Ekkor a parabolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ megoldása, mégpedig $v = E * F$, ahol E a* (11.5) *alapmegoldás.*

Bizonyítás. Mivel $F \in \tilde{\mathscr{M}}$, ezért a 11.8. Állítás alapján $E * F$ létezik és $E * * F \in \tilde{\mathscr{M}}$. Az alapmegoldásokról szóló 9.98. Tételből következően a $v := E*F$ disztribúcióra $\partial_t v - \Delta v = F$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ térben. Végül a 9.93. Állítás folytán $\operatorname{supp} v \subset \overline{\operatorname{supp} E + \operatorname{supp} F} \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+ + \mathbb{R}^{n+1}_+} = \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.
Az egyértelműség ugyancsak a 9.98. Tételből következik, hiszen a

$$\partial_t v - \Delta v = F$$

egyenletnek legfeljebb egy olyan $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ megoldása létezhet, amelyre $v*E$ értelmes, azonban a 11.8. Állítás szerint $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ esetén $v*E$ értelmes. □

11.10. Következmény. *A parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatnak legfeljebb egy olyan u megoldása létezhet, amelyre minden $T > > 0$ esetén teljesül, hogy $u|_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^n)$.*

11.11. *Megjegyzés.* Ha a megoldás x-beli növekedésére semmilyen növekedési feltétel nincs előírva, akkor előfordulhat, hogy a Cauchy-feladat megoldása nem egyértelmű, lásd bővebben a 11.13. Megjegyzést.

11.2. A klasszikus Cauchy-feladat

Az általánosított Cauchy-feladatra az előzőekben nyert eredményeinket szeretnénk alkalmazni a klasszikus feladat megoldásaira. A 11.4. Állítás szerint a klasszikus Cauchy-feladatnak az $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g$ jobb oldalú általánosított feladat felel meg (ahol $\tilde{f}$ és $\tilde{u}$ a (11.2) és (11.3) hozzárendeléssel van definiálva). Ahhoz, hogy az általánosított feladatra vonatkozó 11.9. Tételt alkalmazhassuk, $F \in \tilde{\mathscr{M}}$ szükséges. Ehhez elegendő, ha $T_{\tilde{f}} \in \tilde{\mathscr{M}}$ és $\delta \times T_g \in \in \tilde{\mathscr{M}}$. Az előbbi teljesül, ha $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, az utóbbihoz pedig elég, ha $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Valóban, a 9.46. Példa, a 9.70. Állítás és a 9.66. Következmény alapján

$$\delta \times T_g = T'_H \times T_g = \partial_t (T_H \times T_g) = \partial_t T_{H \times g}, \tag{11.8}$$

ahol H a Heaviside-függvény. Mivel $H \times g \in \mathscr{M}$, sőt $H \times g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ezért $\delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$.
Az előbbi feltételek esetén tehát $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$, így $v = E * F = = E * T_{\tilde{f}} + E * (\delta \times T_g)$. A klasszikus Cauchy-feladat megoldhatósága azon múlik, hogy $E * T_{\tilde{f}}$ és $E * (\delta \times T_g)$ reguláris disztribúciók, amelyeknek megfelelő lokálisan integrálható függvények összege (megfelelő simasági feltételek mellett) kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot.

11.12. Tétel. *Tegyük fel, hogy $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^{1,2}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, továbbá $\partial^k \partial^\alpha f \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ minden $T > 0$, és $2k + |\alpha| \le 2$ $(k \ge 0)$ esetén. Ekkor a parabolikus egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak egyértelműen létezik olyan megoldása, amely minden $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ $(T > 0)$ sávban korlátos, mégpedig*

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Bizonyítás. Az egyértelműséget a 11.10. Következmény biztosítja. A létezés bizonyításának ötlete a következő: $\tilde{f} \in \mathscr{M}$ és $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén az általánosított Cauchy-feladat $F = T_{\tilde{f}} + \delta \times T_g \in \tilde{\mathscr{M}}$ jobb oldalhoz tartozó megoldása a (11.9) függvényhez tartozó reguláris disztribúció (lásd a 11.1–11.2. Feladatokat). A tételben szereplő simasági feltételek mellett ez a lokálisan integrálható függvény kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot, lásd a 11.3. Feladatot. Megjegyezzük, hogy a g függvény folytonosságára csak a kezdeti feltétel teljesüléséhez van szükség. Könnyen látható, hogy $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ esetén a (11.9) formula második tagja végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on, ez a hővezetési egyenlet (vagyis az $f = 0$ jobb oldalú egyenlet) simító hatása: akármilyen korlátos kezdeti érték esetén a megoldás bármely $t > 0$ időpillanatban végtelen sokszor differenciálható. Egyszerűen igazolható, hogy ha g folytonos egy $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban, akkor a parabolikus egyenlet u megoldására $\lim_{(t,x)\to(0,x_0)} u(t,x) = g(x_0)$. □

11.13. *Megjegyzés.* A (11.9) formulából következik (amelyet már az alapmegoldás kapcsán a 9.114. Megjegyzésben is említettünk), hogy a hővezetési egyenlet végtelen sebességű hőterjedést ír le. Valóban, ha $f = 0$ (azaz nincs se hőforrás, se hőnyelő), és a kezdeti hőmérsékletet meghatározó g függvény nemnegatív, és egy kompakt halmazon kívül 0, akkor tetszőleges $t > 0$ időpontban bármely $x \in \mathbb{R}^n$ helyen $u(t,x) > 0$, hiszen nemnegatív, nem m.m. 0 függvény integrálja pozitív. Bár a kezdeti hőmérséklet 0 volt egy halmazon kívül, bármely későbbi időpillanatban már bármely pontban pozitív lesz a hőmérséklet.

Igazolható, hogy a klasszikus Cauchy-feladat megoldása nemcsak az $\mathscr{M}$ függvényosztályon egyértelmű, hanem egy bővebb osztályon is. Jelölje $\mathscr{M}_\sigma$ az olyan $u\colon \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+} \to \mathbb{R}$ függvények összességét, amelyekre bármely $T > 0$ számhoz léteznek c_T, a_T konstansok úgy, hogy

$$|u(t,x)| \le c_T \exp(a_T|x|^\sigma), \text{ ha } 0 \le t \le T, x \in \mathbb{R}^n.$$

Ekkor a klasszikus Cauchy-feladat megoldása egyértelmű az $\mathscr{M}_2$ függvényosztályon (lásd a [20] könyvet), de tetszőleges $\sigma > 2$ esetén az $\mathscr{M}_\sigma$ függvényosztályon már nem egyértelmű, sőt végtelen sok megoldás létezik. Ezzel kapcsolatban Tyihonov példáját említjük végtelen sok megoldás konstruálására a 8.3.5. szakaszban. A végtelen sok megoldás ellenére David Widder (1898–1990) eredménye szerint legfeljebb egy nemnegatív megoldás létezhet, amely a fizikai alkalmazások szempontjából ésszerű, például ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

11.3. Feladatok

11.1. Legyen $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\delta \times g \in \tilde{\mathscr{M}}$, és

$$(\delta \times g) * H = \partial_t[E * (H \times g)].$$

11.2. Legyen $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Bizonyítsuk be, hogy minden rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ esetén a $t \mapsto [E * (H \times g)](t, x)$ függvény folytonosan differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, és $t > 0$ esetén

$$\frac{\partial}{\partial t}(t \mapsto [E * (H \times g)](t, x)) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t, \xi) g(x - \xi)\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x - \xi|^2}{4t}\right) d\xi.$$

11.3. Igazoljuk, hogy a 11.12. Tételben szereplő feltételek mellett a (11.9) formulával értelmezett u függvényre $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, $u(0, x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, továbbá u kielégíti a parabolikus egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot.

11.4. Legyen $\tilde{f} \in \mathscr{M}$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ekkor a 11.12. Tétel bizonyításában foglaltak szerint a parabolikus egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-feladat $F = \tilde{f} + \delta \times g$ jobb oldalhoz tartozó megoldása $T_{\tilde{u}}$, ahol u a (11.9) formulával értelmezett függvény. Bizonyítsuk be, hogy az általánosított Cauchy-feladat megoldása folytonosan függ az f, g függvényektől a következő értelemben:

$$|u(t, x)| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t\|f\|_{L^\infty((0,t) \times \mathbb{R}^n)} \qquad (t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

IV. rész

Szoboljev-terek

12. fejezet

Szoboljev-terek

Matematikus vagyok. A matematika kitöltötte az életemet.

Laurent-Moïse Schwartz (1915–2002)[1]

A fejezet tartalma. Bevezetjük a $H^1(\mathbb{R}^N)$ teret, majd megvizsgáljuk néhány alaptulajdonságát. Ezt követően korlátos Ω tartományon értelmezzük a $H^1(\Omega)$ teret, és foglalkozunk a $H^1(\Omega)$-beli függvények $H^1(\mathbb{R}^N)$-beliként való kiterjeszthetőségének, valamint a $H^1(\Omega)$-beli függvények peremre való nyomának (megszorításának) kérdésével. Igazoljuk továbbá a $H^1(\Omega)$ tér $L^2(\Omega)$ térbe való kompakt beágyazását. Ezután a $H_0^1(\Omega)$ és $H^2(\Omega)$ tereket tárgyaljuk, végül röviden kitérünk a $H^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ terek duálisaira.

Az itt bevezetésre kerülő speciális Hilbert-terek különösen alkalmasak a parciális differenciálegyenletek tanulmányozásához, ezt részletesen a 13. és 14. fejezetekben fogjuk tárgyalni. [2]
A következőkben a Lebesgue-integrál és a $C_0^\infty(\Omega)$ függvényosztály néhány tulajdonságára fogunk támaszkodni, bővebben lásd a 2. és 3. fejezeteket. A teljesség kedvéért az alábbi tételt kimondjuk.

12.1. Tétel. *Legyen U egy $\mathbb{R}^N$-beli nem üres nyílt halmaz. Ekkor*
(a) *$L^2(U)$ szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u,v)_{L^2} := \int_U uv\,dx$$

skaláris szorzatra nézve.
(b) *$C_0^\infty(U)$ sűrű lineáris altere $L^2(U)$-nak.*

[1] Önéletrajzi könyvének kezdőmondatai, lásd [77].
[2] Sobolev 1935, 1936.

12.1. A $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér

12.2. Definíció. $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ha $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ és ha léteznek olyan $g_1, \dots, g_N \in$ $\in L^2(\mathbb{R}^N)$ függvények, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\partial_i\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} g_i\varphi\,dx \qquad \text{minden } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ i = 1, \dots, N \text{ esetén}, \tag{12.1}$$

ahol $\partial_i\varphi$ a φ függvény i-edik parciális deriváltját jelöli.[3]

12.3. Példa. Ha $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, akkor $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a $g_i := \partial_i u$, $i = 1, \dots, N$ választással.

12.4. *Megjegyzések.*

- A g_i függvények minden $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$-ra egyértelműen meg vannak határozva. Ha ugyanis egy h_i függvény a g_i-éhez hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, akkor (12.1) alapján $\int_{\mathbb{R}^N}(h_i - g_i)\varphi\,dx = 0$ minden φ tesztfüggvényre, vagyis $h_i - g_i$ ortogonális $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-re $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben. Minthogy $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sűrű $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben, innen $h_i - g_i = 0$ m.m. adódik.
- Hasonlóan adódik ($L^2(U)$-ban okoskodva), hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ eltűnik valamely $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt halmazon, akkor $g_i = 0$ m.m. U-ban minden i-re.

A példa és az első megjegyzés alapján természetes a következő

12.5. Definíció. Bármely $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ függvény első parciális deriváltjait az $\partial_i u := g_i$ képlettel, *gradiensét* pedig a

$$\operatorname{grad} u = \nabla u := (\partial_1 u, \dots, \partial_N u) \in \left(L^2(\mathbb{R}^N)\right)^N$$

képlettel értelmezzük.

12.6. Tétel.
(a) $H^1(\mathbb{R}^N)$ *szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\mathbb{R}^N} uv + \sum_{i=1}^N (\partial_i u)(\partial_i v)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} uv + \nabla u \cdot \nabla v\,dx$$

skaláris szorzatra nézve.
(b) $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *sűrű lineáris altere* $H^1(\mathbb{R}^N)$*-nek.*

[3] Használatos a $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ jelölés is.

Bizonyítás.
(a) A definícióból következik, hogy $H^1(\mathbb{R}^N)$ az $L^2(\mathbb{R}^N)$ tér lineáris altere, és hogy a

$$Tu := (u, \partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$$

lineáris leképezés izometria $H^1(\mathbb{R}^N)$ és az $R(T)$ képtér között. Elegendő megmutatnunk, hogy az utóbbi *zárt* lineáris altere az $\big(L^2(\mathbb{R}^N)\big)^{N+1}$ szeparábilis Hilbert-térnek, mert egy szeparábilis Hilbert-tér minden zárt lineáris altere is szeparábilis Hilbert-tér.
Tekintsünk tehát egy olyan $(u_n) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ sorozatot, amelyre

$$Tu_n \to (u, g_1, \ldots, g_N) \quad \big(L^2(\mathbb{R}^N)\big)^{N+1}\text{-ben},$$

vagyis

$$u_n \to u, \quad \partial_1 u_n \to g_1, \ldots, \quad \partial_N u_n \to g_N \quad L^2(\mathbb{R}^N)\text{-ben}.$$

Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, az $L^2(\mathbb{R}^N)$-beli skaláris szorzat folytonosságának felhasználásával az

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_n \partial_i \varphi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} \partial_i u_n \varphi \, dx \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),\ i = 1, \ldots, N$$

egyenlőségekben a (12.1) összefüggést kapjuk. Ez definíció szerint mutatja, hogy $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ és $\partial_i u = g_i$, $i = 1, \ldots, N$, tehát $(u, g_1, \ldots, g_N) \in R(T)$.
(b) Ezt a részt itt nem bizonyítjuk. □

12.7. *Megjegyzések.*

- Jegyezzük meg, hogy u_n pontosan akkor konvergál u-hoz $H^1(\Omega)$-ban, ha $u_n \to u$ és $\partial_1 u_n \to \partial_1 u, \ldots,$ $\partial_N u_n \to \partial_N u$ $L^2(\Omega)$-ban.
- Jegyezzük meg azt is, hogy (u_n) pontosan akkor Cauchy-sorozat $H^1(\Omega)$-ban, ha $(\partial_1 u_n)$, …, $(\partial_n u_n)$ mind Cauchy-sorozatok $L^2(\Omega)$-ban.

Igazoljuk a Lagrange-féle középértéktétel alábbi változatát:

12.8. Állítás (Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség[4])**.** *Legyen $C \subset \mathbb{R}^N$ egy a oldalhosszúságú N-dimenziós kocka és $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Akkor*

$$\int_C u^2 \, dx \le \frac{Na^2}{2} \int_C |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{a^N} \left| \int_C u \, dx \right|^2.$$

[4] Blaschke 1916.

Bizonyítás. Eltolással és forgatással feltehető, hogy $C = [0,a]^N$. Legyen először $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Ha $x, y \in C$, akkor

$$\begin{aligned} u(x)-u(y) = &\int_{y_1}^{x_1} \partial_1 u(z_1, y_2, ..., y_N)\, dz_1 + \int_{y_2}^{x_2} \partial_2 u(x_1, z_2, y_3, ..., y_N)\, dz_2 + \cdots + \\ &+ \int_{y_N}^{x_N} \partial_N u(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, z_N)\, dz_N \le \\ \le &\int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, ..., y_N)|\, dz_1 + \int_0^a |\partial_2 u(x_1, z_2, y_3, ..., y_N)|\, dz_2 + \cdots + \\ &+ \int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, z_N)|\, dz_N, \end{aligned}$$

ahonnan[5]

$$\begin{aligned} u(x)^2 + u(y)^2 - 2u(x)u(y) = |u(x) - u(y)|^2 &\le \\ &\le N\left(\int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, \ldots, y_N)|\, dz_1\right)^2 + \cdots + \\ &\quad + N\left(\int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, z_N)|\, dz_N\right)^2 \le \\ &\le Na \int_0^a |\partial_1 u(z_1, y_2, \ldots, y_N)|^2\, dz_1 + \cdots + \\ &\quad + Na \int_0^a |\partial_N u(x_1, x_2, \ldots, y_{N-1}, z_N)|^2\, dz_N. \end{aligned}$$

Integrálva a $C \times C$ halmazon a kívánt egyenlőséget kapjuk:

$$2a^N \int_C u^2\, dx \le Na^{N+2} \int_C |\nabla u|^2\, dx + 2\left|\int_C u(x)\, dx\right|^2.$$

Az általános eset sűrűségi meggondolással adódik.[6] Az igazolandó egyenlőtlenség ugyanis $f(u) \le g(u)$ alakú, ahol $f, g : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ folytonos leképezések. Minthogy az egyenlőség fennáll a $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér sűrű $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ részhalmazán, a folytonosság miatt az egész $H^1(\mathbb{R}^N)$ téren is érvényes. □

12.9. Következmény. *Legyen $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ha $\nabla u = 0$ m.m. egy összefüggő, nyílt $U \subset \mathbb{R}^N$ halmazon, akkor u konstans U-ban.*

[5] Először felhasználjuk az elemi

$$(a_1 + \cdots + a_N)^2 \le N(a_1^2 + \cdots + a_N^2)$$

egyenlőtlenséget (amely az $(a_1, \ldots, a_N), (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^N$ vektorokra alkalmazott Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből adódik), majd alkalmazzuk a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget mindegyik integrálra.

[6] A továbbiakban az ilyen típusú meggondolásokat nem fogjuk részletezni.

Bizonyítás. U összefüggősége miatt elég megmutatnunk, hogy u konstans bármely $x \in U$ valamely környezetében. Válasszunk környezetül egy a oldalhosszúságú N-dimenziós C kockát, akkor

$$\int_C u^2\,dx \le \frac{1}{a^N}\left|\int_C u\,dx\right|^2,$$

ami az

$$\left|\int_C 1\cdot u\,dx\right|^2 \ge \left(\int_C 1^2\,dx\right)\left(\int_C u^2\,dx\right)$$

alakban is írható. Ez a fordított Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség, ami csak akkor áll fenn, ha az 1 és u függvények egymás számszorosai. $\square$

12.10. Állítás. *Tekintsünk egy korlátos $\mathcal{F} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ függvénycsaládot. Ha valamennyi $u \in \mathcal{F}$ függvény m.m. eltűnik valamely közös $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazon kívül, akkor $\mathcal{F}$ prekompakt $L^2(\mathbb{R}^N)$-ben.*

Bizonyítás. Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz olyan

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m$$

véges partíciót kell találnunk, ahol valamennyi $\mathcal{F}_i$ halmaz $L^2(\mathbb{R}^N)$-beli átmérője legfeljebb ε:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2\,dx\right)^{1/2} \le \varepsilon$$

minden $u, v \in \mathcal{F}_i$-re és $i = 1, \ldots, m$-re.
Rögzítsünk egy olyan c konstanst, hogy $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le c$ minden $u \in \mathcal{F}$-re. Rögzítsünk ezek után egy elég kis $a > 0$ számot[7], és fedjük be K-t az előző állításbeli C kocka véges sok $C_1, \ldots, C_n$ eltoltjával úgy, hogy semelyik két eltolt kockának ne legyen közös belső pontja. Akkor minden $u, v \in \mathcal{F}$-re érvényes a következő becslés:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u-v|^2\,dx &= \sum_{j=1}^n \int_{C_j} |u-v|^2\,dx \le \\
&\le \frac{Na^2}{2}\sum_{j=1}^n \int_{C_j} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx + \frac{1}{a^N}\sum_{j=1}^n \left|\int_{C_j} u - v\,dx\right|^2 = \\
&= \frac{Na^2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^2\,dx + \frac{1}{a^N}\sum_{j=1}^n \left|\int_{C_j} u\,dx - \int_{C_j} v\,dx\right|^2 \le \\
&\le 2Nc^2a^2 + \frac{1}{a^N}\sum_{j=1}^n \left|\int_{C_j} u\,dx - \int_{C_j} v\,dx\right|^2.
\end{aligned}$$

[7] A pontos választást ε függvényében később adjuk meg.

Itt felhasználtuk az elemi

$$|\nabla u - \nabla v|^2 \le 2|\nabla u|^2 + 2|\nabla v|^2$$

egyenlőtlenséget. Bevezetve a

$$Tu := \left(\int_{C_1} u(x)\, dx, \dots, \int_{C_n} u(x)\, dx \right)$$

képlettel értelmezett $T : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, az egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u - v|^2\, dx \le 2Nc^2a^2 + \frac{1}{a^N} |Tu - Tv|^2 . \tag{12.2}$$

A T leképezés folytonos, mert a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |Tu|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{C_j} 1 \cdot u\, dx \right|^2 \le \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{C_j} 1^2\, dx \right) \cdot \left(\int_{C_j} u^2\, dx \right) = \\ &= a^N \int_{\mathbb{R}^N} u^2\, dx \le a^N \int_{\mathbb{R}^N} (u^2 + |\nabla u|^2)\, dx = a^N \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

minden $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$-re. A korlátos $\mathcal{F} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ halmaz folytonos, $T(\mathcal{F})$ képe korlátos $\mathbb{R}^n$-ben, de akkor prekompakt is $\mathbb{R}^n$-ben, mert $\mathbb{R}^n$ véges dimenziós. Található tehát egy olyan $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_m$ véges partíció, hogy

$$|Tu - Tv|^2 \le Nc^2a^{N+2} \quad \text{minden } u, v \in \mathcal{F}_i\text{-re és } i = 1, \dots, m\text{-re.}$$

Innen (12.2) alapján kapjuk, hogy

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u - v|^2\, dx \le 3Nc^2a^2 \quad \text{minden } u, v \in \mathcal{F}_i\text{-re és } i = 1, \dots, m\text{-re.}$$

Az állítás innen adódik, ha a bizonyítás elején $a := \varepsilon/\sqrt{3N}c$ értéket választjuk. □

12.2. A $H^1(\Omega)$ terek

A továbbiakban Ω-val mindig egy $\mathbb{R}^N$-beli nem üres, *korlátos* nyílt halmazt jelölünk, Γ-val pedig ennek a határát. Az egyszerűség kedvéért[8] azt is felteszzük, hogy Ω C^∞-beli a következő értelemben:

[8] Ezek a geometriai feltevések enyhíthetőek: lásd például Raviart–Thomas [69] könyvét.

12.11. Definíció. Az Ω halmaz C^∞*-beli*, ha minden $a \in \Gamma$ ponthoz létezik a-nak egy olyan $U \subset \mathbb{R}^N$ nyílt környezete és egy olyan $h : B \to U$ diffeomorfizmus[9] a $B := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x| < 1\}$ nyílt egységgömb és U között, hogy minden $x = (x_1, \ldots, x_N) \in B$ pontra

$$\begin{aligned} x_N < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(x) \in \Omega \ ; \\ x_N = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad h(x) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Geometriailag Γ lokálisan egy C^∞-beli függvény gráfja, és Ω a határa egy oldalán helyezkedik el.[10]

12.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy $u \in H^1(\Omega)$, ha $u \in L^2(\Omega)$ és ha léteznek olyan $g_1, \ldots, g_N \in L^2(\Omega)$ függvények, hogy

$$\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx = -\int_\Omega g_i \varphi \, dx$$

minden $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ és $i = 1, \ldots, N$ esetén.

12.13. Példa. Jelöljük $C^\infty(\overline{\Omega})$-tal a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$-beli függvények Ω-ra vett leszűkítéseinek a halmazát.[11] Ha $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, akkor $u \in H^1(\Omega)$ a $g_i = \partial_i u$, $i = 1, \ldots, N$ választással.

Világos, hogy $H^1(\Omega)$ az $L^2(\Omega)$ tér lineáris altere. Minthogy $C_0^\infty(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban, a g_i függvények egyértelműen meg vannak határozva. Jogos tehát tetszőleges $u \in H^1(\Omega)$ függvény első parciális deriváltjait és gradiensét a $\partial_i u := g_i$ és

$$\operatorname{grad} u = \nabla u := (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$$

képletekkel *definiálni.*

12.14. Tétel.
(a) $H^1(\Omega)$ *szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^N (\partial_i u)(\partial_i v) \, dx$$

skaláris szorzatra nézve.
(b) $C^\infty(\overline{\Omega})$ *sűrű lineáris altér* $H^1(\Omega)$*-ban.*

[9] Vagyis olyan C^∞-beli $h : B \to U$ bijekció, amelynek az inverze is C^∞-beli.
[10] Nem teljesül például az utóbbi feltétel, ha Ω egy $\mathbb{R}^2$-beli nyílt körlapból adódik egy sugara elvételével („bevágás”).
[11] Megmutatható, hogy $C^\infty(\overline{\Omega})$ azon $u : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényekből áll, amelyek végtelen sokszor differenciálhatóak, és minden parciális deriváltjuk egyenletesen folytonos.

Bizonyítás.
(a) Megismételhető a 12.6. Tétel (a) részének a bizonyítása.
(b) A 12.6. Tétel (b) részéből következik az alábbi 12.15. Állítás alkalmazásával. □

A definíciókból következik, hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, akkor $u|_\Omega \in H^1(\Omega)$ a $g_i = \partial_i u|_\Omega$, $(i = 1, \dots, N)$ választással. A következő eredmény szerint $u \in H^1(\Omega)$ minden eleme megkapható ily módon.

12.15. Állítás (Lions, Magenes–Stampacchia [12]). *Tekintsük $\overline{\Omega}$ egy kompakt K környezetét.* [13] *Létezik egy olyan*

$$P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^N)$$

folytonos *lineáris leképezés, hogy*

$$Pu = u \quad \Omega\text{-}n \ \textit{és} \ Pu = 0 \quad \mathbb{R}^N \setminus K\text{-}n$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra.

Bizonyítás. (A tükrözés és levágás módszere.) Csak az egydimenziós $\Omega = (0,1)$ esettel foglalkozunk. Válasszunk egy olyan $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\eta = 1$ [0,1]-ben, és $\eta = 0$ K-n kívül. Terjesszünk ki minden $u \in H^1(\Omega)$ függvényt egy 2-periodikus, páros $\overline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyé. Akkor a $Pu := \eta\overline{u}$ képlet ilyen lineáris leképezést definiál. □

12.16. Tétel (Rellich [14]). *A $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ beágyazás kompakt.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy bármely $H^1(\Omega)$-beli korlátos B halmaz prekompakt az $L^2(\Omega)$ metrikájára nézve. Ehhez elég észrevennünk, hogy a $P(B) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ halmaz teljesíti a a 12.10. Állítás feltételeit. □

Alkalmazásként általánosítjuk a Poincaré–Wirtinger egyenlőtlenséget általánosabb tartományokra:

12.17. Állítás (Poincaré–Wirtinger [15]). *Ha Ω összefüggő, akkor van olyan $c(\Omega)$ konstans, hogy*

$$\int_\Omega u^2 \, dx \le c(\Omega) \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \left| \int_\Omega u \, dx \right|^2 \right)$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra.

[12] Lions 1957, Magenes–Stampacchia 1958.
[13] Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{R}^N \setminus K$ és $\overline{\Omega}$ távolsága > 0.
[14] 1930.
[15] Poincaré 1890, 1894, Wirtinger.

Bizonyítás. Ha az állítás nem igaz, akkor található olyan $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ sorozat, hogy $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ minden n-re, és

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx + \left|\int_\Omega u_n(x)\,dx\right|^2 \to 0.$$

Ekkor $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \to 1$. Speciálisan (u_n) korlátos $H^1(\Omega)$-ban, és így Rellich tétele szerint van $L^2(\Omega)$-ban konvergens $u_{n_k} \to u$ részsorozata.
Minthogy $\nabla u_{n_k} \to 0$ $L^2(\Omega)^N$-ben, (u_{n_k}) Cauchy-sorozat $H^1(\Omega)$-ban, és így $u_{n_k} \to v$ $H^1(\Omega)$-ban valamely alkalmas $v \in H^1(\Omega)$ függvényre. Akkor $u_{n_k} \to v$ $L^2(\Omega)$-ben is, tehát $v = u$ az $L^2(\Omega)$-beli határérték egyértelműsége miatt. Az eddigiek alapján tehát

- $u \in H^1(\Omega)$,
- $\nabla u = 0$ m.m. Ω-ban,
- $\int_\Omega u\,dx = 0$,
- $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

Alkalmazva a 12.9. Következményt [16], az első két feltételből következik, hogy u konstans. A harmadik feltétel szerint ez a konstans nulla, ez viszont ellentmond a negyedik feltételnek. □

A továbbiakban $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_N(x))$-vel jelöljük az $x \in \Gamma$ pontban az Ω-ból kifelé mutató normális egységvektort. Emlékeztetünk a Newton–Leibniz-formula alábbi általánosítására:

12.18. Állítás (Gauss–Osztrogradszkij [17]). *Ha $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, akkor*

$$\int_\Omega \partial_j f\,dx = \int_\Gamma f\nu_j\,d\Gamma, \quad j = 1, \ldots, N.$$

12.19. *Megjegyzés.* Az egydimenziós esetben ez ekvivalens a Newton–Leibniz-formulával. Az N-dimenziós eset innen szukcesszív integrációval adódik. [18]

12.20. Tétel (Nyomtétel [19]). *Létezik egy egyértelműen meghatározott olyan*

$$\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

[16] Ehhez először kiterjesztjük u-t egy $H^1(\mathbb{R}^N)$-beli függvénnyé.
[17] Gauss 1813, 1840, Osztrogradszkij 1828, 1834.
[18] A részletek és a magasabb dimenziós eset tárgyalása is megtalálható például a [12, 21] könyvekben.
[19] Sobolev 1950. A folytonosságnál erősebb $\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} \le C(\Omega)\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|u\|_{H^1(\Omega)}$ becslést is igazoljuk majd.

folytonos lineáris leképezés, hogy

$$\gamma u = u|_\Gamma$$

minden $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$*-ra.*
Továbbá [20]

$$\int_\Omega (\partial_j u)v + u(\partial_j v)\,dx = \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v)\nu_j\,d\Gamma, \quad j = 1, \ldots, N$$

minden $u, v \in H^1(\Omega)$*-ra.*

12.21. *Megjegyzés.* A jelölés egyszerűsítése végett általában u-t írunk γu helyett.

Bizonyítás. Az Ω-ra tett feltevések miatt van olyan C^∞-beli $h = (h_1, \ldots, h_N) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ vektormező, hogy $h \cdot \nu \geq 1$ Γ-n.[21] Alkalmazva a Gauss–Osztrogradszkij-tételt a $h_j u^2$ függvényekre a következő azonosságot kapjuk[22]:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma u^2\,d\Gamma &\leq \int_\Gamma (h \cdot \nu) u^2\,d\Gamma = \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Gamma h_j u^2 \nu_j\,d\Gamma = \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \partial_j (h_j u^2)\,dx = \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Omega h_j \partial_j (u^2) + (\partial_j h_j) u^2\,dx = \\
&= \sum_{j=1}^N \int_\Omega 2(h_j \partial_j u)u + (\partial_j h_j) u^2\,dx = \\
&= \int_\Omega u(2h \cdot \nabla u)\,dx + \int_\Omega (\operatorname{div} h) u^2\,dx.
\end{aligned}$$

[20] Green 1828.

[21] Ha például Ω egy a középpontú, r sugarú gömb, akkor a $h(x) := \frac{x-a}{r}$ függvényre még a $h \cdot \nu = 1$ egyenlőség is teljesül. Általánosabban, ha Ω konvex, vagy legalább *csillagszerű* valamely a pontjára nézve (azaz ha $ta + (1-t)x \in A$ minden $x \in A$ és $0 < t < 1$ esetén), akkor a $h(x) := (x-a)/r$ választás megfelel, ahol $r > 0$ olyan kicsi, hogy $B_r(a) \subset \Omega$. Az általános esetben a vektormező egységosztás segítségével konstruálható.

[22] A $\operatorname{div} h := \sum_{j=1}^N \partial_j h_j$ jelölést használjuk.

Bevezetve (az $L^\infty(\overline{\Omega})$-beli normákkal) az

$$M_0 := 2\,\|h\|_\infty\,, \quad M_1 := \|\operatorname{div} h\|_\infty \quad \text{és} \quad M := \sqrt{M_0^2 + M_1^2}$$

számokat, innen

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} &\le M_0\,\|\nabla u\|_2\,\|u\|_2 + M_1\,\|u\|_2^2 \le \\ &\le \sqrt{M_0^2+M_1^2}\sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2}\;\;\|u\|_2 = \\ &= M\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \\ &\le M\,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Minthogy $C^\infty(\overline{\Omega})$ sűrű $H^1(\Omega)$-ban, az $u \mapsto u|_\Gamma$ lineáris leképezés folytonosan kiterjeszthető egy egyértelműen meghatározott folytonos lineáris $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ leképezéssé.
Az igazolandó azonosság $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$-re az előző állításból adódik az $f = uv$ választással. Az általános eset sűrűségi és folytonossági meggondolással következik, felhasználva a *nyom* leképezés folytonosságát is. □

12.3. A $H_0^1(\Omega)$ tér

12.22. Definíció. Jelöljük $H_0^1(\Omega)$-val a $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ *nyom* leképezés magját:

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \ :\ u = 0 \quad \Gamma\text{-n} \right\}.$$

12.23. Példa. Világos, hogy $C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

12.24. Tétel.
(a) *$H_0^1(\Omega)$ szeparábilis Hilbert-tér a $H^1(\Omega)$-ból örökölt skaláris szorzatra nézve.*

(b) *$C_0^\infty(\Omega)$ sűrű lineáris altér $H_0^1(\Omega)$-ban.*

Bizonyítás.
(a) $H^1(\Omega)$ *zárt* lineáris altere lévén, $H_0^1(\Omega)$ rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

(b) Bizonyítás nélkül elfogadjuk. □

12.25. Állítás (Poincaré-egyenlőtlenség [23]). *Létezik olyan $c(\Omega)$ konstans, hogy*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le c(\Omega)\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

[23] Poincaré 1890.

minden $u \in H_0^1(\Omega)$*-ra.*
Következésképpen a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

képlet a $H^1(\Omega)$*-ből örökölttel ekvivalens euklideszi normát definiál* $H_0^1(\Omega)$*-n.*

12.26. *Megjegyzés.* Emlékeztetünk rá, hogy Ω a feltevésünk szerint *korlátos.* Például $\Omega = \mathbb{R}^N$ esetén nem állna fenn hasonló egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Elegendő igazolnunk az egyenlőtlenséget $u \in C_0^\infty(\Omega)$-ra. Vezessünk be egy Ω-t tartalmazó C kockát a

$$b < x_i < b + a, \quad i = 1, \dots, N$$

egyenlőségekkel. Az u függvényeket nullaként kiterjesztve Ω-n kívülre feltehető, hogy $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Minden $x \in \Omega$-ra

$$u(x) = \int_b^{x_1} \partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)\, dz_1.$$

A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget használva innen

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\le (x_1 - b) \int_b^{x_1} |\partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2\, dz_1 \le \\ &\le a \int_b^{b+a} |\partial_1 u(z_1, x_2, \dots, x_N)|^2\, dz_1 \end{aligned}$$

adódik, ebből pedig szukcesszív integrációval az

$$\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \le a^2 \int_\Omega |\partial_1 u(x)|^2\, dx \le a^2 \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx$$

egyenlőséget kapjuk: a keresett egyenlőtlenség teljesül a $c(\Omega) = a$ konstanssal. Az állítás második része az alábbi egyenlőtlenségekből következik:

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \le (1 + a^2)\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 . \quad \square$$

12.4. A $H^2(\Omega)$ tér

12.27. Definíció. Azt mondjuk, hogy $u \in H^2(\Omega)$, ha $u \in H^1(\Omega)$ és $\partial_i u \in \in H^1(\Omega)$ minden $i = 1, \dots, N$-re.

A kényelem kedvéért a korábbiakhoz hasonlóan vezessük be az

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$$

multi-indexeket, amelyeknek a komponensei nemnegatív egészek. A komponensek összegét α *rendjének* nevezzük és $|\alpha|$-val jelöljük. Az α rendű parciális deriváltat a

$$\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_N^{\alpha_N}$$

képlettel értelmezzük.

12.28. Tétel.
(a) $H^2(\Omega)$ *szeparábilis Hilbert-tér az*

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le 2} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

skaláris szorzatra nézve.
(b) $C^\infty(\overline{\Omega})$ *sűrű lineáris altere* $H^2(\Omega)$*-nak.*

Bizonyítás. A 12.14. Tétel bizonyítása adaptálható. □

Világos, hogy a

$$\Delta u := \text{div grad } u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u \in L^2(\Omega)$$

képlet egy folytonos lineáris $\Delta : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ leképezést definiál. Ezt *Laplace-operátornak* hívjuk.[24]
Értelmezhető minden $u \in H^2(\Omega)$ függvény *normális deriváltja* is a

$$\partial_\nu u := \sum_{i=1}^N \nu_i \gamma(\partial_i u)$$

képlet segítségével.[25]
A nyomtételből következik, hogy az $u \mapsto \partial_\nu u$ leképezés folytonos és lineáris $H^2(\Omega)$-ből $L^2(\Gamma)$-ba. Érvényes továbbá a következő parciális integrálási formula:

12.29. Állítás (Green [26])**.** *Ha* $u \in H^2(\Omega)$ *és* $v \in H^1(\Omega)$*, akkor*

$$\int_\Omega [(\Delta u)v + \nabla u \cdot \nabla v] \, dx = \int_\Gamma (\partial_\nu u) v \, d\Gamma.$$

[24] Laplace 1782, 1787.
[25] Sima függvényekre ez visszaadja a klasszikus fogalmat.
[26] Green 1828.

Bizonyítás. Alkalmazva a 12.20. Tételbeli azonosságot u helyett $\partial_j u$-ra, az

$$\int_\Omega (\partial_j^2 u)v + (\partial_j u)(\partial_j v)\, dx = \int_\Gamma (\partial_j u) v \nu_j \, d\Gamma$$

egyenlőségeket kapjuk minden $j = 1, \dots, N$-re. A keresett összefüggés ezeket összeadva és Δu, ∇u, $\partial_\nu u$ definícióját felhasználva adódik. $\square$

12.5. A $H^1(\Omega)'$ és $H^{-1}(\Omega)$ duális terek

Ha $\varphi : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál, akkor ennek a $H^1(\Omega)$-ra vett $\varphi|_{H^1(\Omega)} : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ leszűkítése $H^1(\Omega)$ normájára nézve is folytonos, mert

$$|\varphi(u)| \le \|\varphi\| \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \le \|\varphi\| \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra, úgyhogy

$$\left\|\varphi|_{H^1(\Omega)}\right\| \le \|\varphi\|$$

minden $\varphi \in L^2(\Omega)'$-ra.
Következésképpen az $i\varphi := \varphi|_{H^1(\Omega)}$ képlet egy folytonos lineáris $i: L^2(\Omega)' \to H^1(\Omega)'$ leképezést definiál.
Ez a lineáris leképezés injektív. Ha ugyanis $i\varphi = 0$, vagyis ha $\varphi = 0$ $H^1(\Omega)$-n, akkor $\varphi = 0$ $L^2(\Omega)$-n is, mert a φ függvény folytonos, és $H^1(\Omega)$ sűrű $L^2(\Omega)$-ban. (A sűrűség az $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ algebrai inklúziókból és $C_0^\infty(\Omega)$-nak az $L^2(\Omega)$-beli sűrűségéből adódik.)
A fentiek alapján azonosíthatjuk φ-t $i\varphi$-vel, és $L^2(\Omega)'$-t a $H^1(\Omega)'$ duális tér lineáris alterének tekinthetjük.
Emlékeztetünk arra is, hogy a Riesz–Fréchet-tétel szerint azonosíthatjuk az $L^2(\Omega)$ és $L^2(\Omega)'$ tereket is, ha azonosítunk minden $f \in L^2(\Omega)$ függvényt a

$$(Tf)(u) := \int_\Omega fu\, dx, \quad u \in L^2(\Omega)$$

képlettel értelmezett $Tf \in L^2(\Omega)'$ folytonos lineáris funkcionállal.
A két azonosítást kombinálva a

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega)' \subset H^1(\Omega)'$$

inklúziókat kapjuk.
Ha az előző gondolatmenetben a $H^1(\Omega)$ és $H^1(\Omega)'$ tereket a $H_0^1(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)'$ terekkel helyettesíthetjük, akkor a szokásos

$$H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)'$$

jelöléssel[27] élve a

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \equiv L^2(\Omega)' \subset H^{-1}(\Omega)$$

inklúziókhoz jutunk.

12.30. *Történeti megjegyzés.* A disztribúcióelméletről szóló fejezet bevezetőjében említettük, hogy az általánosított derivált fogalmát és az arra épülő, a fentiekben ismertetett tereket Szergej Lvovics Szoboljev vezette be az 1935-36-os években. A történeti hűséghez hozzátarozik, hogy őt megelőzően már az 1900-as évek elejétől kezdődően sok helyen felbukkant az általánosított derivált és a hozzá kapcsolódó fogalmak gondolata, az alábbiakban röviden vázoljuk a kialakulás menetét.

A derivált általánosításának fő motivációja a Dirichlet-elv (lásd a 7.3.3. szakaszt) matematikai vizsgálata volt. Ebben fontos szerepet töltött be az akkori olasz matematikai analízis iskola: Beppo Levi (1875–1961), Guido Fubini (1879–1943) és Leonida Tonelli (1885–1946). Különösen a többváltozós abszolút folytonos függvényekkel kapcsolatos munkáik kiemelkedőek, ezek közül több a későbbi általános eredmények speciális esete. Az abszolút folytonosság fogalma egy dimenzióban Giuseppe Vitalitól (1875–1932) származik, amelyről ismert, hogy ekvivalens a m.m. differenciálhatósággal és a derivált integrálhatóságával. Az egydimenziós $W^{1,p}(a,b)$ Szoboljev-terek pont az abszolút folytonos függvények terei lesznek.

Az olasz iskola mellett a göttingeni (később Amerikába kivándorolt) Richard Courant (1888–1972), David Hilbert (1862–1943), és az ugyancsak Amerikába kivándorolt Kurt Otto Friedrichs (1901–1982) is fontos szerepet játszottak a funkcionálanalízis, kiváltképp a variációs módszerek parciális differenciálegyenletek elméletében való alkalmazásában. Ezenkívül meg kell említenünk Franz Rellich (1906–1955) nevét, aki az első kompakt beágyazási tételt bizonyította 1930-ban, lásd a 12.16. Tételt (természetesen akkor még nem Szoboljev-terekkel megfogalmazva).

Beppo Levi eredményeit továbbfejlesztve jelentős lépést tett meg a Szoboljev-terek irányában Otton Marcin Nikodým (1887–1974) lengyel matematikus, akinek nevét őrzi a közismert a Radon–Nikodým-deriváltról szóló tétel. Nikodým úgynevezett Beppo Levi-féle függvényeket vizsgált, amelyek valójában a későbbi $H^1(\Omega)$ tereknek feleltek meg.

Az általánosított megoldás fogalmát Szoboljevet megelőzően már Jean Leray (1906–1998) francia matematikus a Navier–Stokes-egyenletek kapcsán értelmezte, a kvázimegoldás elnevezést használva, és a megoldások terének a későbbi $H^1(\Omega)$ teret választva.

Végül az amerikai iskolát kell megemlítenünk: Griffith Conrad Evans (1887–1973) és Charles Bradfield Morrey (1908–1984), akik Szoboljevtől függetlenül

[27] Schwartz 1952.

bevezették a későbbi $W^{1,p}(\Omega)$ teret, és vizsgálták e térbeli függvények tulajdonságait.
A fentiek alapján világos tehát, hogy az általánosított derivált, valamint az erre épülő terek fogalma nem köthető pusztán egyetlen személyhez, az valójában egy sereg matematikus munkájának köszönhetően alakult ki mai formájára. Ennek megfelelően sokáig nem is Szoboljev nevével azonosították ezeket a tereket, hanem olasz és francia nyelvterületen Beppo Levi-féle függvényterekről beszéltek. Azonban Beppo Levi számára idős korában kissé ellenszenvessé vált a „modern" matematika, és nem szívesen látta a nevét ilyen dolgokkal összefüggésben. Ezért a térnek új nevet kellett adni, a választás Szoboljev nevére esett, aki nem ellenkezett, így lett ma széles körben elfogadott a Szoboljev-tér elnevezés.
Természetesen nemcsak az elnevezés, hanem a jelölés is sokáig változott, de Szoboljev 1950-es monográfiájában (lásd [84]) már szerepel a W_p^l jelölés. A Szoboljev-terek kialakulásának történetét bővebben lásd a [62] írásban.

12.6. Feladatok

12.1. Feladat. Az

$$u(x)^2 = \int_{-\infty}^{x} 2uu'\,dt \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}^2$$

azonosságból kiindulva mutassuk meg, hogy

$$\|u\|_\infty \le \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$$

minden $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$-re!

12.2. Feladat. Jelöljük $C_0(\mathbb{R})$-rel a $\lim_{\pm\infty} u = 0$ tulajdonságú folytonos $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények Banach-terét a $\|u\|_\infty$ normával!
Mutassuk meg, hogy $H^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$. Pontosabban, minden $u \in H^1(\mathbb{R})$ ekvivalenciaosztály tartalmaz pontosan egy $C_0(\mathbb{R})$-beli $\tilde{u}$ elemet, és $\|\tilde{u}\|_\infty \le$ $\le C\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$ valamilyen u-tól független $C > 0$ konstanssal.

A továbbiakban szisztematikusan a folytonos reprezentánst tekintjük, és $u \in$ $\in H^1(\mathbb{R})$ esetén $\tilde{u}$ helyett egyszerűen u-t írunk.

12.3. Feladat. Igazoljuk a Newton–Leibniz-formulát minden $u \in H^1(\mathbb{R})$-re:

$$\int_a^b u'\,dt = u(b) - u(a), \quad -\infty < a < b < \infty.$$

12.4. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $u \in H^1(\mathbb{R})$ és $u' = 0$ m.m., akkor $u = 0$.

12.5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $u, v \in H^1(\mathbb{R})$, akkor $uv \in H^1(\mathbb{R})$ és

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

12.6. Feladat. Igazoljuk, hogy a $H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ beágyazás nem kompakt!

12.7. Feladat. Mutassuk meg, hogy az abs *abszolútérték-függvény* leszűkítése $(-1,\ 1)$-re $H^1(-1,\ 1)$-be tartozik!

A következő feladatokban legyen $-\infty < a < b < \infty$.

12.8. Feladat. Az

$$u(x)^2 - u(y)^2 = \int_y^x 2uu'\,dt \le \|u\|^2_{H^1(a,b)}\,, \quad a < y < x < b$$

azonosságból kiindulva mutassuk meg, hogy

$$\|u\|^2_{L^\infty(a,b)} \le \|u\|^2_{H^1(a,b)} + \frac{1}{b-a}\,\|u\|^2_{L^2(a,b)}$$

minden $u \in C^\infty([a,b])$-re!

12.9. Feladat. Mutassuk meg, hogy $H^1(a,b) \subset C([a,b])$. Pontosabban, minden $u \in H^1(a,b)$ ekvivalenciaosztály tartalmaz pontosan egy $C([a,b])$-beli $\tilde{u}$ elemet. Vezessük le ebből, hogy az sgn *előjelfüggvény* leszűkítése $(-1,\ 1)$-re nem tartozik $H^1(-1,\ 1)$-be!

Ezentúl minden $u \in H^1(a,b)$-re $\tilde{u}$ helyett egyszerűen u-t írunk.

12.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy minden $u \in H^1(a,b)$ függvény Hölder-folytonos az $1/2$ együtthatóval; pontosabban

$$|u(x) - u(y)| \le \|u'\|_{L^2(a,b)} \cdot |x-y|^{1/2}$$

minden $x, y \in [a,b]$-re.

12.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha $1/2 < p < 1$, akkor az $u(x) := x^p$ függvény $H^1(0,1)$-beli, és nem Lipschitz-folytonos.

12.12. Feladat. Ha $u \in C^1([a,b])$, akkor $u \in H^1(a,b)$, és a Szoboljev-értelemben vett deriváltja megegyezik a klasszikus deriválttal.

A következő feladatban megmutatjuk, hogy általánosabban, ha $u \in C([a,b])$ szakaszonként folytonosan differenciálható, akkor $u \in H^1(a,b)$.

12.13. Feladat. Legyen $u \in C([a,b])$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, és tegyük fel, hogy az $u_j := u|_{[x_{i-1},x_i]}$ függvények $H^1([x_{i-1},x_i])$-hez tartoznak alkalmas $u_j' = g_j$ függvényekkel minden $i = 1,\ldots,n$-re. Mutassuk meg, hogy $u \in H^1(a,b)$, és $u' = u_j'$ m.m. $[x_{i-1},x_i]$-ben, $i = 1,\ldots,n$.

12.14. Feladat. Mutassuk meg, hogy a

$$(Pu)(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a-1; \\ u(a)(x-a+1), & \text{ha } a-1 < x < a; \\ u(x), & \text{ha } a < x < b; \\ u(b)(b+1-x), & \text{ha } b < x < b+1; \\ 0, & \text{ha } b+1 < x \end{cases}$$

képlet folytonos lineáris $P : H^1(a,b) \to H^1(\mathbb{R})$ kiterjesztési operátort definiál.

12.15. Feladat. Ha $a < c < b$, akkor a

$$\langle \delta_c, v \rangle := v(c)$$

képlettel értelmezett δ_c *Dirac-delta függvény* $H^{-1}(a,b)$-beli, de nem $L^2(a,b)$-beli.

12.16. Feladat. Legyen $0 \in \Omega$ és $\Omega^* := \Omega \setminus \{0\}$. Tegyük fel, hogy egy $u \in C^1(\Omega^*)$ függvény eleget tesz a következő feltételeknek:

- $\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \, dx < \infty$ (a klasszikus deriváltakkal),
- $\lim_{x\to 0} |x|^{N-1} u(x) = 0$.

Akkor $u \in H^1(\Omega)$ és $g_j = \partial_j u$ m.m., ahol $\partial_j u$ a klasszikus deriváltakat jelöli.

12.17. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\nabla |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{x}{|x|}$$

minden $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén!

A következő három feladatban legyen $\Omega = B_R(0)$ egy $0 < R < 1$ sugarú gömb $\mathbb{R}^N$-ben, $N \geq 2$.

12.18. Feladat. Legyen $N \geq 3$, $1 - \frac{N}{2} < \alpha < 0$, $u(x) = |x|^\alpha$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg, hogy

- $u \in H^1(\Omega)$, de $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$;
- $v \in H^1(\Omega)$ és $v \in L^\infty(\Omega)$, de $v \notin C(\Omega)$.

12.19. Feladat. Legyen $N \geq 3$, $u(x) = \ln\big|\ln |x|\big|$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg ugyanazokat a tulajdonságokat, mint az előző feladatban!

12.20. Feladat. Legyen $N = 2$, $0 < \beta < 1/2$, $u(x) = \big|\ln|x|\big|^{\beta}$ és $v(x) = \sin u(x)$. Mutassuk meg ugyanazokat a tulajdonságokat, mint az előző két feladatban.

12.21. Feladat. Igazoljuk a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség alábbi változatát: ha Ω összefüggő, akkor van olyan $c(\Omega) > 0$ konstans, hogy

$$c(\Omega) \int_{\Omega} u^2 \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \left| \int_{\Gamma} u \, dx \right|^2$$

minden $u \in H^1(\Omega)$-ra.

12.22. Feladat. Igazoljuk a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség alábbi, pontosabb formáját: ha $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ és $C = [0, a]^N$, akkor

$$\int_C |u|^2 \, dx \leq \frac{a^2}{4\pi^2} \int_C |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{a^N} \left| \int_C u \, dx \right|^2 .$$

13. fejezet

Elliptikus problémák

A természet jót nevet az integrálás nehézségein.

Pierre-Simon Laplace (1749–1827)

A fejezet tartalma. Értelmezzük elliptikus peremérték-feladatok gyenge megoldásainak fogalmát Dirichlet- és Neumann-féle peremfeltételek mellett, majd megvizsgáljuk a megoldások létezését és egyértelműségét.

Az eddigiekhez hasonlóan ebben a fejezetben is feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nem üres, *korlátos, C^∞-beli* nyílt halmaz, és a határát Γ-val jelöljük.

13.1. Dirichlet-feladat I

Tekintsük a következő problémát[1]:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{13.1}$$

Valamilyen „ésszerű” függvényosztályhoz tartozó, adott $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényhez keressük a feladatnak valamilyen másik „ésszerű” függvényosztályhoz tartozó $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ megoldását.
Ehhez a feladathoz jutunk például az elektrosztatikában, ha adva van egy elektromosan vezető felülettel határolt Ω tartományban valamilyen f sűrűségű tölteseloszlás, és meg kívánjuk határozni a töltések által indukált elektromos tér u potenciálját.
Az előző fejezet alapján természetesnek tűnik a megoldást $H^2(\Omega)$-ban keresni:

[1] Euler 1752, Laplace 1782 és 1787, Poisson 1813.

13.1. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ esetén a (13.1) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$ függvényt értünk, amelyik eleget tesz a (13.1) probléma első egyenletének Ω-ban, a másodiknak pedig a nyomtétel értelmében Γ-n.

A fizikai alkalmazásokban azonban f nem mindig $L^2(\Omega)$-beli. Abból a célból, hogy alkalmasabb megoldásfogalomhoz jussunk, szorozzuk meg a (13.1) probláma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$-beli függvénnyel, és integráljunk parciálisan Ω-ban. Felhasználva, hogy $v = 0$ Γ-n, az

$$\int_\Omega fv\,dx = \int_\Omega (-\Delta u)v\,dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int_\Gamma (\partial_\nu u)v\,d\Gamma = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$$

variációs egyenletet kapjuk, amelyet az

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = f(v) \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra} \tag{13.2}$$

alakban is írhatunk. Az utolsó egyenlőségnek $f \in L^2(\Omega)$ helyett $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén, és $u \in H^2(\Omega)$ helyett $u \in H^1(\Omega)$ esetén is értelme van. Figyelembe véve a peremfeltételt is, célszerűnek látszik tehát a megoldás következő, általánosabb definíciója:

13.2. Definíció. Adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (13.1) feladat *gyenge megoldásán*[2] olyan $u \in H_0^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (13.2) összefüggésnek.

A következő eredmény szerint ez a definíció elfogadható. Vezessük be az elegancia kedvéért $H_0^1(\Omega)$-ban az ekvivalens

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

euklideszi normát.[3]

13.3. Tétel. *Tetszőlegesen adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (13.1) feladatnak pontosan egy u gyenge megoldása van.*
Továbbá az $f \mapsto u$ leképezés izometrikus izomorfizmus $H^{-1}(\Omega)$ és $H_0^1(\Omega)$ között.

Bizonyítás. Elegendő alkalmaznunk a Riesz–Fréchet-tételt, hiszen a (13.2) egyenlet pontosan azt fejezi ki, hogy $u \in H_0^1(\Omega)$ reprezentálja $f \in H^{-1}(\Omega)$-t. $\square$

[2] Courant–Friedrichs–Lewy 1928, Leray 1934, Sobolev 1937, Schwartz 1952. Emeljük ki, hogy minden erős megoldás gyenge megoldás is.
[3] Lásd az 12.25. Állítást.

13.4. *Megjegyzések.*

- A tétel alapján a $\Delta : H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ Laplace-operátor $H_0^1(\Omega)$-ra vett leszűkítése kiterjeszthető egy $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ izometrikus izomorfizmussá. Az utóbbit szintén Δ-val szokás jelölni.

- Igazolható, hogy u pontosan akkor erős megoldás, ha $f \in L^2(\Omega)$. A bizonyítás könnyű az egydimenziós esetben: lényegében $H^2(\Omega)$ definíciójából következik, magasabb dimenzióban viszont nehezebb (és felhasználja Ω regularitását).[4] Érvényes alkalmas c konstanssal az

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

  becslés is.

13.2. Dirichlet-feladat II

Tekintsük most az általánosabb

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = g & \Gamma\text{-n} \end{cases} \tag{13.3}$$

feladatot, ahol $f : \Omega \to \mathbb{R}$ és $g : \Gamma \to \mathbb{R}$ adott függvények.

13.5. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $g \in L^2(\Gamma)$ esetén a (13.3) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$-t értünk, amelyik eleget tesz a (**??**) probléma első egyenletének $L^2(\Omega)$-ban, a másodiknak pedig a nyomtétel értelmében $L^2(\Gamma)$-ban.

Keressünk ismét egy gyengébb megoldásfogalmat. Ha u erős megoldás, akkor a (13.3) probléma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H_0^1(\Omega)$-beli függvénnyel megszorozva, majd parciálisan integrálva ugyanahhoz az

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = f(v) \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra} \tag{13.4}$$

variációs egyenlethez jutunk, mint az előző szakaszban.

13.6. Definíció. Adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ esetén a (13.3) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (13.4) egyenletnek, és amelyre $\gamma u = g$ $L^2(\Gamma)$-ban.

[4] Schwarz 1870, Neumann 1870, Poincaré 1890, Hilbert 1899, Lebesgue 1912.

Igazolható, hogy a $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ nyomleképezés *nem* szuperjektív, ezért vezessük be a képterére a következő jelölést[5]:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \big\{ \gamma u \ : \ u \in H^1(\Omega) \big\} .$$

A

$$\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf \Big\{ \|u\|_{H^1(\Omega)} \ : \ u \in H^1(\Omega) \quad \text{és} \quad \gamma u = g \Big\}$$

faktornormára nézve ez egy normált tér (sőt Hilbert-tér is).

13.7. Tétel. *Tetszőlegesen adott $f \in H^{-1}(\Omega)$ és $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ függvényekre a (13.3) problémának pontosan egy u gyenge megoldása van.*
Továbbá az $(f, g) \mapsto u$ képlettel definiált $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ lineáris leképezés folytonos.

A tétel második része szerint a megoldás folytonosan függ az adatoktól; ezt Hadamard nyomán úgy szokás kifejezni, hogy a feladat *korrekt kitűzésű.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy olyan $G \in H^1(\Omega)$ függvényt, amelyre $\gamma G = g$. Bevezetve a $z := u - G$ új ismeretlen függvényt, a feladatunk a következő alakot ölti: olyan $z \in H_0^1(\Omega)$ függvényt keresünk, hogy

$$\int_\Omega \nabla z \cdot \nabla v \ dx = f(v) - \int_\Omega \nabla G \cdot \nabla v \ dx$$

minden $v \in H_0^1(\Omega)$-ra.
Minthogy a

$$\varphi(v) := f(v) - \int_\Omega \nabla G \cdot \nabla v \ dx$$

képlet folytonos lineáris funkcionált definiál $H_0^1(\Omega)$-n, a megoldás létezése és egyértelműsége a korábbiakhoz hasonlóan adódik a Riesz–Fréchet-tétel alkalmazásával.
A bizonyítás a következő becslést is szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &\le \|z\|_{H^1(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)} \le \\ &\le c\big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla G\|_{L^2(\Omega)}\big) + \|G\|_{H^1(\Omega)} \le \\ &\le (c+1) \cdot \big(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)}\big). \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés infimumát képezve az összes olyan $G \in H^1(\Omega)$ függvényre, amelyre $\gamma G = g$, a Hadamard-tulajdonságot igazoló

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le (c+1) \cdot \big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\big)$$

egyenlőtlenséget kapjuk. □

[5] Az 1/2 kitevő használatát a Szoboljev-terek alternatív, a Fourier-transzformálton alapuló definíciója magyarázza meg: lásd Lions–Magenes 1968–1970.

13.8. *Megjegyzés.* Felhasználva Ω regularitását az is igazolható, hogy u pontosan akkor *erős* megoldás, ha

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{és} \quad g \in H^{3/2}(\Gamma) := \left\{ \gamma u \ : \ u \in H^2(\Omega) \right\}.$$

13.3. Neumann-feladat I

Tekintsük most az alábbi problémát:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega\text{-ban}, \\ \partial_\nu u = h & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{13.5}$$

Az u tagot bizonyos technikai nehézségek elkerülésére szerepeltetjük az első egyenletben: az u nélküli egyenletet a következő szakaszban tanulmányozzuk majd.

13.9. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (13.5) feladat *erős megoldásán* olyan $u \in H^2(\Omega)$-t értünk, amelyik eleget tesz a (13.1) probléma első egyenletének Ω-ban, a másodiknak pedig Γ-n.

Ha u erős megoldás, akkor a (13.5) probléma első egyenletét egy tetszőleges $v \in H^1(\Omega)$-beli függvénnyel megszorozva, majd parciálisan integrálva az

$$\begin{aligned} \int_\Omega fv \, dx &= \int_\Omega [(-\Delta u)v + uv] \, dx = \\ &= \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx - \int_\Gamma (\partial_\nu u) v \, d\Gamma = \\ &= \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx + \int_\Gamma hv \, d\Gamma \end{aligned}$$

egyenlőségeket kapjuk, vagyis

$$\int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v + uv] \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_\Gamma hv \, d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in H^1(\Omega)\text{-ra}. \tag{13.6}$$

Ez a szokásos módon a következő definícióhoz vezet:

13.10. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (13.5) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a (13.6) összefüggésnek.

13.11. *Megjegyzések.*

- A $\partial_\nu u = h$ peremfeltétel nem szerepel explicit módon a gyenge megoldás definíciójában. Valójában ott van elrejtve, hogy a Dirichlet-feladatoktól eltérően a $H_0^1(\Omega)$-beliek helyett tetszőleges $H^1(\Omega)$-beli tesztfüggvényeket szerepeltetünk a variációs egyenletben.

- Vizsgálhatnánk még általánosabb megoldásokat is tetszőleges $f\in H^1(\Omega)'$ és $h\in\left(H^{1/2}(\Gamma)\right)'$ adatokra, a (13.6) egyenlet jobb oldala helyére $f(v)+$ $+\,h(\gamma v)$-t írva.

13.12. Tétel. *Tetszőleges $f\in L^2(\Omega)$ és $h\in L^2(\Gamma)$ esetén a (13.5) problémának pontosan egy u gyenge megoldása van.*
Az $(f,h)\mapsto u$ képlettel definiált $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)\to H^1(\Omega)$ lineáris leképezés folytonos.

Bizonyítás. Jelöljük a (13.6) egyenlet jobb oldalát $\varphi(v)$-vel. Akkor $\varphi\in H^1(\Omega)'$, hiszen

$$\begin{aligned}|\varphi(v)| &\le \left|\int_\Omega fv\ dx\right| + \left|\int_\Gamma hv\ d\Gamma\right| \le\\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Gamma)}\cdot\|v\|_{L^2(\Gamma)} \le\\ &\le \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|\cdot\|h\|_{L^2(\Gamma)}\right)\cdot\|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

minden $v\in H^1(\Omega)$-ra. A Riesz–Fréchet-tétel szerint létezik tehát pontosan egy gyenge megoldás.
A 13.6 egyenletben $v=u$-t választva az

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2\ dx =\\ &= |\varphi(u)| \le\\ &\le \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|\cdot\|h\|_{L^2(\Gamma)}\right)\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}\,,\end{aligned}$$

egyenlőtlenséget, innen pedig a keresett

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|\cdot\|h\|_{L^2(\Gamma)}$$

becslést kapjuk. □

13.13. *Megjegyzés.* Bizonyítható, hogy u pontosan akkor erős megoldás, ha $f\in L^2(\Omega)$ és $h\in H^{1/2}(\Gamma)$.

13.4. Neumann-feladat II

Vizsgáljuk most a következő feladatot:

$$\begin{cases}-\Delta u = f & \Omega\text{-ban},\\ \partial_\nu u = h & \Gamma\text{-n}.\end{cases} \tag{13.7}$$

A szokásos módon kapjuk a következő definíciót:

13.14. Definíció. Adott $f \in L^2(\Omega)$ és $h \in L^2(\Gamma)$ esetén a (13.7) feladat *gyenge megoldásán* olyan $u \in H^1(\Omega)$ függvényt értünk, amely eleget tesz a következő feltételnek:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx = \int_\Omega fv \ dx + \int_\Gamma hv \ d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in H^1(\Omega)\text{-ra.} \tag{13.8}$$

Két új nehézség is felmerül. Először is, ha u megoldás, akkor $u+c$ is megoldás minden c konstansra, tehát a megoldás sosem egyértelmű. Másrészt, ha u megoldás, akkor a (13.8) összefüggésből a $v = 1$ választással az adott f, h függvényekre az

$$\int_\Omega f \ dx + \int_\Gamma h \ d\Gamma = 0 \tag{13.9}$$

kompatibilitási feltétel adódik (maga a megoldás itt nem szerepel). Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor a feladatunknak nincs megoldása.
A következő eredmény megvilágítja a helyzetet:

13.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω összefüggő*[6]*, és legyen $f \in L^2(\Omega)$, $h \in$ $\in L^2(\Gamma)$.*

(a) *Ha a (13.9) egyenlőség nem teljesül, akkor a (13.7) feladatnak nincs megoldása.*

(b) *Ha a (13.9) egyenlőség teljesül, akkor a (13.7) feladatnak végtelen sok megoldása van, amelyek egy tetszőleges additív konstansban különböznek egymástól.*

Bizonyítás. Az (a) pontot már igazoltuk. Tegyük fel ezentúl, hogy (13.9) teljesül, és vezessük be $H^1(\Omega)$-ban a

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ \int_\Omega v \ dx = 0 \right\}$$

lineáris alteret. Mint a folytonos lineáris $v \mapsto \int_\Omega v \ dx$ funkcionál magja, V zárt, és így maga is Hilbert-tér a $H^1(\Omega)$-ból örökölt skaláris szorzatra. Továbbá a Poincaré–Wirtinger-egyenlőtlenség (12.17. Állítás) alapján az

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx$$

képlet az eredetivel ekvivalens skaláris szorzatot értelmez V-ben. A továbbiakban tekintsük ezt a skaláris szorzatot.

[6] E feltevés hiányában Ω minden összefüggő komponenséhez tartozik egy kompatibilitási feltétel. A részleteket az olvasóra bízzuk.

A Riesz–Fréchet-tételt alkalmazva létezik pontosan egy olyan $u_0 \in V$ függvény, hogy

$$\int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx + \int_\Gamma hv \; d\Gamma \quad \text{minden} \quad v \in V\text{-re}. \tag{13.10}$$

A (13.9) kompatibilitási feltétel mutatja, hogy (13.10) minden v konstans függvényre is teljesül. Minthogy minden $v \in H^1(\Omega)$ függvény egyértelműen felírható $v = v_0 + c$ alakban[7], ahol $v_0 \in V$ és $c \in \mathbb{R}$, innen következik, hogy u_0 gyenge megoldás.
Korábban már láttuk, hogy ekkor az $u_0 + c$, $c \in \mathbb{R}$ függvények is mindig gyenge megoldások.
Legyen végül u egy tetszőleges gyenge megoldás, és írjuk u-t az $u_1 + c$ alakba, ahol $u_1 \in V$ és $c \in \mathbb{R}$. Akkor u_1 is gyenge megoldás, és így eleget tesz a (13.10) összefüggésnek. Az u_0 függvény egyértelműsége miatt innen $u_1 = u_0$, tehát u csak egy additív konstansban különbözik u_0-tól. □

13.5. A Laplace-operátor spektráltétele

Homogén Dirichlet-féle peremfeltétel esetén a Laplace-operátor a szimmetrikus mátrixokhoz hasonlóan diagonalizálható.[8] Ez lehetővé fogja tenni, hogy a következő fejezetben tárgyalásra kerülő végtelen dimenziós evolúciós problémákat egydimenziós közönséges differenciálegyenletek sorozatára redukáljuk.

13.16. Tétel.
(a) *Létezik olyan $L^2(\Omega)$-beli $w_1, w_2, \ldots$ ortonormált bázis és olyan, végtelenhez tartó $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ pozitív valós számsorozat, hogy minden egyes n-re $w_n \in$ $\in H_0^1(\Omega)$ és*

$$\int_\Omega \nabla w_n \cdot \nabla v \; dx = \lambda_n \int_\Omega w_n v \; dx \quad \textit{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\textit{-ra}. \tag{13.11}$$

(b) *A*

$$\frac{w_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

sorozat $H_0^1(\Omega)$ ortonormált bázisa az

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx$$

skaláris szorzatra nézve.

[7] Egyszerű számolással látható, hogy $v - c \in V \iff c = |\Omega|^{-1} \int v \; dx$, ahol $|\Omega|$ az Ω halmaz térfogatát jelöli.
[8] Schwarz 1885, Picard 1893, Poincaré 1894.

13.17. *Megjegyzések.*

- Figyeljük meg, hogy w_n a (13.1) Dirichlet-feladat megoldása $f = \lambda_n w_n$-re:
$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda_n w_n & \Omega\text{-ban}, \\ w_n = 0 & \Gamma\text{-n}. \end{cases} \tag{13.12}$$
Azt mondjuk, hogy a λ_n számok $-\Delta$ (Dirichlet-peremfeltételhez tartozó) sajátértékei, és a w_n függvények a megfelelő sajátfüggvények.

- Megmutatható, hogy $w_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$. A Green-formula alkalmazásával ekkor a (13.12) összefüggésből levezethető, hogy
$$\int_\Omega (\Delta w_n + \lambda_n w_n) v \; dx = 0 \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra},$$
és innen $\Delta w_n + \lambda_n w_n = 0$ m.m. Minthogy a bal oldal folytonos, az egyenlőség mindenütt teljesül: w_n klasszikus értelemben is megoldása a (13.12) egyenlőségnek.

- A legegyszerűbb egydimenziós $\Omega = (0, \pi)$ esetben $w_n(x) = \sqrt{2/\pi} \sin nx$ és $\lambda_n = n^2$.[9]

Bizonyítás.
(a) Tetszőleges $f \in L^2(\Omega)$-ra jelöljük Tf-fel a
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & \Gamma\text{-n} \end{cases}$$
Dirichlet-probléma gyenge megoldását: Tf-et tehát a $Tf \in H_0^1(\Omega)$ és
$$\int_\Omega \nabla(Tf) \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega fv \; dx \quad \text{minden} \quad v \in H_0^1(\Omega)\text{-ra} \tag{13.13}$$
tulajdonságok karakterizálják.
A 13.3. Tétel szerint $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ folytonos lineáris, injektív leképezés. Minthogy Rellich tétele szerint a kanonikus $i : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ beágyazás kompakt, $i \circ T$ kompakt operátor $L^2(\Omega)$-ban.
Az $i \circ T$ operátor szimmetrikus is, vagyis
$$((i \circ T)f, g)_{L^2(\Omega)} = (f, (i \circ T)g)_{L^2(\Omega)}$$
minden $f, g \in L^2(\Omega)$-re, hiszen a (13.13) összefüggésből adódik, hogy
$$(f, (i \circ T)g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(Tg) \; dx = \int_\Omega \nabla(Tf) \cdot \nabla(Tg) \; dx$$

[9] A sajátfüggvények előjeltől eltekintve egyértelműek.

és
$$((i \circ T)f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega g(Tf)\ dx = \int_\Omega \nabla(Tg) \cdot \nabla(Tf)\ dx.$$
Alkalmazva $i \circ T$-re az absztrakt spektráltételt (lásd [46]), létezik olyan $L^2(\Omega)$-beli $w_1, w_2, \dots$ ortonormált bázis és olyan $\mu_1, \mu_2, \dots$ valós számsorozat, hogy $\mu_n \to 0$, és $Tw_n = \mu_n w_n$ minden n-re.
Minthogy T injektív, $\mu_n \neq 0$ minden n-re. Ekkor a $w_n = \frac{1}{\mu_n} T w_n$ egyenlőségből következik, hogy $w_n \in H_0^1(\Omega)$ minden n-re.
Alkalmazva a (13.13) összefüggést $f = v = w_n$-nel az
$$\mu_n \int_\Omega |\nabla w_n|^2\ dx = \int_\Omega \nabla(\mu_n w_n) \cdot \nabla w_n\ dx = \int_\Omega |w_n|^2\ dx = 1$$
egyenlőség adódik, és innen $\mu_n > 0$ minden n-re.
Az eddigiek alapján a $\lambda_n := 1/\mu_n$ számok értelmezve vannak, pozitívak és végtelenhez tartanak. Végül alkalmazva a (13.13) összefüggést az $f = \lambda_n w_n$ és $Tf = w_n$ szereposztással a (13.11) tulajdonság is adódik.

(b) A $H_0^1(\Omega)$-beli ortonormalitás a (13.11) tulajdonságból adódik a $v = w_k$ választással. A teljességhez jegyezzük meg, hogy ha v ortogonális erre a sorozatra $H_0^1(\Omega)$-ban, akkor (13.11) alapján $L^2(\Omega)$-ben is ortogonális rá, hiszen $\lambda_n \neq 0$ minden n-re, és így $v = 0$ az (a) pontbeli teljesség miatt. □

13.6. Feladatok

13.1. Feladat. Tekintsük a
$$\begin{cases} -u'' = f & (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{13.14}$$
Dirichlet-feladatot. Emlékeztetünk rá, hogy bármely $f \in H^{-1}(a,b)$ esetén létezik pontosan egy $u \in H^1(a,b)$ megoldás. Mutassuk meg, hogy ha $f \in$ $\in L^2(a,b)$, akkor $u \in H^2(a,b)$.

13.2. Feladat. Adjunk explicit képletet (13.14) megoldására $f \in C([a,b])$ esetén!

13.3. Feladat. Adjunk explicit képletet (13.14) megoldására, ha $f = \delta_c$ valamely $a < c < b$ pontra!

13.4. Feladat. Oldjuk meg a következő problémát:
$$\begin{cases} -u'' + u = f & (a,b)\text{-ben}, \\ u'(a) = u(a) \quad \text{és} \quad u(b) = 0. \end{cases}$$

13.5. Feladat. Oldjuk meg a következő problémát:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) \quad \text{és} \quad u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

13.6. Feladat. Legyen adva $p \in C^1([a,b])$ és $q, r \in C([a,b])$, továbbá tegyük fel, hogy $\min p > 0$. Oldjuk meg az alábbi feladatot alkalmas további p, q, r-re vonatkozó feltételek mellett:

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f \quad (a,b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

14. fejezet

Evolúciós problémák

Fourier nagyszerű matematikai költeménye.

William Thomson (Lord Kelvin) (1824–1907)[1]

A fejezet tartalma. Értelmezzük vegyes feladatok gyenge megoldásainak fogalmát, majd megvizsgáljuk a megoldások tulajdonságait.

Továbbra is feltesszük, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ nem üres, *korlátos,* C^∞*-beli* nyílt halmaz, és a határát Γ-val jelöljük.
Ebben a fejezetben olyan $N+1$ változós $u(t,x)$ függvényeket fogunk vizsgálni, ahol $t \in \mathbb{R}$ az *időt*, $x \in \mathbb{R}^N$ pedig a térbeli pozíciót jelöli. Az idő szerinti $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ deriváltak helyett röviden u'-t és u''-t írunk, a nabla- és Laplace-operátorokat pedig csak a térbeli változókra alkalmazzuk:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right), \quad \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Az idő- és térváltozók eltérő szerepe miatt gyakran célszerű lesz $u(t,x)$-et $u(t)(x)$ formában tekinteni, vagyis úgy képzelni, hogy minden egyes t-re $u(t)$ az x változó függvénye.

[1] Joseph Fourier A hővezetés analitikus elmélete című munkájára hivatkozva.

14.1. Hővezetési egyenlet

Tekintsük a következő feladatot [2]:

$$\begin{cases} u' - \Delta u = 0 & (0, \infty) \times \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & [0, \infty) \times \Gamma\text{-n}, \\ u(0) = v & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{14.1}$$

14.1. *Megjegyzés.* Az 5. fejezetben láttuk, hogy ha az $N = 3$ esetben $u(t, x)$ jelöli egy Ω háromdimeziós test x pontjának a hőmérsékletét a t időpontban, továbbá a test határán állandóan nulla fok a hőmérséklet (például jégbe van helyezve), és a $t = 0$ időpontban a test pontjainak a hőmérséklete $u(0, x) = v(x)$, akkor a (14.1) feladat megoldása megadja a test pontjainak a hőmérsékletét bármely $t > 0$ időpontban.

Kezdjük egy formális okoskodással. Alkalmazva a 13.16. spektráltételt, rögzítsünk egy $L^2(\Omega)$-beli (w_n) ortonormált bázist. Legyen u megoldása a (14.1) feladatnak, és fejtsük (w_n) szerinti Fourier-sorba a v és $u(t)$ függvényeket:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j, \tag{14.2}$$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) w_j, \quad t \ge 0.$$

Az $u(0) = v$ *kezdeti feltételből* következik, hogy $u_j(0) = \alpha_j$ minden j-re. Továbbá megszorozva a differenciálegyenletet w_k-val, parciálisan integrálva Ω-n, és felhasználva az $u = 0$ *peremfeltételt*, a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (u'(t) - \Delta u(t)) w_k \, dx = \\ &= \int_\Omega u'(t) w_k + \nabla u(t) \cdot \nabla w_k \, dx = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j'(t) \left(\int_\Omega w_j w_k \, dx \right) + u_j(t) \left(\int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_k \, dx \right) = \\ &= u_k'(t) + \lambda_k u_k(t). \end{aligned}$$

Innen $u_k(t) = u_k(0) e^{-\lambda_k t} = \alpha_k e^{-\lambda_k t}$, és így

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{-\lambda_j t} w_j \tag{14.3}$$

adódik. Kézenfekvő tehát a következő

[2] Fourier 1807, 1822.

14.2. Definíció. A (14.1) feladat $u : [0, \infty) \to L^2(\Omega)$ gyenge megoldását a (14.2) és (14.3) képletekkel értelmezzük.

14.3. Tétel.

(a) *Tetszőlegesen adott $v \in L^2(\Omega)$ esetén létezik pontosan egy $u : [0, \infty) \to L^2(\Omega)$ megoldása a (14.1) problémának. A megoldás folytonos.*

(b) *A $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}$ függvény monoton fogyó.*

(c) *$u(t) \in H_0^1(\Omega)$ minden $t > 0$-ra.*

Bizonyítás. Hangsúlyozzuk, hogy a megoldás folytonossága nem a klasszikus értelemben a (t, x) változókban értendő, hanem mint $[0, \infty) \to L^2(\Omega)$ függvény.
(a) A megoldás unicitása magából a definícióból következik. A létezéshez megmutatjuk, hogy a (14.3) sorok minden egyes $t \geq 0$-ra konvergálnak valamilyen $u(t) \in L^2(\Omega)$ függvényhez. Ortogonális sorokról lévén szó, elég megmutatnunk, hogy a $\sum \left|\alpha_j e^{-\lambda_j t}\right|^2$ numerikus sorok konvergálnak. Minthogy $\lambda_j > 0$ minden j-re és $v \in L^2(\Omega)$, a Parseval-egyenlőség felhasználásával

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\alpha_j e^{-\lambda_j t}\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty$$

minden $t \geq 0$-ra.
A fenti becslés t-ben egyenletes. Minthogy a (14.3) sor részletösszegei nyilvánvalóan folytonosak t-ben, az egyenletes konvergencia miatt az u összegfüggvény is folytonos.
(b) Minthogy $\lambda_j > 0$ minden j-re, $0 \leq s \leq t$ esetén

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 e^{-2\lambda_j t} \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 e^{-2\lambda_j s} = \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

is teljesül.
(c) Elegendő megmutatnunk, hogy a (14.3) sorok $H_0^1(\Omega)$-ban is konvergálnak minden rögzített $t > 0$-ra. Mivel a w_j függvények a 13.16. Tétel (b) része szerint $H_0^1(\Omega)$-ban is ortogonálisak, elég megmutatnunk, hogy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|\alpha_j e^{-\lambda_j t} w_j\right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 < \infty.$$

Ez közvetlen számolással adódik, felhasználva, hogy az $s \mapsto se^{-s}$ függvénynek $[0, \infty)$-ben véges M felső korlátja van[3]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \alpha_j e^{-\lambda_j t} w_j \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 e^{-2\lambda_j t} \lambda_j \le$$
$$\le \frac{M}{2t} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 = \frac{M}{2t} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 < \infty. \qquad \square$$

14.4. *Megjegyzések.*

- A hővezetési feladat korrekt kitűzésű, hiszen (b) miatt a $v \mapsto u$ lineáris leképezés folytonos $L^2(\Omega)$-ból $C_b([0, \infty); L^2(\Omega))$-ba, ahol $C_b([0, \infty); L^2(\Omega))$ jelöli az $[0, \infty) \to L^2(\Omega)$ folytonos és korlátos függvények osztályát.
- Hangsúlyozzuk, hogy $t > 0$-ra $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ akkor is teljesül, ha $u(0) = v \notin H_0^1(\Omega)$. Ez a *regularizálási effektus* szorosan kapcsolódik a hővezetés időbeli *irreverzibilitásához.*
- Megmutatható, hogy $u(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ minden $t > 0$-ra, sőt
$$u \in C^\infty((0, \infty) \times \overline{\Omega}).$$
- Igazolható a következő *minimum-elv* (lásd részletesen a 8.4. szakaszt): ha v nem azonosan nulla, de $v \ge 0$ m.m. Ω-ban, akkor $u > 0$ mindenütt $(0, \infty) \times \Omega$-ban.[4]
- Az előző tulajdonság azt is mutatja (lásd még a 8.22. Megjegyzést is), hogy a hővezetésnek ebben a modelljében *végtelen* a terjedési sebesség: ha $v = u(0) \ge 0$ csak egy Ω egy kis részében tér is el nullától, akkor $u(t) > 0$ Ω minden pontjában, minden $t > 0$-ra.

14.2. Hullámegyenlet

Tekintsük most a következő feladatot [5]:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \mathbb{R} \times \Omega\text{-ban}, \\ u = 0 & \mathbb{R} \times \Gamma\text{-n}, \\ u(0) = v \quad \text{és} \quad u'(0) = z & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{14.4}$$

[3] Vegyük észre, hogy ez egy folytonos függvény, amely a végtelenben nullához tart. A maximum $M = 1/e$ egyébként az $s = 1$ pontban vétetik fel.
[4] u helyett $-u$-t tekintve látható, hogy érvényes az analóg *maximum-elv* is.
[5] Taylor 1715, d'Alembert 1747, Euler 1750, D. Bernoulli 1753, Euler 1760.

14.5. Példa. Az 5. fejezetben láttuk, hogy ha $u(t,x)$ jelöli egy Ω alaphelyzetű rezgő membrán x pontjának transzverzális kitérését a t időpontban, továbbá a membrán határa rögzítve van, és ismeretes a $t=0$ időpontban a membrán pontjainak a $v(x)$ kitérése és $z(x)$ pillanatnyi sebessége, akkor a (14.4) feladat megoldása megadja a membrán helyzetét bármely más időpontban is.

Kezdjük ismét egy formális számolással. A 13.16. spektráltételt alkalmazva rögzítsünk megint egy $L^2(\Omega)$-beli (w_n) ortonormált bázist. Legyen u megoldása a (14.4) feladatnak, és fejtsük (w_n) szerinti Fourier-sorba a v, z és $u(t)$ függvényeket:

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j w_j, \quad z = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j w_u, \tag{14.5}$$

és

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) w_j, \quad t \geq 0.$$

Az $u(0) = v$ és $u'(0) = z$ *kezdeti feltételekből* adódik, hogy $u_j(0) = \alpha_j$ és $u_j'(0) = \beta_j$ minden j-re. Továbbá megszorozva a differenciálegyenletet w_k-val, parciálisan integrálva Ω-n, és felhasználva az $u = 0$ *peremfeltételt*, a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega (u''(t) - \Delta u(t)) w_k \, dx = \\
&= \int_\Omega u''(t) w_k + \nabla u(t) \cdot \nabla w_k \, dx = \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} u_j''(t) \left(\int_\Omega w_j w_k \, dx \right) + u_j(t) \left(\int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla w_k \, dx \right) = \\
&= u_k''(t) + \lambda_k u_k(t).
\end{aligned}$$

A rövidség kedvéért $\mu_k := \sqrt{\lambda_k}$-t írva innen

$$u_k(t) = u_k(0) \cos \mu_k t + u_k'(0) \frac{\sin \mu_k t}{\mu_k} = \alpha_k \cos \mu_k t + \beta_k \frac{\sin \mu_k t}{\mu_k},$$

és végül

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_j \cos \mu_j t + \beta_j \frac{\sin \mu_j t}{\mu_j} \right) w_j. \tag{14.6}$$

A fenti okoskodás a következő definícióhoz vezet:

14.6. Definíció. A (14.4) feladat megoldását a (14.5) és (14.6) képletekkel értelmezzük.

14.7. Tétel.

(a) *Tetszőlegesen adott $v \in H_0^1(\Omega)$ és $z \in L^2(\Omega)$ esetén létezik pontosan egy $u : \mathbb{R} \to L^2(\Omega)$ megoldása a (14.4) feladatnak. A megoldás folytonosan differenciálható.*

(b) *$u(t) \in H_0^1(\Omega)$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, és az $u : \mathbb{R} \to H_0^1(\Omega)$ függvény folytonos.*

(c) *A megoldás* energiája, *amelyet az*

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

képlettel értelmezünk, valójában nem függ t-től.

Bizonyítás. (a) és (b). A megoldás unicitása a definícióból következik. A létezéshez és a folytonos differenciálhatósághoz elegendő megmutatnunk, hogy a (14.6) sor és az annak tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-\alpha_j \mu_j \sin \mu_j t + \beta_j \cos \mu_j t)\, w_j \tag{14.7}$$

sor t-ben egyenletesen konvergál $L^2(\Omega)$-ban. Ebből ugyanis következik, hogy a sorok u, w összegfüggvényei folytonosak, és hogy $u' = w$.[6]
Ennél valamivel többet igazolunk: megmutatjuk, hogy a (14.6) sor egyenletesen konvergál $H_0^1(\Omega)$-ban is. Ez igazolni fogja (b)-t is.
Ortogonális sorokról lévén szó, elég megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \alpha_k \cos \mu_k t + \beta_k \frac{\sin \mu_k t}{\mu_k} \right\|^2 \cdot \|w_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} < \infty$$

és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|-\alpha_k \mu_k \sin \mu_k t + \beta_k \cos \mu_k t\|^2 \cdot \|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

[6] A bizonyítás a valós értékű függvénysorok deriválásáról szóló klasszikus tétel bizonyításának egyszerű adaptációja.

Ez a következő számolással adódik, ahol a Parseval-egyenlőséget alkalmazzuk, majd felhasználjuk, hogy

$$v \in H_0^1(\Omega), \quad z \in L^2(\Omega), \quad \|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{és} \quad \|w_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \mu_k^2 = \lambda_k :$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \alpha_k \cos \mu_k t + \beta_k \frac{\sin \mu_k t}{\mu_k} \right\|^2 \cdot \|w_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} \|-\alpha_k \mu_k \sin \mu_k t + \beta_k \cos \mu_k t\|^2 \cdot \|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \|\alpha_k \mu_k \cos \mu_k t + \beta_k \sin \mu_k t\|^2 + \|-\alpha_k \mu_k \sin \mu_k t + \beta_k \cos \mu_k t\|^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 = \\
&= \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|z\|^2_{L^2(\Omega)} < \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(c) Elegendő észrevennünk, hogy az előző számolás elején álló kifejezés a Parseval-egyenlőség, és (14.6), (14.7) szerint a

$$2E(t) = \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

kifejezéssel egyenlő. □

14.8. *Megjegyzések.*

- Az *energiamegmaradás* törvénye azt is mutatja, hogy a (14.4) feladat korrekt felállítású a következő értelemben: a $(v, z) \mapsto (u, u')$ lineáris leképezés folytonos $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$-ból $C_b(\mathbb{R}\,; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$-ba.

- Ha $u(t, x)$ a hullámegyenlet megoldása, akkor a

$$v(t, x) := u(-t, x)$$

  képlet is megoldást szolgáltat (más kezdeti adatokkal). Ebből az idő szerinti *reverzibilitásból* következik, hogy a hullámegyenletben nincs a hővezetési egyenlethez hasonló regularitási effektus.

- Legyen ω egy tetszőlegesen kis nyílt részhalmaza Ω-nak, és vezessük be minden $t \in \mathbb{R}$-re az

$$\omega_t := \{x \in \Omega \ : \ \text{dist}\,(x, \omega) < |t|\}$$

halmazt. Megmutatható (lásd még a 10.7. Következményt), hogy ha (14.4) két (különböző kezdeti adatpárhoz tartozó) megoldása megegyezik ω-n kívül a $t = 0$ időpontban, akkor minden egyes $t \in \mathbb{R}$ időpontban megegyeznek ω_t-n kívül. Szemléletesen a kezdeti adatok változtatása *véges* (itt egységnyi) *sebességgel terjed.*

15. fejezet

Útmutatások, megoldások

15.1. Megoldások a 9. fejezet feladataihoz

Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal.

Pólya György (1887–1985)

9.1. Megoldás. Amint azt a 3.12. Példában láttuk, $\eta_{a,r}$ kompakt tartójú, valamint $\eta_{a,r} = h \circ g$, ahol $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, amelyre

$$h(t) := \begin{cases} \exp(-1/t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \end{cases}$$

továbbá $g(x) = r^2 - |x - a|^2$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Nyilvánvalóan $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ és $h \in C^\infty(\mathbb{R}^-)$, így elég belátni, hogy h minden deriváltja folytonosan kiterjed a 0-ra, mert ekkor a kompozíciófüggvényre $\eta_{a,r} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ehhez megmutatjuk, hogy $h^{(j)}(t) = e^{-1/t} P_j(\frac{1}{t})$, ahol P_j polinom. Az összefüggés $j = 0$-ra nyilvánvaló, és ha j-re teljesül, akkor $r > 0$ esetén

$$\begin{aligned} h^{(j+1)}(t) &= \left(e^{-1/t} P_j\left(\frac{1}{t}\right)\right)' = \frac{-e^{-1/t}}{t^2} P_j\left(\frac{1}{t}\right) + e^{-1/t} \frac{-P_j'\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} = \\ &= e^{-1/t} \frac{-1}{t^2}\left(P_j\left(\frac{1}{t}\right) + P_j'\left(\frac{1}{t}\right)\right) = e^{-1/t} P_{j+1}\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

A klasszikus analízisből jól ismert $x^k/a^x \xrightarrow{x \to \infty} 0$ $(a > 1)$ határértéket felhasználva $h^{(j)}(r) \xrightarrow{t \to 0} 0$, így $h^{(j)} \in C(\mathbb{R}_0^+)$ minden $j = 0,1,\ldots$ esetén, tehát $h \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+)$.

9.2. Megoldás. Mivel Ω nyílt, ezért van olyan $0 < r < 1$ szám, amelyre $B(a,r) \subset \Omega$. Legyen $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ és tekintsük a $\psi(x) = p \cdot (x_1 - a_1)^{\alpha_1}(x_2 - a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n}$ függvényt, ahol a p paraméter értékét később határozzuk meg. Ekkor minden $\beta \neq \alpha$ multiindexre $\partial^\beta \psi(a) = 0$, továbbá $\partial^\alpha \psi(a) = p \prod_{\alpha_j \neq 0} (\alpha_j!)$, amelyről azt szeretnénk, hogy c legyen, így ebből a p paraméter értéke egyértelműen adódik. Már csak annyit kell tenni, hogy veszünk egy olyan $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ függvényt, amelyre $\eta = 1$ a $B(a,r)$ gömb egy nyílt környezetében (ilyen a 3.22. Állítás alapján van), és ekkor a $\varphi := \eta\psi$ függvényre $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, valamint $\partial^\beta(\eta\psi)(a) = \partial^\beta\psi(a)$.
Legyen φ az előbbi konstrukcióval nyert (nem azonosan 0) függvény, és definiáljuk az $M >$ számot a következőképpen:

$$M := \max_{|\beta| < |\alpha|} \sup_\Omega |\partial^\beta \varphi|.$$

Ha $M \leq 1$, akkor készen vagyunk, ellenkező esetben értelmezzük a $\tilde\varphi$ függvényt a $\tilde\varphi(x) := \varphi(a + M(x-a))/(M^{|\alpha|})$ hozzárendeléssel. Ekkor minden $|\beta| < |\alpha|$ multiindexre $|\partial^\beta \tilde\varphi| = |\partial^\beta \varphi|/(M^{|\alpha|-|\beta|} \leq 1$ (hiszen $M > 1$), valamint $\partial^\alpha \tilde\varphi(a) = \varphi(a) = c$. Még gondoljuk meg, hogy $M > 1$ miatt $\operatorname{supp} \tilde\varphi \subset \subset B(a, r/M) \subset B(a,r) \subset \Omega$. Mindezek alapján a $\tilde\varphi$ függvény megfelel a feladat második részében kirótt feltételeknek.

9.3. Megoldás.
a) Nyilván $\operatorname{supp} \varphi_j = \operatorname{supp} \varphi$ minden j-re, továbbá minden α multiindex esetén teljesül, hogy $|\partial^\alpha \varphi_j(x)| = |\partial^\alpha \varphi(x)|/j \leq \sup_\Omega |\partial^\alpha \varphi|/j \to 0$, vagyis $\partial^\alpha \varphi_j \to 0$ egyenletesen Ω-n. Következésképpen $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} 0$.
b) Vegyük észre, hogy $\operatorname{supp}(x \mapsto \varphi(x/j)/j)$ origó középpontú j-szeres nagyítással kapható $\operatorname{supp}\varphi$-ből, így $\operatorname{supp}\varphi \neq \emptyset$ esetén nem létezik K kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K$. Ebből következően a (φ_j) sorozat nem konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben, kivéve a $\varphi = 0$ esetet.
c) Most $\operatorname{supp}(x \mapsto \varphi(jx)/j)$ origó középpontú $1/j$-szeres kicsinyítéssel nyerhető $\operatorname{supp}\varphi$-ből, ezért ha $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,R)$, akkor $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(0,R)$ minden j-re. Ezenkívül $|\varphi_j(x)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi|/j \to 0$, ezért $\varphi_j \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}^n$-en. Azonban például $|\alpha| = 1$ mellett $\sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_j| = \sup_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi|$ csak akkor tart a 0-hoz $j \to \infty$ esetén, ha $\partial^\alpha \varphi = 0$. Következésképpen φ konstans függvény, és mivel kompakt tartójú, ezért csak az azonosan nulla függvény lehet. A (φ_j) sorozat tehát csak a triviális $\varphi = 0$ esetben konvergens $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$-ben.

9.4. Megoldás. A válasz: igen. Valóban, a $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}(\Omega)} \varphi$ konvergencia miatt létezik $K \subset \Omega$ kompakt halmaz, amelyre $\operatorname{supp}(\varphi_j\psi_j) \subset \operatorname{supp}\varphi_j \subset K$. Másrészt minden α multiindexre a Leibniz-szabályból következően

$$\partial^\alpha(\varphi_j\psi_j) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta \varphi_j)(\partial^{\alpha-\beta}\psi_j),$$

és mivel (a klasszikus analízisből jól ismert módon) egyenletesen konvergens függvénysorozatok szorzata is egyenletesen konvergens, ezért

$$(\partial^\beta \varphi_j)(\partial^{\alpha-\beta}\psi_j) \to (\partial^\beta \varphi)(\partial^{\alpha-\beta}\psi),$$

egyenletesen Ω-n, tehát $\partial^\alpha(\varphi_j\psi_j) \to \partial^\alpha(\varphi\psi)$ is egyenletesen Ω-n.

9.5. Megoldás. Az $u\colon C_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál maximumnormára vonatkozó folytonossága azt jelenti, hogy

$$|u(\varphi)| \le C \cdot \sup_\Omega |\varphi| = C \cdot \sup_{\operatorname{supp}\varphi} |\varphi|,$$

vagyis $\operatorname{supp}\varphi \subset K \subset \Omega$ kompakt halmaz esetén $|u(\varphi)| \le C \cdot \sup_K |\varphi|$, tehát u egy nulladrendű disztribúció Ω-n.
A megfordítás nem igaz. Legyen ugyanis $\Omega = \mathbb{R}$ és $u(\varphi) = \varphi'(0)$, amely nyilván disztribúció, hiszen a 9.16. Feladat szerint $u = -\delta_0'$. Ekkor u csak egy $C_0(\Omega)$-beli sűrű részhalmazon értelmezett, és nem folytonos a maximumnormára nézve, mert a $\varphi_n(x) = \sin(nx)/n \to 0$ egyenletesen $\mathbb{R}$-en (tehát maximumnormában), de $\varphi'(0) = (\sin(nx)/n)'(0) = 1 \not\to 0$.

9.6. Megoldás. Az u funkcionál linearitása nyilvánvaló, ha pedig $\operatorname{supp}\varphi \subset$ $\subset K \subset \Omega$ kompakt, akkor

$$\begin{aligned}|u(\varphi)| &= \left|\int_\Omega f\partial^\beta\varphi\right| = \left|\int_K f\partial^\beta\varphi\right| \le \int_K \left|f\partial^\beta\varphi\right| \le \\ &\le \left(\int_K |f|\right)\cdot \sup_K \left|\partial^\beta\varphi\right| \le C_K \cdot \sum_{|\alpha|\le|\beta|} \sup_K |\partial^\alpha|\varphi|,\end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ és véges rendű, mégpedig legfeljebb $|\beta|$ rendű. Megjegyezzük, hogy u nem feltétlenül $|\beta|$ rendű: például az $\Omega = \mathbb{R}$, $f = H$, $\beta = k$ esetben (ahol H a Heaviside-függvény) a Newton–Leibniz-tétel és φ kompakt tartójú volta folytán

$$u(\varphi) = \int_\mathbb{R} H\varphi^{(k)} = -\varphi^{(k-1)}(0),$$

és így a 9.16. Feladat alapján $u = (-1)^{k-1}\delta_0^{(k-1)}$.
A 9.11. Állításban láttuk, hogy $|\beta| = 0$ esetén az u disztribúció m.m. egyértelműen meghatározza az f függvényt. Belátjuk, hogy $|\beta| \ge 1$ esetén ez nem igaz, előfordulhat, hogy két mindenütt különböző függvény ugyanazt az u disztribúciót határozza meg. Legyen $n = 1$, $\Omega = (a, b)$, valamint $f \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(a, b)$, $c \in \mathbb{R}$ és $\beta = 1$. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{D}(a, b)$ esetén

$$\int_a^b (f + c)\varphi' = \int_a^b f\varphi' + c \cdot \int_a^b \varphi' = \int_a^b f\varphi' + c(\varphi(b) - \varphi(a)) = \int_a^b f\varphi',$$

hiszen $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Ez viszont azt jelenti, hogy $f + c$ és f ugyanazt a disztribúciót határozzák meg. Hasonlóan látható, hogy tetszőleges $n \geq 1$ és $|\beta| \geq 1$ multiindex esetén sem határozza meg u az f függvényt.

9.7. Megoldás.
1. megoldás. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = \varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Tekintsük a 3.13. Példában definiált egységapproximációt, amelyet toljunk el az origóból az a pontba, azaz legyen $\psi_\varepsilon(x) := \eta_\varepsilon(a - x)$ $(j = 1{,}2\ldots)$. Válasszuk az $\varepsilon = 1/j$ sorozatot, ekkor a ψ_j függvényekre a definíció és (3.3) alapján teljesül, hogy $\operatorname{supp}\psi_j \subset$ $\subset B(a{,}1/j)$, $\psi_j(a) = 1$ és $\sup_{\mathbb{R}^n} |\psi_j| \leq 1$ minden j-re. Ebből következően $x \neq a$ esetén $\psi_j(x) \xrightarrow{j\to\infty} 0$, tehát $f\psi_j \to 0$ m.m. $\mathbb{R}^n$-en. Mivel $|f\psi_j| \leq |f| \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, ezért a Lebesgue-tétel alkalmazásával az indirekt feltevésből

$$1 = \varphi_j(a) = \int_{\mathbb{R}^n} f\psi_j = \int_{B(a,1)} f\psi_j \to 0$$

adódik, ami ellentmondás.
2. megoldás. Ismét indirekt módon bizonyítunk, tegyük fel, hogy $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi = \varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén. Mivel $f \in$ $\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ezért a-nak van olyan $B(a,r)$ gömbi környezete, hogy $\int_{B(a,r)} |f| <$ < 1. Valóban, ha χ_j jelöli a $B(0{,}1/j)$ gömb karakterisztikus függvényét (azaz $\chi = 1$ a gömbön, és 0 azon kívül), akkor a Lebesgue-tétel miatt

$$\int_{B(0,\frac{1}{j})} f = \int_{B(0,1)} f\chi_j \to \int_{B(0,1)} 0 = 0,$$

így elég kis j-re $\int_{B(0,1/j)} f < 1$, vagyis az $r = 1/j$ választás megfelel.
Most legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ olyan függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset B(a,r)$ és $|\varphi(a)| =$ $= \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi|$ (ilyen van, lásd a (9.4) hozzárendeléssel értelmezett függvényt), ekkor az indirekt feltevés és a $B(a,r)$ környezet választása folytán

$$|\varphi(a)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\right| \leq \int_{B(a,r)} |f\varphi| = \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \cdot \int_{B(a,r)} |f| < \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| = |\varphi(a)|,$$

ami ellentmondás.
3. megoldás. A 9.14. Feladat alapján nem üres megszámlálható tartójú disztribúció nem lehet reguláris, és mivel a 9.34. Példa szerint $\operatorname{supp}\delta_a = \{a\}$, így δ_a nem lehet reguláris.

9.8. Megoldás. Legyen $K \subset (0,\, 2)$ kompakt halmaz. Ekkor létezik N pozitív egész szám, amelyre $1/N \in K$, de $1/j \notin K$, ha $j > N$, így $\operatorname{supp}\varphi \subset K$ esetén

$$|u(\varphi)| = \left|\sum_{j=1}^{N} \varphi^{(j)}\left(\frac{1}{j}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{N} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|, \tag{15.1}$$

amiből következően u jól definiált. A linearitás is könnyen látható, hiszen formálisan (tudván, hogy csak véges sok nem nulla tag van az összegben) képezhetjük két végtelen szumma összegét. Végül a folytonosság a fenti (15.1) összefüggésből azonnal adódik, tehát u valóban disztribúció.
Belátjuk, hogy u nem véges rendű. Tegyük fel ugyanis, hogy u rendje $m < \infty$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $K \subset (0,2)$ kompakt halmazt választva létezik $C_K > 0$ konstans úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \leq C_K \cdot \sum_{k=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(k)}\right| \tag{15.2}$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Válasszuk a

$$K = \left[\frac{1}{m+1} - \varepsilon, \frac{1}{m+1} + \varepsilon\right]$$

kompakt intervallumot, ahol $\varepsilon > 0$ olyan szám, hogy $1/(m+2) \notin K$ (például $\varepsilon = (1/(m+1) - 1/(m+2))/2$ megfelelő). Ekkor persze $1/m \notin K$ és így $1/(m+1)$ az egyetlen 1 számlálójú tört, amely benne van K-ban. Következésképpen

$$u(\varphi) = \varphi^{(m+1)}\left(\frac{1}{m+1}\right)$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. A 9.2. Feladat alapján válasszuk meg a $\varphi \in \mathscr{D}(0,2)$ függvényt úgy, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, $\sup_K |\varphi^{(j)}| \leq 1$ minden $0 \leq j < m$ esetén, valamint $\varphi^{(m+1)}(1/(m+1)) = m + 1$. Ekkor $u(\varphi) = \varphi^{(m+1)}(1/(m+1)) = m + 1$, másrészt (15.2) miatt

$$|u(\varphi)| \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right| = \sum_{j=1}^{m} 1 = m,$$

ami ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy u rendje nem lehet véges.
Egy végtelen rendű disztribúció nem lehet reguláris, hiszen a 9.18. Megjegyzés alapján egy reguláris disztribúció nulladrendű.

9.9. Megoldás. A 9.16. Feladat szerint $\partial^\alpha \delta_a$ rendje $|\alpha|$, így $|\alpha| = k$ esetén k-adrendű disztribúció. Az alábbiakban ennek egy változatát adjuk példaként. Legyen $\Omega = \mathbb{R}$ és értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következő módon:

$$u(\varphi) := \sum_{j=0}^{k} \varphi^{(j)}(j).$$

Az u funkcionál nyilván lineáris, ezenkívül ha $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, akkor $\operatorname{supp} \varphi \subset K$ esetén

$$|u(\varphi)| = \left| \sum_{j=0}^{k} \varphi^{(j)}(j) \right| \leq \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left| \varphi^{(j)} \right|, \tag{15.3}$$

tehát u disztribúció, amelynek rendje legfeljebb k.
Indirekt módon tegyük fel, hogy u rendje $m < k$. Ez azt jelenti, hogy minden K halmazhoz létezik $C_K > 0$ konstans úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \leq C_K \cdot \sum_{j=0}^{k} \sup_m \left| \varphi^{(j)} \right|.$$

Válasszuk a $K = [k - 1/2, k + 1/2]$ kompakt intervallumot, és a 9.2. Feladat alapján legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, $\sup_K |\varphi^{(j)}| \leq 1$ minden $j \leq m$ esetén, valamint $\varphi(k) = m + 1$. Ebben az esetben $u(\varphi) = \varphi^{(k)}(k) = = m + 1$, másrészt a (15.3) becslésből következően

$$|u(\varphi)| \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \sup_K \left| \varphi^{(j)} \right| = \sum_{j=1}^{m} 1 = m,$$

ami ellentmondás, tehát u rendje k.

9.10. Megoldás. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén $\partial_j T_f(\varphi) = -T_f(\partial_j \varphi) = -\int_\Omega f \partial_j \varphi$. A feltételekből következően f_-, f_+ folytonos függvények ∂U-n, hiszen f deriváltjai folytonosan kiterjednek $\overline{U}$-ra, és $\Omega \setminus U$-ra. Jelölje ν az U tartományból kifelé mutató egységnormálist, ekkor a Gauss–Osztrogradszkij-tételből következően

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f \partial_j \varphi &= \int_U f \partial_j \varphi + \int_{\Omega \setminus U} f \partial_j \varphi = \\
&= \int_U (\partial_j (f\varphi) - \varphi \partial_j f) + \int_{\Omega \setminus U} (\partial_j (f\varphi) - \varphi \partial_j f) = \\
&= \int_{\partial U} f_+ (\partial_j \varphi) \nu_j \, d\sigma + \int_U \varphi \partial_j f + \int_{\partial U} f_- (\partial_j \varphi) \nu_j \, d\sigma - \int_{\Omega \setminus U} \varphi \partial_j f = \\
&= -T_{\partial_j f}(\varphi) - \int_{\partial U} (f_- - f_+)(\partial_j \varphi) \nu_j \, d\sigma.
\end{aligned}$$

Ennek alapján

$$\partial_j T_f(\varphi) = T_{\partial_j f}(\varphi) + \int_{\partial U} (f_- - f_+)(\partial_j \varphi) \nu_j \, d\sigma. \tag{15.4}$$

Megjegyezzük, hogy formálisan

$$\int_{\partial U} (f_- - f_+)(\partial_j \varphi)\nu_j \, d\sigma = ((f_+ - f_-)\delta_{\partial U})'(\varphi),$$

ahol

$$(f_+ - f_-)\delta_{\partial U}(\varphi) := \int_{\partial U} (f_+ - f_-)\varphi \, d\sigma \tag{15.5}$$

az úgynevezett $(f_+ - f_-)$ sűrűségű egyszerű réteg. Így a (15.4)

$$\partial_j T_f = T_{\partial_j f} + ((f_+ - f_-)\delta_{\partial U})'$$

alakban írható, amely általánosítja a 9.49. Állításban szereplő formulát.

9.11. Megoldás. A ψu funkcionál linearitása nyilvánvaló. A folytonossághoz legyen $K \subset \Omega$, ehhez u folytonossága miatt található $C_K > 0$ valós és m_K egész szám úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Mivel a Leibniz-szabály alapján

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \psi \cdot \partial^\gamma \varphi,$$

ezért

$$\begin{aligned} |(\psi u)(\varphi)| = |u(\psi\varphi)| &\le C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha(\psi\varphi)| \le \\ &\le \sup_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \psi| \cdot C_K \cdot \sum_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|, \end{aligned}$$

vagyis teljesül a folytonosság ekvivalens feltétele a

$$\tilde{C}_K := C_K \sup_{|\alpha| \le m_K} \sup_K |\partial^\alpha \psi|$$

és m_K konstansokkal.

9.12. Megoldás. A válasz: nem. Legyen $\Omega := (-1,1)$, $u := \delta_0'$ és $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$. A 9.16. Feladat alapján $\varphi \in \mathscr{D}(-1,1)$ esetén $\psi\delta_0'(\varphi) = \delta_0'(\psi\varphi) = -(\psi\varphi)'(0) = -\varphi(0) = -\delta_0$, amely nem az azonosan nulla disztribúció.

9.13. Megoldás. Tegyük fel, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Ekkor létezik x-nek U_x környezete, amelyen $f = 0$ m.m., ezért $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$ esetén

$T_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi = \int_{U_x} f\varphi = 0$, tehát $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$. Az előbbi érvelés visszafele is igaz, így $\Omega \setminus \operatorname{supp} f = \Omega \setminus \operatorname{supp} T_f$, amiből következik, hogy $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$.

9.14. Megoldás. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, és tegyük fel, hogy $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ nem üres megszámlálható. A 9.30. Megjegyzés alapján $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$ nyílt halmaz, továbbá $u = 0$ ezen a halmazon. E halmazra a 9.11. Állítást alkalmazva kapjuk, hogy $u = T_0 = 0$ az $\Omega\setminus$ halmazon. Tegyük fel, hogy létezik $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ függvény, amelyre $u = T_f$ az Ω halmazon. Mivel $\operatorname{supp} u$ megszámlálható, ezért nullmértékű, és így a 9.11. Állítást most az Ω halmazra alkalmazva kapjuk, hogy $T_0 = u = T_f$ az egész Ω halmazon, vagyis szükségképpen $f = 0$, tehát $u = 0$. Azonban az azonosan 0 disztribúció tartója az üres halmaz (hiszen minden függvényre 0 az értéke), de ez lehetetlen, mert feltettük, hogy $\operatorname{supp} u$ nem üres.

9.15. Megoldás. A bizonyítás megegyezik a függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyításával.
Világos, hogy ha egy nyílt halmazon u és v egyszerre nulla, akkor ott $u + v$ is nulla, vagyis $(\Omega \setminus \operatorname{supp} u) \cap (\Omega \setminus \operatorname{supp} v) \subset \Omega \setminus \operatorname{supp}(u + v)$, ezért a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(u + v) \subset \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} v$ teljesül. A szigorú tartalmazáshoz elég két folytonos függvényt találnunk, amelyekre szigorú tartalmazás áll fenn, és akkor a 9.13. Feladat alapján készen vagyunk.
Szigorú tartalmazáshoz legyen például $f = 1$ és $g = -1$ az Ω halmazon, ekkor $\operatorname{supp} T_{f+g} = \emptyset$ és $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} T_g = \Omega$. Amennyiben pedig $u = v$, akkor nyilván $\operatorname{supp}(u + v) = \operatorname{supp}(2u) = \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} u$.
A másik tartalmazáshoz legyen $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u)$, ekkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} \psi$ vagy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. Az első esetben létezik x-nek $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete úgy, hogy $U_x \cap \operatorname{supp} \psi = \emptyset$. Ebből következően $\psi\varphi = 0$, vagyis $\psi u(\varphi) = u(\psi\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$, ami azt jelenti, hogy $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$. Amennyiben $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$, akkor x-nek van olyan $U_x \subset \Omega$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset U_x$. Nyilván minden ilyen tulajdonságú φ-re $\operatorname{supp}(\psi\varphi) \subset \operatorname{supp} \varphi \subset U_x$, tehát $\psi u(\varphi) = u(\psi\varphi) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\psi u = 0$ az U_x környezetben, vagyis $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$. Összefoglalva, ha $x \in \Omega \setminus (\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u)$, akkor $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(\psi u)$, ezért a komplementer halmazokra $\operatorname{supp}(\psi u) \subset \operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u$ teljesül.
Szigorú tartalmazáshoz tekintsük például az $\Omega = \mathbb{R}$ esetben az $u = T_H$ disztribúciót (ahol H a Heaviside-függvény), továbbá ψ legyen egy olyan sima függvény, amelynek tartója a $[-1, 0]$ intervallum (ilyen van, lásd például a (9.4) hozzárendeléssel értelmezett függvényt $a = 1/2$ és $r = 1/2$ választással). Ekkor a 9.13. Feladat szerint $\operatorname{supp} T_H = \operatorname{supp} H = [0, \infty)$, így $\operatorname{supp} \psi \cap \operatorname{supp} u = \{0\}$. Másrészt viszont, a 9.23. Példa alapján $\psi T_H = T_{\psi H}$, vagyis ψT_H a m.m. nulla ψH függvényhez tartozó reguláris disztribúció, de

ez a 9.11. Állítás miatt megegyezik az azonosan 0 függvényhez tartozó reguláris disztribúcióval, tehát $\operatorname{supp}(\psi T_H) = \emptyset \subsetneq \{0\}$. Nyilván a $\psi = 1$ függvény esetén $\operatorname{supp} u = \operatorname{supp}(\psi u) = \operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp} u = \Omega \cap \operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u$, tehát egyenlőség áll fenn.

9.16. Megoldás. A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén $\partial^\alpha \delta_a(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\delta_a(\partial^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(a)$.
Belátjuk, hogy $\operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a = \{a\}$. Valóban, ha $x \neq a$, akkor x-nek van olyan U_x nyílt környezete, hogy $a \notin U_x$, és ekkor $\delta_a(\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, ezért $x \notin \operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a$. Másrészt viszont a 9.2. Feladat alapján az a tetszőleges U nyílt környezetéhez található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\partial^\alpha\varphi(a) \neq 0$, és így $\partial^\alpha\delta_0(\varphi) \neq 0$, vagyis $a \in \operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a$.
Most megmutatjuk, hogy $\partial^\alpha\delta_0$ rendje $|\alpha|$. Először is nyilvánvalóan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$|u(\varphi)| = |\partial^\alpha\delta_a(\varphi)| = |\partial^\alpha\varphi(a)| \leq \sum_{|\beta|\leq|\alpha|} \sup_{\mathbb{R}} |\partial^\beta\varphi|, \tag{15.6}$$

tehát $\partial^\alpha\delta_0$ rendje legfeljebb $|\alpha|$. Ha a rendje $k < |\alpha|$ lenne, akkor a 9.2. Feladat alapján választhatunk olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\sup_{\mathbb{R}} |\partial^\beta\varphi| \leq$ ≤ 1 minden $|\beta| < |\alpha|$ multiindexre, valamint $\partial^\alpha\varphi(a) = (k+1)^n + 1$. Ekkor $|u(\varphi)| = |\partial^\alpha\varphi(a)| = (k+1)^n + 1$, azonban a (15.6) becslésből következően (felhasználva, hogy legfeljebb $(k+1)^n$ darab n hosszú β multiindex van, amelyre $|\beta| = k$)

$$|u(\varphi)| \leq \sum_{|\beta|<|\alpha|} \sup_{\mathbb{R}} |\partial^\alpha\varphi| \leq (k+1)^n,$$

ami ellentmondás, tehát $\partial^\alpha\delta_0$ rendje $|\alpha|$.
A $\partial^\alpha\delta_a$ disztribúció semmilyen α multiindex esetén nem reguláris. Ez következik a 9.14. Feladatból, felhasználva az előzőekben belátott $\operatorname{supp}\partial^\alpha\delta_a = \{a\}$ összefüggést. Sőt, ez $|\alpha| > 0$ esetén egyszerűen abból is következik, hogy a 9.18. Megjegyzés alapján egy reguláris disztribúció nulladrendű, de $\partial^\alpha\delta_0$ rendje $|\alpha| > 0$. Az $|\alpha| = 0$ esettel pedig a 9.7. Feladat foglalkozik.
Egy másik lehetséges bizonyítás, ha az $|\alpha| = 0$ esethez hasonlóan járunk el, azzal a különbséggel, hogy a 9.2. Feladat alapján olyan ψ_j függvényeket konstruálunk, amelyekre $\operatorname{supp}\psi_j \subset B(a,1/j)$, $\partial^\alpha\psi_j(a) = 1$ és $\sup_{\mathbb{R}^n} |\psi_j| \leq 1$ minden j-re.

9.17. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Ekkor φ-t felírhatjuk $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ alakban, ahol

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) - \varphi(-x)), \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

vagyis φ_1, φ_2 a φ függvény „páratlan", illetve „páros" része. Mivel $\varphi_1(0) = 0$, ezért a Lagrange-középértéktételből következően $x > 0$ esetén

$$\varphi_1(x) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) = \varphi_1'(\xi_x) \cdot x,$$

ahol $\xi_x \in (0, x)$, továbbá φ_2 páros volta folytán $x \mapsto \varphi_2(x)/x$ páratlan függvény, tehát origóra szimmetrikus halmazon az integrálja 0. Mindezek alapján a Lebesgue-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx &= \int_{\operatorname{supp}\varphi\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi_1(x)-\varphi_1(0)}{x}\,dx = \\ &= 2\int_{[\varepsilon,\infty)} \varphi_1'(\xi_x)\,dx \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} 2\int_{[0,\infty)} \varphi_1'(\xi_x)\,dx,\end{aligned}$$

tehát $\mathscr{P}_1(\varphi)$ értelmes. Ezenkívül $\sup_{\mathbb{R}} |\varphi_1'| \le \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$ miatt a fenti becslésből következően $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$ esetén $|\mathscr{P}_1(\varphi)| \le R \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$, vagyis $\mathscr{P}_1$ disztribúció és legfeljebb elsőrendű.
A klasszikus analízisből jól ismert, hogy az $x \mapsto \log|x|$ függvény lokálisan integrálható $\mathbb{R}$-en, hiszen létezik az $\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrál, mégpedig $\int_0^1 \log x\,dx = [x\log x - x]_0^1 = -1$, felhasználva az ugyancsak ismert $x\log x \xrightarrow{x\to 0+} 0$ összefüggést. Jelölje $T_{\log}$ az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon $x \mapsto \log|x|$ hozzárendeléssel értelmezett lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúciót. Ekkor a disztribúció értelemben vett deriválás definíciója szerint $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}&T_{\log}'(\varphi) = \\ &= -T_{\log}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)\log|x|\,dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi'(x)\log(-x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi'(x)\log x\,dx\right) = \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left([\varphi(x)\log(-x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + [\varphi(x)\log x]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\varphi(-\varepsilon)\log\varepsilon - 0 + 0 + \varphi(\varepsilon)\log\varepsilon + \int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{\varphi}{x}\,dx = \mathscr{P}_1(\varphi)\right),\end{aligned}$$

ahol egy parciális integrálást hajtottunk végre, valamint felhasználtuk, hogy φ kompakt tartójú.
Belátjuk, hogy $\mathscr{P}_1$ rendje nem lehet 0, vagyis szükségképpen elsőrendű, hiszen korábban igazoltuk, hogy legfeljebb elsőrendű. Ha nulladrendű volna, akkor a $K = [-1, 1]$ kompakt intervallumhoz létezne $C_K > 0$ valós szám úgy, hogy

$$|\mathscr{P}_1(\varphi)| \le C_K \cdot \sup_K |\varphi| \tag{15.7}$$

minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Legyen most $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan páratlan függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, továbbá $0 \le \varphi \le 1$ a $[0,1]$-en és $\varphi = 1$ az $[1/(2C_K),1/C_K]$-n. Ekkor

$$\mathscr{P}_1(\varphi) \ge \int_{[\frac{1}{2C_K},\frac{1}{C_K}]} 1\,dx = C_K,$$

azonban $|\varphi| \le 1$ folytán a (15.7) becslésből $|\mathscr{P}_1(\varphi)| \le 1$ következik, ami ellentmondás, tehát $\mathscr{P}_1$ rendje szükségképpen 1.
Megmutatjuk, hogy $\mathscr{P}_1$ nem reguláris disztribúció. Valóban, ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, hogy $\operatorname{supp}\varphi \subset (-\infty,0)$, akkor $\mathscr{P}_1(\varphi) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x)/x\,dx = T_{1/x}(\varphi)$. Ez nyilván igaz a $(0,\infty)$ intervallumra is, ezért ha $\mathscr{P}_1$ reguláris lenne, akkor csakis $\mathscr{P}_1 = T_{1/x}$ teljesülhetne, azonban az $x \mapsto 1/x$ függvény nem lokálisan integrálható.
Végezetül legyen $\psi(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, ekkor $(\psi\delta_0)(\varphi) = \delta_0(\psi\varphi) = 0$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén, tehát $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 = 0$. Ezenkívül $(\psi\mathscr{P}_1)(\varphi) = \mathscr{P}_1(\psi\varphi) = = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\varphi = T_1$, vagyis $\psi\mathscr{P}_1$ az azonosan 1 függvényhez tartozó reguláris disztribúció, ezért tekinthető az azonosan 1 függvénynek, és így $(\psi\mathscr{P}_1)\delta_0 = \delta_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\psi\delta_0)\mathscr{P}_1 \ne (\psi\mathscr{P}_1)\delta_0$.

9.18. Megoldás.
a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ tetszőleges, ekkor parciális integrálást végrehajtva

$$\begin{aligned}-T_r'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = \\ &= [x\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx = -T_H(\varphi).\end{aligned}$$

Mivel ez minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén teljesül, ezért $T_r' = T_H$.
b) Minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}-T_{\mathrm{abs}}'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 x\varphi'(x)\,dx = \\ &= [x\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0\varphi(x)\,dx = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\operatorname{sgn}(x)\,dx = -T_{\mathrm{sgn}}(\varphi).\end{aligned}$$

c) Minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\begin{aligned}-T_{\mathrm{sgn}}'(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(x)\operatorname{sgn}(x)\,dx = \int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx - \int_{-\infty}^0\varphi'(x)\,dx = \\ &= [\varphi(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx - [\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0\varphi(x)\,dx = -2\varphi(0) = -2\delta_0(\varphi).\end{aligned}$$

9.19. Megoldás. A 9.49. Állítás alapján egy szakaszonként konstans ugrófüggvény deriváltja az ugrási pontokra koncentrált Dirac-delta disztribúcióknak az ugrások nagyságával vett lineáris kombinációja. Ennek alapján az

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } \ x \geq 1, \\ 1, & \text{ha } \ -1 \leq x < 1, \\ 0, & \text{ha } \ x < -1 \end{cases}$$

függvényre $f' = \delta_{-1} + \delta_1$ disztribúció értelemben.

9.20. Megoldás. Azt kell belátnunk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$T_u''(\varphi) + T_u(\varphi) = \delta_0(\varphi).$$

Ez valóban teljesül, hiszen

$$\begin{aligned} T_u''(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(x) H(x) \sin x \, dx = \int_0^{\infty} \varphi''(x) \sin x = \\ &= [\varphi'(x) \sin x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi'(x) \cos x \, dx = \\ &= -[\varphi(x) \cos x]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) \sin x \, dx = \\ &= \varphi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) H(x) \sin x \, dx = \delta_0(\varphi) - T_u(\varphi). \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a feladat állítását beláthattuk volna a 9.51. Állítás felhasználásával, hiszen a sin függvény kielégíti $\mathbb{R}^+$-on az $y'' + y = 0$ közönséges differenciálegyenletet, továbbá $\sin 0 = 0$ és $\sin'(0) = \cos 0 = 1$.

9.21. Megoldás.
A 9.20. Feladat alapján az $u(x) = H(x) \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre $u'' + u = \delta_0$ disztribúció értelemben, ahol H a Heaviside-függvényt jelöli. Szükségünk van még az $f'' + f = -g$ közönséges differenciálegyenlet egy y partikuláris megoldására, mert ekkor a linearitás miatt az $u + y$ függvény megfelel a feladat kívánalmainak. Gondoljuk meg, hogy tetszőleges elsőfokú, azaz $y(x) = ax + b$ alakú valós függvényre $y'' = 0$, így $y'' + y = y$, ezért az $y = -g$ választással $y'' + y = -g$ függvény értelemben, tehát disztribúció értelemben is. Ez azt jelenti, hogy az $f(x) = H(x) \sin x + 2 - x$ függvény megfelel a feladat kívánalmainak. Megjegyezzük, hogy a 9.49. Feladat alapján az $u'' + u = \delta_0$ egyenlet minden (disztribúció értelemben vett) megoldása $x \mapsto H(x) \sin x + c$ alakú, ahol c tetszőleges konstans.

9.22. Megoldás. A 9.51. Állítás alapján az $y'' - 4y = 0$ közönséges differenciálegyenletnek az $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldására $y'' - 4y = \delta_0$ teljesül disztribúció értelemben. Az $y'' - 4y = 0$ egyenlet megoldásai $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$ alakúak. A kezdeti feltételből egyértelműen adódik, hogy $c_1 = -1/4$ és $c_2 = 1/4$, tehát az $y(x) = (e^{2x} - e^{-2x})/4$ függvényre $y'' - 4y = \delta_0$ disztribúció értelemben $\mathbb{R}$-en.

9.23. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, ekkor a disztribúciók deriválásának definíciójából f tartójának figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_{12} T_f(\varphi) &= T_f(\partial_{12}\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\partial_{12}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0{,}0) + \frac{1}{2}\varphi(0{,}0) = \varphi(0{,}0) = \delta_{(0,0)}.\end{aligned}$$

9.24. Megoldás. Mivel $\partial_{21} T_f = \partial_{12} T_f$, ezért $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén f tartójának figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\partial_{21} T_f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f\partial_{12}\varphi = \int_0^1\int_0^1 \partial_{12}\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_0^1 (\partial_2\varphi(1,y) - \partial_2\varphi(0,y))\,dy = \\ &= \varphi(1{,}1) - \varphi(1{,}0) - \varphi(0{,}1) + \varphi(0{,}0) = \\ &= (\delta_{(1,1)} - \delta_{(1,0)} - \delta_{(0,1)} + \delta_{(0,0)})(\varphi).\end{aligned}$$

9.25. Megoldás. Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, ekkor $\partial_1^2 T_f(\varphi) = T_f(\partial_1^2\varphi)$, ezért

$$\begin{aligned}\partial_1^2 T_f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^2} f\partial_1^2\varphi = \int_{-1}^{0}\int_{-y-1}^{y+1} \partial_1^2\varphi(x,y)\,dx\,dy + \\ &\quad + \int_0^1\int_{y-1}^{1-y} \partial_1^2\varphi(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_{-1}^{0} (\partial_1\varphi(y+1,y) - \partial_1\varphi(-y-1,y))\,dy + \\ &\quad + \int_0^1 (\partial_1\varphi(1-y,y) - \partial_1\varphi(y-1,y))\,dy.\end{aligned}$$

Hasonló módon

$$\partial_2^2 T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f \partial_2^2 \varphi = \int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} \partial_2^2 \varphi(x,y)\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \partial_2^2 \varphi(x,y)\, dy\, dx =$$
$$= \int_{-1}^{0} (\partial_2 \varphi(x, x+1) - \partial_2 \varphi(x, -x-1))\, dx +$$
$$+ \int_0^1 (\partial_2 \varphi(x, 1-x) - \partial_2 \varphi(x, x-1))\, dx =$$
$$= \int_0^1 (\partial_2 \varphi(y-1, y) - \partial_2 \varphi(-y-1, y))\, dy +$$
$$+ \int_{-1}^{0} (\partial_2 \varphi(1-y, y) - \partial_2 \varphi(y+1, y))\, dy.$$

Ennek alapján

$$\partial_1^2 T_f(\varphi) - \partial_2^2 T_f(\varphi) = \int_{-1}^{0} (\partial_1 \varphi(y+1, y) + \partial_2 \varphi(y+1, y))\, dy +$$
$$+ \int_{-1}^{0} (-\partial_1 \varphi(-y-1, y) + \partial_2 \varphi(-y-1, y))\, dy -$$
$$- \int_0^1 (-\partial_1 \varphi(1-y, y) + \partial_2 \varphi(1-y, y))\, dy -$$
$$- \int_0^1 (\partial_1 \varphi(y-1, y) + \partial_2 \varphi(y-1, y))\, dy.$$

Vegyük észre, hogy

$$\int_{-1}^{0} (\partial_1 \varphi(y+1, y) + \partial_2 \varphi(y+1, y))\, dy =$$
$$= \int_{-1}^{0} \frac{d}{dy} \varphi(y+1, y)\, dy = \varphi(1,0) - \varphi(0,-1),$$

hasonlóan

$$\int_{-1}^{0} (-\partial_1 \varphi(-y-1, y) + \partial_2 \varphi(-y-1, y))\, dy = \varphi(-1, 0) - \varphi(0, -1),$$
$$\int_0^1 (-\partial_1 \varphi(1-y, y) + \partial_2 \varphi(1-y, y))\, dy = \varphi(0, 1) - \varphi(1, 0),$$
$$\int_0^1 (\partial_1 \varphi(y-1, y) + \partial_2 \varphi(y-1, y))\, dy = \varphi(0, 1) - \varphi(-1, 0),$$

így végül

$$\partial_1^2 T_f(\varphi) - \partial_2^2 T_f(\varphi) = 2(\varphi(1,\,0) - \varphi(0,\,1) + \varphi(-1,\,0) - \varphi(0,\,-1)) =$$
$$= 2(\delta_{(1,\,0)} - \delta_{(0,\,1)} + \delta_{(-1,\,0)} - \delta_{(0,\,-1)})(\varphi).$$

9.26. Megoldás.
a) Legyen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges, ekkor

$$\begin{aligned}(-1)^n \partial_1 \cdots \partial_n \tilde{H}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} H(x) \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx = \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty [\partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)]_{x_1=0}^\infty \, dx_2 \dots dx_n - \\ &\quad - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \\ &= \cdots = (-1)^n \varphi(0, \dots, 0) = (-1)^n \delta_0(\varphi).\end{aligned}$$

b) Az előbbiekhez hasonlóan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén

$$\begin{aligned}(-1)^n \partial_1 \cdots \partial_n r(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} r(x) \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx = \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_1 \dots x_n \partial_1 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty [x_1 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)]_{x_1=0}^\infty \, dx_2 \dots dx_n - \\ &\quad - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty x_2 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n - \\ &\quad - \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_2 \dots x_n \partial_2 \cdots \partial_n \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n = \\ &= \cdots = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = (-1)^n T_{\tilde{H}}(\varphi).\end{aligned}$$

9.27. Megoldás.
a) Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ és $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Ekkor (mivel K kompakt, így korlátos, ezért) létezik $R > 0$ úgy, hogy a K halmaz benne van az origó középpontú R sugarú körlapban. Ezért

$$|u(\varphi)| \le \int_0^\infty |\varphi(0, y)|\, dy \le \int_0^R \sup_K |\varphi|\, dy \le R \cdot \sup_K |\varphi|,$$

vagyis u nulladrendű disztribúció.
b) A disztribúció értelemben vett deriválás definíciója alapján

$$\partial_2 u(\varphi) = -u(\partial_2\varphi) = -\int_0^\infty \partial_2\varphi(0,y)\,dy = \varphi(0{,}0) = \delta_{(0,0)}.$$

c) Vegyük észre, hogy $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ esetén minden rögzített y-ra

$$\varphi(0,y) = -\left[\varphi(x,y)\right]_{x=0}^\infty = -\int_0^\infty \partial_x\varphi(x,y)\,dx = -\int_0^\infty H(x)\partial_x(x,y)\,dx,$$

ahol H az egydimenziós Heaviside-függvény. Ennek alapján

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \int_0^\infty \varphi(0,y)\,dy = \int_{-\infty}^\infty H(y)\varphi(0,y)\,dy = \\ &= -\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty H(y)H(x)\partial_x\varphi(x,y)\,dx\,dy = \partial_1 T_f(\varphi), \end{aligned}$$

ahol $f(x,y) = H(x)H(y)$. Ez azt jelenti, hogy u az f függvényhez tartozó reguláris disztribúció első változó szerinti deriváltja.

9.28. Megoldás. Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ és $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Ekkor (mivel K kompakt, így korlátos, ezért) létezik $R > 0$ úgy, hogy a K halmaz benne van az origó középpontú R sugarú körlapban, így

$$|u(\varphi)| \le \int_0^\infty |\varphi(x,-x)|\,dx \le \int_0^R \sup_K|\varphi|\,dx \le R\cdot\sup_K|\varphi|,$$

vagyis u nulladrendű disztribúció. A disztribúció értelmeben vett deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_1 u(\varphi) - \partial_2 u(\varphi) &= -(u(\partial_1\varphi) - u(\partial_2\varphi)) = \\ &= -\int_0^\infty (\partial_1\varphi(x,-x) - \partial_2\varphi(x,-x))\,dx = \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dx}\varphi(x,-x)\,dx = \varphi(0{,}0) = \delta_{(0,0)}. \end{aligned}$$

9.29. Megoldás. Azt kell belátni, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. Vegyük észre, hogy $g_\varepsilon(x) = (\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}))'$, így parciális integrálást végrehajtva

$$\begin{aligned} T_{g_\varepsilon}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}\varphi(x)\,dx = \\ &= \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(x)\right]_{x=-\infty}^\infty - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi'(x)\,dx = \qquad (15.8) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi'(x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon \to 0+$ esetén $\operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}) \to \frac{\pi}{2}$, ha $x > 0$, és $\operatorname{arctg}(\frac{x}{\varepsilon}) \to -\frac{\pi}{2}$, ha $x < 0$, továbbá φ kompakt tartójú, valamint arctg korlátos, ezért a Lebesgue-tétel alapján a (15.8) összefüggésből határátmenettel

$$\lim_{\varepsilon\to+} T_{g_\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \varphi' - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \varphi' = \frac{1}{2}\delta_0(\varphi) + \frac{1}{2}\delta_0(\varphi) = \delta_0(\varphi)$$

adódik.

9.30. Megoldás. Definíció szerint $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ esetén

$$\partial^\alpha u_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_j(\partial^\alpha \varphi),$$

így az $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ konvergencia definíciójából közvetlenül adódik, hogy

$$\partial^\alpha u_j(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u_j(\partial^\alpha \varphi) \to (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi) = \partial^\alpha u(\varphi).$$

9.31. Megoldás. A bizonyítás megegyezik a végtelen sokszor differenciálható függvényekre vonatkozó analóg állítás bizonyításával.
Nyilvánvalóan $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ függvényekre igaz, hogy $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$, hiszen egy nyílt halmazon 0 függvény deriváltja is 0. Áttérve disztribúciókra, $\partial^\alpha u(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi)$, így $\operatorname{supp} \partial^\alpha u \subset \operatorname{supp} u$, hiszen ha $u = 0$ egy nyílt halmazon, akkor $\operatorname{supp} \partial^\alpha \varphi \subset \operatorname{supp} \varphi$ miatt szükségképpen $\partial^\alpha u = 0$ is teljesül azon a nyílt halmazon.
Az egyváltozós $f = 1$ függvényre $f' = 0$, így $\emptyset = \operatorname{supp} f' \subsetneq \operatorname{supp} f = \Omega$ függvény értelemben, így disztribúció értelemben is (a megfelelő reguláris disztribúciókra). Egyenlőségre tekintsük $\Omega = \mathbb{R}$ esetén az $f(x) = e^x$ $(x \in \in \Omega)$ függvényt, amelyre $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}$, valamint $(e^x)^{(j)} = e^x$, tehát $\operatorname{supp} f = = \operatorname{supp} f^{(j)}$ minden j-re függvény értelemben, és ezért disztribúció értelemben is (a megfelelő reguláris disztribúciókra).

9.32. Megoldás. Az, hogy az $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúció nem függ a j-edik változótól a linearitás miatt, jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén az alábbi hozzárendeléssel értelmezett $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konstans:

$$\Phi(h) := u(x \mapsto \varphi(x + he_j) - \varphi(x)),$$

ahol $e_j := (0, \ldots ,0,1,0 \ldots ,0)$ a j-edik bázisvektor. Ez természetesen ekvivalens azzal, hogy Φ' azonosan 0. A következőkben megmutatjuk, hogy

$$\Phi'(h) = \partial_j u(x \mapsto \varphi(x + h)).$$

Legyen $0 < \delta < 1$, ekkor a linearitás folytán

$$\begin{aligned}
&\frac{\Phi(h+\delta)-\Phi(h)}{\delta} = \\
&= \frac{1}{\delta}\big(u(x \mapsto \varphi(x+(h+\delta)e_j)-\varphi(x))-u(x \mapsto \varphi(x+he_j)-\varphi(x))\big) = \\
&= u\left(x \mapsto \frac{\varphi(x+(h+\delta)e_j)-\varphi(x+h)}{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{15.9}$$

Legyen φ és h rögzített, valamint

$$\tilde{\varphi}_\delta(x) := \frac{\varphi(x+(h+\delta)e_j)-\varphi(x+he_j)}{\delta}.$$

Vegyük észre, hogy a Lagrange-középértéktétel miatt létezik $h < \xi_\delta < h+\delta$ úgy, hogy

$$\tilde{\varphi}_\delta(x) = \partial_j\varphi(x+he_j+\xi_\delta e_j). \tag{15.10}$$

Ebből következően minden $0 < \delta < 1$ esetén $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}_\delta \subset \overline{\operatorname{supp}\varphi + B(0,1)}$, amely kompakt halmaz. Ezen a kompakt halmazon $\partial_j\varphi'$ folytonos, tehát Heine tétele miatt egyenletesen is folytonos, ezért $\delta \to 0$ esetén

$$\partial_j\varphi(x+he_j+\xi_\delta e_j) \to \partial_j\varphi(x+he_j)$$

egyenletesen $\mathbb{R}^n$-en. Az előbbi gondolatmenetet φ helyett $\partial^\alpha\varphi$-re alkalmazva, ez végeredményben (15.10) szerint azt jelenti, hogy $\delta \to 0$ esetén $\tilde{\varphi}_\delta \xrightarrow{\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)} (x \mapsto \partial_j\varphi(x+he_j))$, így az u disztribúció volta folytán a (15.9) egyenlet alapján

$$\Phi'(h) = u(x \mapsto \partial_j\varphi(x+h)) = \partial_j u(x \mapsto \varphi(x+h)).$$

A most bizonyított összefüggésből azonnal következik, hogy Φ' pontosan akkor azonosan 0, azaz u nem függ a j-edik változótól, ha $\partial_j u = 0$.

9.33. Megoldás. A direkt szorzat definíciója alapján tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ függvényre

$$\delta_a\{x \mapsto \delta_b[y \mapsto \varphi(x,y)]\} = \delta_b\{y \mapsto \varphi(a,y)\} = \varphi(a,b),$$

tehát $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$. Másrészt a 9.65. Állítás alapján

$$\begin{aligned}
\delta_a\{x \mapsto T_f[y \mapsto \varphi(x,y)]\} &= T_f\{y \mapsto \delta_a[x \mapsto \varphi(x,y)]\} = \\
&= T_f\{y \mapsto \varphi(a,y)\} = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi(a,y)\,dy.
\end{aligned}$$

9.34. Megoldás. Először megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^{n+m} \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v) \subset \subset \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$, amiből következik, hogy $\operatorname{supp}(u \times v) \subset \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Tegyük fel, hogy $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus (\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v)$. Ekkor feltehető, hogy például $x_0 \notin \operatorname{supp} u$, így x_0-nak van olyan $U_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt környezete, amelyen $u = 0$. Tekintsük az $U_{x_0} \times \mathbb{R}^m$ halmazt, amely nyilván nyílt környezete (x_0, y_0)-nak, továbbá minden $\varphi \in \mathscr{D}(U_{x_0} \times \mathbb{R}^m)$ függvényre az $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]$ hozzárendeléssel definiált függvény tartója része U_{x_0}-nak, ezért

$$u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} = 0.$$

Ebből következően $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$.
A másik irányú tartalmazáshoz legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $(x_0, y_0) \in \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ekkor x_0-nak minden U nyílt környezetéhez található olyan $\varphi_U \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_U \subset U$ és $u(\varphi_U) \neq 0$. Hasonlóan, y_0-nak minden V környezetéhez van olyan $\varphi_V \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ függvény, amelyre $\operatorname{supp} \varphi_V \subset V$ és $v(\varphi_V) \neq 0$. Az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus \operatorname{supp}(u \times v)$ feltétel miatt választhatunk olyan U_{x_0} és V_{y_0} környezeteket, amelyre $(U_{x_0} \times V_{y_0}) \cap \operatorname{supp}(u \times v) = \emptyset$. Ekkor a $\varphi(x, y) = \varphi_{U_{x_0}}(x) \varphi_{V_{y_0}}(y)$ függvényre $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$,

$$\operatorname{supp} \varphi \subset (U_{x_0} \times V_{y_0}) \cap \operatorname{supp}(u \times v) = \emptyset,$$

ezért a direkt szorzat definíciója alapján kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 = (u \times v)(\varphi) &= u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x) \varphi_{V_{y_0}}(y)]\} = \\ &= u(x \mapsto \varphi_{U_{x_0}}(x) v(\varphi_{V_{y_0}})) = u(\varphi_{U_{x_0}}) v(\varphi_{V_{y_0}}) \neq 0, \end{aligned}$$

ami ellentmondás.

9.35. Megoldás. A válasz: nem. A 9.34. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, tehát a direkt szorzatként előálló disztribúciók tartója is előáll direkt szorzat alakban. Azonban tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\delta_a + \delta_b \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ disztribúció tartója az $\{a, b\}$ halmaz (ezt hasonlóan láthatjuk be, mint ahogy a Dirac-delta disztribúció esetében, lásd a 9.16. Feladatot), amely nem áll elő direkt szorzat alakban.

9.36. Megoldás. A válasz: igen. A 9.34. Feladat alapján $\operatorname{supp}(u \times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$. Ebből következően, ha $u \times v = 0$, akkor $\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v = \emptyset$, vagyis $\operatorname{supp} u = \emptyset$ vagy $\operatorname{supp} v = \emptyset$, tehát $u = 0$ vagy $v = 0$.

9.37. Megoldás. Disztribúciók direkt szorzatának és deriváltjának definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén

$$\begin{aligned} \partial_y^\beta (u \times v)(\varphi) = (-1)^{|\beta|} (u \times v)(\partial_y^\beta \varphi) &= (-1)^{|\beta|} u\{x \mapsto v[y \mapsto \partial_y^\beta \varphi(x, y)]\} = \\ &= u\{x \mapsto \partial^\beta v[y \mapsto \varphi(x, y)]\} = (u \times (\partial^\beta v))(\varphi). \end{aligned}$$

A $\partial_x^\alpha(u \times v) = (\partial^\alpha)u \times v$ összefüggés teljesen hasonlóan igazolható.

9.38. Megoldás. A 9.65. Állítás alapján nyilván elég az egyik konvergenciát bizonyítanunk. Tegyük fel, hogy $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$, ekkor azt kell belátni, hogy minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ esetén $(u_j \times v)(\varphi) \to (u \times v)(\varphi)$, azaz

$$u_j\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\} \to u\{x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y)]\}.$$

A 9.63. Tételből következően $x \mapsto v[y \mapsto \varphi(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, így a fenti konvergencia a $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ konvergencia definíciója alapján adódik.

9.39. Megoldás. Világos, hogy az $(y,z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)$ függvény végtelen sokszor differenciálható. Belátjuk, hogy kompakt tartójú is. Valóban, az említett függvény pontosan akkor nem egyenlő 0-val, ha $y \in \operatorname{supp}\psi$, $z \in$ $\in \operatorname{supp}\chi$ és $y + z \in \operatorname{supp}\varphi$. Ez azt jelenti, hogy

$$y \in \operatorname{supp}\psi \cap (\operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp}\chi) = \bigcup_{w \in \operatorname{supp}\varphi} (\operatorname{supp}\psi \cap (w - \operatorname{supp}\chi)),$$

amely egy korlátos halmaz, hiszen rögzített w esetén $\operatorname{supp}\psi \cap (w - \operatorname{supp}\chi)$ egy féltér és annak normálisával párhuzamos tengelyű, de ellentétes irányú konvex körkúp metszete, tehát korlátos és $w \in \operatorname{supp}\varphi$, amely ugyancsak korlátos. Amennyiben y korlátos halmazt fut be, akkor $z = \operatorname{supp}\varphi - y$ is korlátos halmazt jár be. Mindezek alapján az $(y,z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y+z)$ függvény tartója korlátos, tehát $\mathbb{R}^{2n}$-ben kompakt.
Innen a bizonyítás a 9.85. Tétel bizonyításához hasonlóan történik a 9.31. Állítás, a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia és a Leibniz-szabály felhasználásával, mindezek végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

9.40. Megoldás. Disztribúciók konvolúciójának 9.82. Definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (\delta_a \times \delta_b)[(y,z) \mapsto \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)].$$

A 9.33. Feladat megoldásában igazoltuk, hogy $\delta_a \times \delta_b = \delta_{(a,b)}$, így a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia felhasználásával kapjuk, hogy

$$(\delta_a * \delta_b)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \zeta_k(a,b)\varphi(a+b) = \varphi(a+b) \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

tehát $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.
Hasonlóan, a 9.33. Feladat alapján

$$(\delta_a \times T_f)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(a,y))\,dy \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)),$$

ezért a $\zeta_k \xrightarrow{(*)} 1$ konvergencia figyelembe vételével

$$(\delta_a * T_f)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\zeta_k(a,z)\varphi(a,z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\varphi(a+z)\,dz.$$

9.41. Megoldás. A bizonyítás a függvények körében értelmezett konvolúcióra vonatkozó analóg állítás bizonyításához hasonlóan történik, valamint a példák is ennek megfelelően adódnak.
Megmutatjuk, hogy $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u*v)$, és így a komplementerek halmazokra $\operatorname{supp}(u*v) \subset \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ következik. Tegyük fel, hogy $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$, ekkor x-nek van olyan U_x környezete, hogy $U_x \cap \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v} = \emptyset$. Ha $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tetszőleges függvény, amelyre $\operatorname{supp}\varphi \subset U_x$, akkor a konvolúció definíciója alapján

$$(u*v)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (u\times v)[(y,z) \to \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)].$$

A 9.34. Feladat szerint $\operatorname{supp}(u\times v) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v$, vagyis az $(y,z) \to \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ függvényt elég $y \in \operatorname{supp} u$, $z \in \operatorname{supp} v$ esetén tekinteni, ám ekkor $y+z \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \subset \mathbb{R}^n \setminus U_x \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}\varphi$, azaz $(y,z) \to \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)$ azonosan 0. Azt kaptuk tehát, hogy

$$(u\times v)[(y,z) \to \zeta_k(y,z)\varphi(y+z)] = 0,$$

ezért $(u*v)(\varphi) = 0$, és így $x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(u*v)$.
Szigorú tartalmazáshoz tekintsük például az $u = T_0$ és $v = T_1$ disztribúciókat $\mathbb{R}^n$-en (azaz az azonosan 0 és azonosan 1 függvényekhez tartozó reguláris disztribúciókat). Ekkor a 9.13. Feladat alapján $\operatorname{supp} T_0 = \emptyset$, $\operatorname{supp} T_1 = \Omega$, továbbá nyilvánvalóan az azonosan 0 és azonosan 1 függvényeknek függvény értelemben létezik a konvolúciója, és az azonosan 0 függvénnyel egyenlő. Így a 9.84. Állításból következően $T_0 * T_1 = T_0$, ezért $\operatorname{supp}(T_0 * T_1) = \emptyset \subsetneq \Omega$.
A következőkben megadunk olyan f, g lokálisan integrálható függvényeket, amelyekre $\operatorname{supp}(f*g) = \overline{\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v}$ teljesül, ekkor a 9.84. Állítás alapján a $\operatorname{supp}(T_f * T_g) = \overline{\operatorname{supp} T_f + \operatorname{supp} T_g}$. Megjegyezzük, hogy a lezárás szükségessége azon az egyszerű észrevételen múlik, hogy két zárt halmaz összege nem feltétlenül zárt halmaz, azonban a tartóknak $\Omega = \mathbb{R}^n$ esetén zártaknak kell lenniük.
Mindenekelőtt tekintsük a $H_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 1/x\}$ és $H_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y = -1/x\}$ halmazokat, és feladatként mutassuk meg, hogy $H_1 + H_2 = \mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Ezután vegyünk K_1 és K_2 halmazokat, amelyekre $H_i \in \operatorname{int} K_i$, és a K_i halmaz területe 1 (ilyen van, hiszen a H_1, H_2 halmazok 0 területűek $\mathbb{R}^2$-ben).
Legyen f a K_1, illetve g a K_2 halmaz karakterisztikus függvénye (tehát az a függvény, amelynek értéke 1 az adott halmazon és 0 azon kívül). Világos, hogy $\operatorname{supp} f = K_1$, $\operatorname{supp} g = K_2$, és feladatként gondoljuk meg, hogy

$K_1 + K_2 = \mathbb{R}^2_+$. Állítjuk, hogy függvény értelemben létezik $f * g$, továbbá $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+} \supsetneq \mathbb{R}^2_+ = \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$. Ehhez egyrészt gondoljunk meg, hogy rögzített $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén az $(x, y) \mapsto f(x, y)g((x_0, y_0) - (x, y))$ függvény tartója a $K_1 \cap ((x, y) - K_2)$ halmaz. Az $(x, y) - K_2$ „lefelé álló félhiperbola tartomány" pontosan akkor metszi a K_1 „felfelé álló félhiperbola tartományt", ha K_2-t az x tengely fölé toljuk el, azaz $y > 0$. Ekkor a metszeten az $(x, y) \mapsto f(x, y)g((x_0, y_0) - (x, y))$ értéke 1, így e függvény integrálja $\mathbb{R}^2$-en a metszet területe, ami pozitív, de legfeljebb K_1 területe, vagyis 1. Azt kaptuk tehát, hogy $(f*g)(x, y)$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén létezik és legfeljebb 1 az értéke, tehát teljesülnek a 9.72. Definícióban megfogalmazott feltételek, ezért $f * g$ értelmes. Azt is láttuk, hogy $(f * g)(x, y) \neq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $y > 0$, és így $\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\mathbb{R}^2_+}$, hiszen $y < 0$ esetén minden pontnak van olyan környezete, ahol $f * g$ azonosan 0.

9.42. Megoldás. A 9.94. Állítás, valamint a 9.95. Következmény és a 9.46. Példa alapján

$$(u * v) * w = (T_H * \delta_0') * T_1 = (T_H' * \delta_0) * T_1 = (\delta_0 * \delta_0) * T_1 = T_1.$$

Ugyanakkor

$$u * (v * w) = T_H * (\delta_0' * T_1) = T_H * T_1' = T_H * T_{1'} = T_H * 0 = 0.$$

9.43. Megoldás. A konvolúció definíciója és a 9.66. Következmény alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$(T_1 * T_1)(\varphi) = \lim_{k\to\infty} (T_1 \times T_1)[(y, z) \to \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)] =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \zeta_k(y, z)\varphi(y + z)\, dy\, dz = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(y + z)\, dy\, dz.$$

Világos, hogy $\varphi = \eta_{0,1}$ esetén, ahol $\eta_{0,1}$ a (9.4) hozzárendeléssel $a = 0$, $r = 1$ esetén definiált függvény,

$$\operatorname{supp}[(y, z) \mapsto \varphi(y + z)] = \big\{(y, z) \in \mathbb{R}^{2n} : |y + z| \leq 1\big\}$$

egy végtelen sáv, így az $\eta_{0,1}$ szigorúan pozitív függvény integrálja végtelen, azaz $(T_1 * T_1)(\varphi) = \infty$, tehát $T_1 * T_1$ nem értelmezett.
Másrészt viszont, a 9.95. Következmény és a 9.42. Megjegyzés alapján

$$T_1 * (T_1 * \delta_0') = T_1 * T_1' = T_1 * T_{1'} = T_1 * T_0 = T_1 * 0 = 0.$$

9.44. Megoldás. A válasz: nem. Tekintsük például a $\partial^\alpha \delta_a$ és T_1 disztribúciókat, ahol T_1 az azonosan 1 lokálisan integrálható függvényhez tartozó reguláris disztribúció, valamint $|\alpha| \geq 1$ multiindex. Ezek nyilván nem azonosan nulla disztribúciók, azonban a 9.94. Állítás és a 9.42. Megjegyzés alapján

$$(\partial \delta_a) * T_1 = \delta_0 * (\partial^\alpha T_1) = \delta_0 * T_{\partial^\alpha 1} = \delta_a * T_0 = \delta_a * 0 = 0.$$

9.45. Megoldás. A 9.91. Állítás folytán $u_j * v = v * u_j$, ezért elég az egyik konvergenciát bizonyítanunk. A 9.85. Tételből következően

$$(u_j * v)(\varphi) = (u_j \times v)[(y, z) \mapsto \psi(z)\varphi(y + z)] \qquad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n}),$$

ahol $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, amelyre $\psi = 1$ a $\operatorname{supp} v$ halmazon (e felírás létezésénél felhasználjuk, hogy v kompakt tartójú). A 9.38. Feladat szerint $u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u$ esetén $u_j \times v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{2n})} u \times v$, így a fenti felírásból következően $u_j * v \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)} u * v$.

9.46. Megoldás. Szükséges és elégséges, hogy az (a_j) pontsorozatnak ne legyen torlódási pontja az Ω halmaz belsejében. Valóban, ellenkező esetben az a torlódási pont egy tetszőleges $B(a, r) \subset \Omega$ gömbi környezetéhez található olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvény, amelyre $\varphi = 1$ a $B(a, r)$ halmaz egy nyílt környezetében és $\varphi = 0$ egy nagyobb sugarú $B(a, R) \subset \Omega$ gömbön kívül (ilyen függvény létezését a 3.22. Állítás biztosítja). Ekkor $\sum_{j=1}^\infty \delta_{a_j}(\varphi) = \sum_{j=1}^\infty 1 = \infty$, tehát az összeg nem definiál valós értékű funkcionált sem. Ha az (a_j) sorozatnak nincs torlódási pontja Ω belsejében, akkor minden Ω-beli kompakt részhalmazban csak véges sok tagja lehet, tehát véges sok Dirac-delta összegéről van szó, és az nyilván disztribúció.
Megjegyezzük, hogy a fentiek alapján az (a_j) sorozatnak lehet torlódási pontja $\partial\Omega$-n, ehhez hasonló példa szerepelt a 9.8. Feladatban.

9.47. Megoldás. A válasz: igen. Legyen $a_j = 1/j$ $(j = 1{,}2\dots)$, és tekintsük az $u = \delta_0 + \sum_{j=1}^\infty \delta_{a_j}/2^j$ formális összeget. Gondoljuk meg, hogy tetszőleges $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvényt véve

$$|u(\varphi)| \leq |\varphi(0)| + \frac{1}{2}|\varphi(1)| + \ldots \leq \sup_{\mathbb{R}} |\varphi| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2 \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|,$$

tehát u értelmes $\mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ funkcionál. Sőt, vegyük észre, hogy lineáris is, hiszen képezhetjük két végtelen szumma összegét, mert nemnegatív sorok tetszőlegesen átrendezhetők. A fenti becslésből az is következik, hogy u nulladrendű. Végül gondoljuk meg (a Dirac-delta disztribúció esetéhez hasonlóan, lásd a 9.16. Feladatot), hogy $\operatorname{supp} u = \left\{0{,}1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots\right\}$, amely korlátos és zárt halmaz, tehát kompakt, sőt megszámlálható is. A 9.14. Feladat alapján nem üres megszámlálható tartójú disztribúció nem lehet reguláris, tehát u sem lehet reguláris. Ennek egy másik lehetséges bizonyítása, ha úgy járunk el, mint ahogy a Dirac-delta disztribúció esetében, lásd a 9.7. Feladatot.

9.48. Megoldás. Legyen $a \in K \subset \Omega$, ahol K kompakt halmaz (ilyen van, vegyük például egy megfelelően kis sugarú gömb lezártját). Az u disztribúció nulladrendű volta azt jelenti, hogy létezik $C_K > 0$ valós szám, amelyre $|u(\varphi)| \leq C_K \operatorname{supp}_K |\varphi|$. Legyen $(\psi_j) \subset \mathscr{D}(\Omega)$ sorozat, amelyre $\operatorname{supp} \psi_j \subset$ $\subset B(a,1/j)$, továbbá $\psi(x) = 1$, ha $x \in B(a,2/j)$ és $x \neq a$ esetén $\psi_j(x) \xrightarrow{j\to\infty}$ 0 (ehhez hasonló függvénysorozatot konstruáltunk például a 9.1. Feladat megoldásában). Elég nagy j-re $B(a,1/j) \subset K$, és így $\psi_j = 1$ a $\operatorname{supp} u =$ $= \{a\}$ halmaz egy környezetében, ezért a 9.31. Állítás alkalmazásával $|u(\varphi)| =$ $= |u(\varphi\psi_j)| \leq C_K \operatorname{supp}_K |\varphi\psi_j| \to C_K|\varphi(a)|$. Azt kaptuk tehát, hogy $|u(\varphi)| \leq$ $\leq C_K|\varphi(a)|$ minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Ebből következőn, ha $\varphi(a) = 0$, akkor $u(\varphi) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $u(\varphi)$ csak $\varphi(a)$-tól függ, így u linearitása és folytonossága miatt szükségképpen $u(\varphi) = C\varphi(a)$. Ez minden olyan $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ függvényre teljesül, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Mivel $K \subset \Omega$ tetszőleges kompakt halmaz, ezért $u(\varphi) = C\varphi(a)$ minden $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ esetén fennáll (ugyanazzal a C konstanssal).

9.49. Megoldás. Ha létezik v, amelyre $v' = u$, akkor a deriválás definíciója alapján $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ esetén $u(\varphi) = v'(\varphi) = -v(\varphi')$, tehát szükségképpen $v(\varphi') = -u(\varphi)$. Ez azt jelenti, hogy v értéke meg van határozva azokon a $\psi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvényeken, amelyek előállnak egy $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvény deriváltjaként. Az ilyen függvények éppen azok, amelyekre $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, hiszen ekkor az $\int_{-\infty}^{x} \psi + C$ integrálfüggvény kompakt tartójú, végtelen sokszor differenciálható és a deriváltja φ. Összefoglalva tehát, amennyiben $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$, akkor minden $C \in \mathbb{R}$ esetén

$$v(\psi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \psi + C\right). \tag{15.11}$$

Kérdés, hogy a többi függvényen milyen értéket kell v-nek felvennie. Válasszunk egy tetszőleges $\chi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$. Ekkor minden $\varphi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ függvény felírható

$$\varphi = \psi + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \chi$$

alakban, ahol

$$\int_{\mathbb{R}} \psi = \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{\mathbb{R}} \chi - \int_{\mathbb{R}} \varphi = 0.$$

Ezért a (15.11) összefüggés alapján

$$v(\varphi) = v(\psi) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \psi\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi) =$$
$$= -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) v(\chi).$$

Ez azt jelenti, hogy v szükségképpen az alábbi alakban írható fel:

$$v(\varphi) = -u\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + T_c(\varphi),$$

ahol c alkalmas (χ választásától függő) konstans. Nyilvánvaló, hogy ekkor v jól definiált, lineáris, és mivel u folytonos, ezért v is, valamint a konstrukció alapján $v'(\varphi) = -v(\varphi') = u(\varphi)$. Az is világos, hogy ha $v' = 0$, azaz $u = 0$, akkor $v = T_c$, tehát konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció. Ebből következően, ha $v_1' = v_2' = u$, vagyis $(v_1 - v_2)' = 0$, akkor $v_1 - v_2$ konstans függvényhez tartozó reguláris disztribúció.

9.50. Megoldás. Ha u rendje k, akkor minden $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmazhoz létezik $c_K > 0$ szám úgy, hogy

$$|u(\varphi)| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|$$

minden olyan $\varphi \subset \mathbb{R}$ függvényre, amelyre $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Ebből következően minden ilyen φ függvényre

$$|u'(\varphi)| = |u(\varphi')| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\varphi^{(j+1)}\right| \le c_K \cdot \sum_{j=0}^{k+1} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right|,$$

tehát u' rendje legfeljebb $k+1$. Másrészt a 9.49. Feladat megoldásában foglaltak alapján alkalmas c konstanssal

$$u(\varphi) = -u'\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right) + T_c(\varphi).$$

Ha u' rendje legfeljebb k lenne, akkor

$$|u(\varphi)| \le c_K \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\left(x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi - \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi\right) \int_{-\infty}^{x} \chi\right)^{(j)}\right| + |c| \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| \le$$
$$\le c_K \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| + c_K \sum_{j=0}^{k-1} \sup_K \left|\varphi^{(j)}\right| + c_K \operatorname{diam} K \sup_K |\varphi| C(\chi), \tag{15.12}$$

ahol

$$C(\chi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\chi| + \sum_{j=0}^{k} \sup_K \left|\chi^{(j)}\right|$$

adott konstans. Azonban a (15.12) becslés ekkor azt mutatja, hogy u rendje legfeljebb $k-1$, ami lehetetlen. Következésképpen u' rendje $k+1$. Megjegyezzük, hogy a $k=0$ esetben a (15.12) becslésben a szumma hiányozna, és így nem jutunk ellenmondásra. Ekkor az állítás nem is igaz, hiszen például a 0 disztribúció deriváltja önmaga, tehát a rend nem növekszik. A Dirac-delta nulladrendű disztribúció deriváltja viszont a 9.16. Feladat alapján elsőrendű.

15.2. Megoldások a 10. fejezet feladataihoz

10.1. Megoldás. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ a (10.16) feladat megoldása. Ekkor a 9.70. Állítás folytán $\partial_t^2(u \times h) = (\partial_t^2 u) \times h$, továbbá $j = 1, \ldots, n-1$ esetén $\partial_j^2(u \times h) = (\partial_j^2 u) \times h$, $j = n$ esetén pedig $\partial_n^2(u \times h) = u \times (\partial_n^2 h) = u \times$ $\times\, (k^2 h) = k^2(u \times h)$ (felhasználva a 9.69. Állítást). Ebből következően

$$F \times h = \left(\partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j u - k^2 u\right) = \partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v.$$

Végül a 9.71. Állítás alapján

$$\operatorname{supp} v = \operatorname{supp}(u \times h) = \operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} h \subset \overline{\mathbb{R}^n_+} \times \mathbb{R}^+ \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}.$$

10.2. Megoldás. Legyen $v \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ a (10.17) feladat megoldása. Belátjuk, hogy ekkor $\partial_n \left(\frac{1}{\tilde{h}} v\right) = 0$, és így a 9.32. Feladat alapján u nem függ az n-edik változótól, tehát tekinthető $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$-beli disztribúciónak.
A 10.5. Tétel szerint $v = (F \times h) * E$, ahol E az n-dimenziós hullámegyenlet alapmegoldása. A jelölések egyszerűsítése érdekében legyen

$$\tilde{x} := (t, x_1, \ldots, x_n), \quad \tilde{y} := (t, y_1, \ldots, y_n) \text{ és } \bar{x} := (t, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Mivel $h(x_n) = e^{kx_n}$ végtelen sokszor differenciálható pozitív valós függvény, ezért $1/\tilde{h}$ végtelen sokszor differenciálható $\mathbb{R}^{n+1}$-en. Legyenek $\psi, \chi \in$ $\in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ a 9.88. Állításban szereplő függvények, ekkor az idézett állítás alapján $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ esetén

$$\left(\frac{1}{\tilde{h}}v\right)(\varphi) = [(F \times h) * E]\left(\frac{1}{\tilde{h}}\varphi\right) =$$
$$= [F \times h) \times E]\big\{(\tilde{x},\tilde{y}) \mapsto \psi(\tilde{x})\chi(\tilde{y})e^{-k(x_n+y_n)}\varphi(\tilde{x}+\tilde{y})\big\} =$$
$$= E\big\{\tilde{y} \mapsto F[\bar{x} \mapsto h(x_n \mapsto \psi(\tilde{x})\chi(\tilde{y})e^{-k(x_n+y_n)}\varphi(\tilde{x}+\tilde{y}))]\big\} =$$
$$= E\left\{\tilde{y} \mapsto \chi(\tilde{y})e^{-ky_n}F\left[\bar{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x})\varphi(\tilde{x}+\tilde{y})\,dx_n\right]\right\}.$$

Ebből következően

$$\partial_n\left(\frac{1}{\tilde{h}}v\right)(\varphi) = -\left(\frac{1}{\tilde{h}}v\right)(\partial_n\varphi) =$$
$$= -E\left\{\tilde{y} \mapsto \chi(\tilde{y})e^{-ky_n}F\left[\bar{x} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x})\partial_n\varphi(\tilde{x}+\tilde{y})\,dx_n\right]\right\}. \tag{15.13}$$

Most válasszuk meg ψ-t a 9.88. Állításnak megfelelően oly módon, hogy csak t-től függjön (ez megtehető, lásd a 9.89. Megjegyzést). Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(\tilde{x})\partial_n\varphi(\tilde{x}+\tilde{y})\,dx_n = \psi(\tilde{x})\int_{\mathbb{R}} \partial_n\varphi(\tilde{x}+\tilde{y})\,dx_n = 0,$$

hiszen φ kompakt tartójú függvény. Ezzel beláttuk, hogy $\partial_n\left(\frac{1}{\tilde{h}}v\right) = 0$.
A rövidség kedvéért legyen $w := \frac{1}{\tilde{h}}v$, amelyre tehát $\partial_n w = 0$. A 9.45. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy $\partial_t^2 v = \tilde{h}\partial_t^2 w$, továbbá $j = 1, \ldots, n-1$ esetén $\partial_j^2 v = \tilde{h}\partial_j^2 w$, $j = n$ esetén pedig $\partial_n w = 0$ miatt $\partial_n v = (\partial_n^2\tilde{h})w = k^2\tilde{h}w$. Ennek megfelelően a (10.17) egyenlet

$$F \times h = \partial_t^2 v - \sum_{j=1}^{n} \partial_j v =$$
$$= \tilde{h}\left(\partial_t^2 w - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j w - k^2 w\right),$$

alakban írható, és így mindkét oldalt $1/\tilde{h}$-mal beszorozva a 9.69. Állítás felhasználásával kapjuk, hogy

$$\partial_t^2 w - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j w - k^2 w = F \times 1. \tag{15.14}$$

Legyen most $\varphi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ olyan, amelyre $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 = 1$, és definiáljuk az $u \in \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ disztribúciót az

$$u(\varphi) := w(\varphi \times \varphi_0)$$

összefüggéssel. Ekkor $\operatorname{supp} u \subset \operatorname{supp} w \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, továbbá a 9.70. Állításból következően $\partial_t^2 u(\varphi) = \partial_t^2 w(\varphi \times \varphi_0)$, hasonlóan $j = 1, \ldots, n-1$ esetén $\partial_j^2 u(\varphi) = \partial_j^2 w(\varphi \times \varphi_0)$, ezért a (15.14) egyenletből $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ esetén

$$\partial_t^2 u(\varphi) - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j^2 u(\varphi) - k^2 u(\varphi) = (F \times 1)(\varphi \times \varphi_0) = \\ = F\left\{\bar{x} \mapsto \varphi\left(\bar{x} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x_n)\, dx_n\right)\right\} = F(\varphi),$$

tehát u valóban megoldása a (10.16) feladatnak.

10.3. Megoldás. A 10.5. Tétel alapján $u_j = E * F_j$ és $u = E * F$. Ezenkívül a 9.88. Állításból következően $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ esetén

$$\begin{aligned}(E * F_j)(\varphi) &= (E \times F_j)[(y, z) \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z) = \\ &= F_j\{z \mapsto E[y \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z)]\},\end{aligned} \tag{15.15}$$

ahol ψ és χ a 9.88. Állításnak megfelelő függvények. Az $F_j \xrightarrow{\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})} F$ konvergencia folytán a (15.15) összefüggés jobb oldala $j \to \infty$ esetén az alábbi kifejezéshez tart

$$F\{z \mapsto E[y \mapsto \psi(y)\chi(z)\varphi(y + z)]\} = (E * F)(\varphi).$$

10.4. Megoldás. Az f, g, h függvények (10.18) alapján történő kiterjesztésével nyert $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{h}$ függvényekre nyilvánvalóan teljesül, hogy $\tilde{f} \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$, $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^3), \tilde{h} \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Ekkor a 10.12. Tétel alapján a

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}(0, \tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \partial_t \tilde{u}(0, \tilde{x}) = \tilde{h}(x) \quad (\tilde{x} \in \mathbb{R}^3) \tag{15.16}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^4_+})$ megoldása, mégpedig

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t, \tilde{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{f}(t - |\tilde{x} - \tilde{\xi}|, \tilde{\xi})}{|\tilde{x} - \tilde{\xi}|}\, d\tilde{\xi} + \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} \int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{h}\, d\sigma.\end{aligned} \tag{15.17}$$

A fenti formulában szereplő integrálokat úgy alakítjuk, hogy a 10.14 formulát nyerjük. Vegyük észre egyrészt, hogy

$$\int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{g}\, d\sigma = 2t \int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x - \xi|^2}}\, d\xi, \tag{15.18}$$

és hasonlóan

$$\int_{S(\tilde{x},t)} \tilde{h}\, d\sigma = 2t \int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2 - |x-\xi|^2}}\, d\xi. \tag{15.19}$$

Másrészt pedig

$$\begin{aligned}
\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{f}(t-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|,\tilde{\xi})}{|\tilde{x}-\tilde{\xi}|}\, d\tilde{\xi} &= \int_0^t \int_{S(\tilde{x},\tau)} \frac{\tilde{f}(t-\tau,\tilde{\xi})}{\tau}\, d\tilde{\xi}\, d\tau = \\
&= \int_0^t \int_{B(x,\tau)} \frac{2\tau f(t-\tau,\xi)}{\tau\sqrt{\tau^2-|x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau = \\
&= \int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{2f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau)^2-|x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau.
\end{aligned} \tag{15.20}$$

Most a (15.18), a (15.19) és (15.20) összefüggéseket a (15.17) formulába helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t,\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi} &\int_0^t \int_{B(x,t-\tau)} \frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{(t-\tau^2)-|x-\xi|^2}}\, d\xi\, d\tau + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,t)} \frac{g(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\, d\xi\right) + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{h(\xi)}{\sqrt{t^2-|x-\xi|^2}}\, d\xi.
\end{aligned} \tag{15.21}$$

Mivel $\tilde{u}$ nem függ az x_3 változótól, ezért $\partial_3 \tilde{u} = 0$, így (15.16) és a (10.18) megfeleltetés alapján az $u(t,x) = \tilde{u}(t,\tilde{x})$ függvényre

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f, \quad u(0,x) = g(x), \quad \partial_t u(0,x) = h(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2),$$

tehát a (15.21) formulával értelmezett függvény kielégíti a kétdimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot.

10.5. Megoldás. Tegyük fel, hogy $f \in C^2(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g \in C^3(\mathbb{R})$ és $h \in C^2(\mathbb{R})$, ekkor a (10.19) kiterjesztésével nyert $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}$ függvényekre nyilvánvalóan $\tilde{f} \in$ $\in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{h} \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ekkor a 10.12. Tétel alapján a

$$\partial_t^2 \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = \tilde{f}, \quad \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{g}(\tilde{x}), \quad \partial_t \tilde{u}(0,\tilde{x}) = \tilde{h}(x) \quad (\tilde{x} \in \mathbb{R}^2) \tag{15.22}$$

klasszikus Cauchy-feladatnak létezik egyetlen $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$ megoldása, mégpedig

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(t,\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t \int_{B(\tilde{x},t-\tau)} &\frac{\tilde{f}(\tau,\tilde{\xi})}{\sqrt{(t-\tau^2)-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\,d\tau + \\
&+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\right) + \\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}.
\end{aligned}
\tag{15.23}
$$

A $B(\tilde{x},t)$ gömbön vett integrált a $B(\tilde{0},t)$ gömbre transzformálva a Fubini-tétel és $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)$ felhasználásával

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi} = \\
&= \int_{B(\tilde{0},t)} \frac{\tilde{h}(\tilde{\xi}-\tilde{\eta})}{\sqrt{t^2-|\tilde{\eta}|^2}}\,d\tilde{\eta} = \\
&= \int_{B(0,t)} h(x-\eta_1)\int_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}} \frac{1}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}}\,d\eta_2\,d\eta_1 = \\
&= \int_{B(0,t)} h(x-\eta_1)\left[\arcsin\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{t^2-\eta_1^2-\eta_2^2}}\right)\right]_{-\sqrt{t^2-\eta_1^2}}^{\sqrt{t^2-\eta_1^2}}\,d\,d\eta_1 = \\
&= \pi\int_{x-t}^{x+t} h(s)\,ds.
\end{aligned}
\tag{15.24}
$$

Teljesen hasonlóan adódik, hogy

$$
\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi} = \pi\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds,
$$

így a $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R}^2)$ simasági feltétel miatt

$$
\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(\tilde{x},t)} \frac{\tilde{g}(\tilde{\xi})}{\sqrt{t^2-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\right) = \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)). \tag{15.25}
$$

Végül a fentiek mintájára

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{B(\tilde{x},t-\tau)}\frac{\tilde{f}(\tau,\tilde{\xi})}{\sqrt{(t-\tau^2)-|\tilde{x}-\tilde{\xi}|^2}}\,d\tilde{\xi}\,d\tau =\\ =\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,s)\,ds\,d\tau.\end{aligned}\tag{15.26}$$

A (15.26), (15.25), és (15.24) összefüggések alapján

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t,\tilde{x}) = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau +\\ +\frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(\xi)\,d\xi.\end{aligned}\tag{15.27}$$

Az $u(t,x)=\tilde{u}(t,\tilde{x})$ megfeleltetés és a (15.22) feltételek folytán

$$\partial_t^2 u-\partial_x^2 u = f,\quad u(0,x)=g(x),\quad \partial_t u(0,x)=h(x)\quad (x\in\mathbb{R}),$$

tehát a (15.27) formulával értelmezett függvény kielégíti az egydimenziós hullámegyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot. Vegyük észre még azt, hogy minden $f\in C^2(\overline{\mathbb{R}^3_+})$, $g\in C^3(\mathbb{R}^2)$ és $h\in C^2(\mathbb{R}^2_+)$ helyett a gyengébb $f\in C^1(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, $g\in C^2(\mathbb{R})$, $h\in C^1(\mathbb{R})$ feltételek mellett is érvényben marad.

15.3. Megoldások a 11. fejezet feladataihoz

11.1. Megoldás. Vegyük észre (ahogyan a 11.12. Tétel előtt is megjegyeztük), hogy a 9.46. Példa, a 9.70. Állítás és a 9.66. Következmény alapján

$$\delta\times T_g = T_H'\times T_g = \partial_t(T_H\times T_g)=\partial_t T_{H\times g},$$

ahol H a Heaviside-függvény. Mivel $H\times g\in\mathscr{M}$, sőt $H\times g\in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, ezért $\delta\times T_g\in\tilde{\mathscr{M}}$, tehát létezik $(\delta\times g)*E$, továbbá a 9.94. Állítás folytán

$$(\delta\times g)*E=\partial_t[(H\times g)*E]=\partial_t[E*(H\times g)].$$

11.2. Megoldás. Mivel $H\times g\in\mathscr{M}$, mégpedig

$$(H\times g)(t,x)=H(t)g(x),$$

ezért

$$\begin{aligned}[E*(H\times g)](t,x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)H(t-\tau)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau.\end{aligned} \tag{15.28}$$

Belátjuk, hogy minden rögzített $x\in\mathbb{R}^n$ esetén a

$$t\mapsto \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)H(t-\tau)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d\tau \tag{15.29}$$

függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, folytonosan differenciálható az $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ halmazon, a deriváltja $t<0$ esetén 0, $t>0$ esetén pedig a

$$t\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\,d \tag{15.30}$$

függvény, amely a lokálisan integrálható $\mathbb{R}$-en. Ekkor a 9.49. Példa szerint a $\partial_t[E*(H\times g)]$ disztribúció értelemben vett derivált a (0 pont kivételével definiált) klasszikus deriválthoz tartozó reguláris disztribúció.

A (15.29) függvény folytonossága a (15.28) összefüggésből az integrálfüggvény folytonossága alapján következik. Az E alapmegoldás (11.5) formulájából nyilvánvaló, hogy a (15.29) függvény $t<0$ esetén azonosan 0, így a deriváltja is 0. Másrészt, az $\eta:=\xi/2\sqrt{\tau}$ helyettesítést alkalmazva $d\xi=(2\sqrt{\tau})^n d\eta$, így

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right)d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-|\eta|^2)g(x-2\sqrt{\eta})\,d\eta,\end{aligned}$$

ezért a paraméteres integrál folytonossági tételéből (lásd a 2.16. Tételt) adódóan a (15.30) függvény folytonos $t>0$ esetén. Ebből következően a (15.29) függvény $t>0$ esetén is folytonosan differenciálható, és a deriváltja a (15.30) függvény.

Végül a (15.30) függvény a 0 környezetében is integrálható (másutt a folytonosságából következően), hiszen a 8.2. Állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_0}\left|\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)g(x-\xi)\,d\xi\right| d\tau \le \\ &\le \int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)|g(x-\xi)|\,d\xi\,d\tau \le \\ &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\cdot\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}^n} E(\tau,\xi)\,d\xi\,d\tau = t_0\cdot\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

11.3. Megoldás. Az $\eta := (x-\xi)/2\sqrt{t-\tau}$ és $\tilde{\tau} := t-\tau$ helyettesítéseket alkalmazva $d\xi = (-1)^n(2\sqrt{t-\tau})^n d\eta$, $d\tau = -d\tilde{\tau}$, így a (8.16) formulából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tilde{\tau}, x-2\sqrt{\tilde{\tau}}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta\, d\tilde{\tau} + \\ &+ \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) d\xi. \end{aligned} \tag{15.31}$$

A (15.31) jobb oldalának első tagja a 2.17., 2.18. Tételek folytán a $C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ térben van. A második tag t szerinti $t>0$ esetén $\mathbb{R}^{n+1}_+$-on való folytonos differenciálhatósága (sőt, valójában végtelen sokszor való differenciálhatósága) a 2.17. Tételből következik, hiszen az integrandus és a deriváltja tetszőleges (t_0,∞) $(t_0>0)$ intervallumon az alábbi módon becsülhető:

$$\begin{aligned} \left| g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t_0}\right), \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| &= \left| g(\xi) \frac{|x-\xi|^2}{4t^2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right) \right| \le \\ &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \frac{|x-\xi|^2}{4t_0^2} \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t_0}\right), \end{aligned}$$

amelyek integrálható függvények. Az x szerinti folytonos differenciálhatóság hasonló módon igazolható, véges halmazt véve az első és másodrendű parciális deriváltaknak létezik integrálható majoránsuk. A részletes bizonyítást az Olvasóra bízzuk.

Az $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ feltételhez a (15.31) formulát alakítjuk tovább, a jobb oldal második tagjában az $\eta := \xi/2\sqrt{t}$ helyettesítést végrehajtva:

$$\begin{aligned} u(t,x) = &\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t-\tilde{\tau}, x-2\sqrt{\tilde{\tau}}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta\, d\tilde{\tau} + \\ &+ \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x-2\sqrt{t}\eta) \exp(-|\eta|^2)\, d\eta. \end{aligned}$$

Ebből a 2.16. és 2.17. Tételek felhasználásával $u \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ adódik, sőt a 2.15. Állítás folytán $u(0,x) = g(x)$ is nyilvánvalóan következik.

A 10.5. Tétel alapján az általánosított Cauchy-feladatnak az $F := T_{\tilde{f}} + \delta \times$ $\times\, T_g$ jobb oldalhoz tartozó $v \in \tilde{\mathscr{M}}$ egyértelműen meghatározott megoldása $v = E * F$. A 11.1–11.2. Feladatokból következően az $E * F$ disztribúció éppen a (8.16) formulával értelmezett lokálisan integrálható u függvényhez tartozó reguláris disztribúció. A 11.3. Feladat szerint $u \in C^{1,2}(\mathbb{R}^{n+1}_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, és $u(0,x) = g(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, így a 11.4. Állításból adódóan u kielégíti a klasszikus Cauchy-feladatot.

11.4. Megoldás. Az $\eta := (x-\xi)/2\sqrt{t-\tau}$ helyettesítéssel

$$d\xi = (-1)^n (2\sqrt{t-\tau})^n d\eta,$$

így a 2.15. Állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)} \right) d\xi \, d\tau \right| = \\
&= \left| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x - 2\sqrt{t-\tau}\eta) \exp(-|\eta|^2) \, d\eta \, d\tau \right| \le \\
&\le t \|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Másrészt, az $\eta := (x - \xi/2\sqrt{\tau})$ helyettesítés alkalmazásával $|d\xi| = (2\sqrt{\tau})^n d\eta$, így a 2.15. Állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{4t} \right) d\xi \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - 2\sqrt{\tau}\eta) \exp\left(-|\eta|^2\right) \, d\eta \right| \le \\
&\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

ezért a (8.16) formulából közvetlenül adódik, hogy

$$|u(t,x)| \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + t\|f\|_{L^\infty((0,t)\times\mathbb{R}^n)} \qquad (t \ge 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

15.4. Útmutatások a 12. fejezet feladataihoz

12.6. Megoldás. Rögzítsünk egy olyan $u \in H^1(\mathbb{R})$ függvényt, amely eltűnik egy egységintervallumon kívül, és amelyre

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$$

Akkor az $u_n(x) := u(x+n)$ eltolt függvények ortonormált sorozatot alkotnak $L^2(\mathbb{R})$-ben. Márpedig egy Hilbert-térbeli ortonormált sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata.

12.8. Megoldás. Ha $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, akkor minden elég kis $r > 0$-ra fennállnak az

$$\int_{\substack{x\in\Omega\\|x|>r}} u(\partial_j \varphi)\ dx = -\int_{\substack{x\in\Omega\\|x|>r}} (\partial_j u)\varphi\ dx + \int_{|x|=r} u\varphi\nu_j\ d\Gamma$$

egyenlőségek minden $j = 1, \ldots, N$-re. Innen $r \to 0$ mellett az állítás adódik.

12.15. Megoldás. Válasszunk egy olyan $u \in H_0^1(a,b)$ függvényt, amelyre $u(c) > 0$, és legyen $u_n(x) = \min\{u(x), n\,|x-c|\}$, $x \in (a,b)$, $n = 1,2,\ldots$. Akkor $u_n \in H_0^1(a,b)$, $u_n(c) = 0$, és $u_n \to u$ $L^2(a,b)$-ben. Ha valamely $f \in$ $\in L^2(a,b)$ függvényre $\int_a^b fu_n\ dx = u_n(c)$ volna minden n esetén, akkor innen az

$$\int_a^b fu\ dx = \lim \int_a^b fu_n\ dx = \lim u_n(c) = \lim 0 = 0 \neq u(c)$$

ellentmondás adódna.

Ha például speciálisan $u(a) = u(b) = 0$, $u(c) = 1$, és u affin az $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumokban, akkor u_n affin az $[a, c-n^{-1}]$, $[c-n^{-1}, c]$, $[c, c+n^{-1}]$, $[c+n^{-1}, b]$ intervallumokban, és

$$\int_a^b |u_n - u|^2\ dx \leq 2/n \to 0.$$

12.16. Megoldás. Ha $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, akkor minden elég kis $r > 0$-ra fennállnak az

$$\int_{\substack{x\in\Omega\\|x|>r}} u(\partial_j \varphi)\ dx = -\int_{\substack{x\in\Omega\\|x|>r}} (\partial_j u)\varphi\ dx + \int_{|x|=r} u\varphi\nu_j\ d\Gamma$$

egyenlőségek minden $j = 1, \ldots, N$-re. Innen $r \to 0$ mellett az állítás adódik.

12.17. Megoldás. Explicit számolás az $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$ képletből kiindulva.

12.18. Megoldás. Ha $\alpha < 0$, akkor $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, ahonnan $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$.

Ha $\alpha > 1 - \frac{N}{2}$, akkor

$$\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2\ dx = \int_{|x|<R} |x|^{2\alpha} + \alpha^2\,|x|^{2\alpha-2}\ dx < \infty,$$

mert $2\alpha - 2 > -N$. (Ugyanez a konklúzió adódik $N = 2$ és $\alpha \geq 0$ esetén.)

Ha $\alpha > 1 - \frac{N}{2}$, akkor $\alpha > 1 - N$, és így

$$\lim_{x\to 0} |x|^{N-1} u(x) = |x|^{N-1+\alpha} = 0.$$

12.19. Megoldás. Használjuk a minden $\varepsilon > 0$-ra érvényes

$$\ln t = o(t^{-\varepsilon}), \quad t \searrow 0$$

relációkat.

12.20. Megoldás. Ha $\beta > 0$, akkor $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, ahonnan $u \notin L^\infty(\Omega)$ és $u \notin C(\Omega)$.
Ha $\beta < 1/2$, akkor

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2 + |\nabla u|^2 \ dx &= \int_{|x|<R} \big|\ln |x|\big|^{2\beta} + \Big|\beta\big|\ln |x|\big|^{\beta-1} |x|^{-1}\Big|^2 \ dx = \\ &= 2\pi \int_0^R r \left|\ln r\right|^{2\beta} + \beta^2 \left|\ln r\right|^{2\beta-2} r^{-1} \ dr < \infty,\end{aligned}$$

mert $2\beta - 2 > -1$.
Végül $\lim_{x\to 0} |x|\, u(x) = 0$.
Ugyanez a konklúzió adódik $n \geq 3$ és tetszőleges $\beta \in \mathbb{R}$ esetén.

12.22. Megoldás. Az

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} c_k e^{\frac{2\pi i}{a}(k,x)}$$

jelöléssel élve az eredmény a következő három azonosságból adódik:

$$\begin{aligned}\int_C |u|^2 \ dx &= a^N \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |c_k|^2, \\ \int_C |\nabla u|^2 \ dx &= \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 a^N \sum_{k\in\mathbb{Z}^N} |k|^2 |c_k|^2, \\ \left|\int_C u \ dx\right|^2 &= a^{2N} |c_0|^2.\end{aligned}$$

Pontosan akkor áll egyenlőség, ha alkalmas c_j konstansokkal

$$u(x) = c_0 + \sum_{j=1}^N c_j e^{\frac{2\pi i}{a} x_j}.$$

15.5. Útmutatások a 13. fejezet feladataihoz

13.2. Megoldás. Bevezetve f második primitív függvényét, alkalmas c, d konstansokkal először az

$$u'(x) = c - \int_a^x f(t)\ dt,$$

majd az

$$\begin{aligned} u(x) &= cx + d - \int_a^x \left(\int_a^y f(t)\ dt \right)\ dy = \\ &= cx + d - \int_a^x \left(\int_t^x f(t)\ dy \right)\ dt = \\ &= cx + d - \int_a^x (x-t) f(t)\ dt \end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk.
Az $u(a) = u(b) = 0$ feltételek segítségével meghatározható c és d; végül az

$$u(x) = \frac{x-a}{b-a} \int_a^b (b-t) f(t)\ dt - \int_a^x (x-t) f(t)\ dt$$

képletet kapjuk.

13.3. Megoldás. Minthogy u folytonos, és $u'' = 0$ az (a, c) és (c, b) intervallumokban, olyan megoldást keresünk, amelyik lineáris ezekben az intervallumokban, és eltűnik az a, b pontokban. Konstans szorzótól eltekintve egyetlen ilyen függvény van: alkalmas α konstanssal

$$u(x) = \begin{cases} \alpha(b-c)(x-a) & [a, c]\text{-ben}, \\ \alpha(b-x)(c-a) & [c, b]\text{-ben}. \end{cases}$$

Minthogy ekkor tetszőleges $v \in H_0^1(a, b)$-re

$$\begin{aligned} \int_a^b u'v'\ dx &= \alpha(b-c) \int_a^c v'(x)\ dx - \alpha(c-a) \int_c^b v'(x)\ dx = \\ &= \alpha(b-a) v(c), \end{aligned}$$

látható, hogy az $\alpha = 1/(b-a)$ választással

$$\int_a^b u'v'\ dx = v(c)$$

minden $v \in H_0^1(a, b)$-re, vagyis v gyenge megoldás.

13.4. és 13.5. Megoldás. Felejtsük el egyelőre a peremfeltételeket, és keressük meg differenciálegyenlet általános megoldását az állandók variálásának a módszerével. A homogén egyenlet megoldása jól ismert: alkalmas c, d konstansokkal

$$u(x) = ce^x + de^{-x}.$$

Keressük az inhomogén egyenlet megoldását alkalmas $c(x), d(x)$ függvényekkel az

$$u(x) = c(x)e^x + d(x)e^{-x}$$

alakban, akkor

$$u'(x) = \left(c(x)e^x - d(x)e^{-x}\right) + \left(c'(x)e^x + d'(x)e^{-x}\right).$$

A képlet egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy

$$c'(x)e^x + d'(x)e^{-x} = 0,$$

akkor ismételt deriválással az

$$\begin{aligned} u''(x) &= \left(c(x)e^x + d(x)e^{-x}\right) + \left(c'(x)e^x - d'(x)e^{-x}\right) = \\ &= u(x) + \left(c'(x)e^x - d'(x)e^{-x}\right) \end{aligned}$$

egyenlet adódik.
A

$$c'(x)e^x + d'(x)e^{-x} = 0 \quad \text{és} \quad c'(x)e^x - d'(x)e^{-x} = -f(x),$$

illetve az ekvivalens

$$c'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}f(x) \quad \text{és} \quad d'(x) = \frac{1}{2}e^x f(x)$$

egyenletrendszert megoldva, alkalmas c_0, d_0 konstansokkal végül is

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(c_0 + \int_a^x -\frac{1}{2}e^{-t}f(t)\ dt\right)e^x + \left(d_0 + \int_a^x \frac{1}{2}e^t f(t)\ dt\right)e^{-x} = \\ &= c_0e^x + d_0e^{-x} + \int_a^x f(t)\sinh(t-x)\ dt \end{aligned}$$

adódik.
A c_0, d_0 konstansok konkrét értéke az aktuális peremfeltételekből meghatározható.

13.6. Megoldás. Vezessük be r/p-nek egy R primitív függvényét, és írjuk át a feladatot a

$$\begin{cases} -\left(pe^{-R}u'\right)' + qe^{-R}u = fe^{-R} & (a, b)\text{-ben}, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

alakba.
Alternatív megoldásként alkalmazzuk a Lax–Milgram-tételt.

Irodalomjegyzék

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] S. Agmon – A. Douglis – L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value condition, *Comm. Pure Appl. Math.* **12** (1959), 623–727.

[3] V. I. Arnold, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

[4] V. I. Arnold, On teaching of mathematics, *Russian Math. Surveys* **53** (1998), no. 1, 229–236.

[5] I. Babuška, Error-bounds for finite element method, *Numer. Math.* **16** (1971), 322–333.

[6] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Verlag von Veit., Leipzig, 1916.

[7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle (Théorie et applications)*, Masson, Paris, 1983.

[8] H. Brezis, F. Browder, Partial Differential Equations in the 20th Century, *Adv. Math.* **135** (1998), 76–144.

[9] I. G. Bubnov, On the stability of elastic systems (orosz nyelven), *Sbornik St. Petersburg Inst. Inzh. Put. Soobsch.* **81** (1913), 33–36.

[10] A. Calderón – A. Zygmund, On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.* **88** (1952), 85–139.

[11] A. Calderón – A. Zygmund, On singular integrals, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 289–309.

[12] G. Chilov, *Analyse mathématique, fonctions de plusieurs variables réelles I–II*, Éditions Mir, Moscou, 1978.

[13] Czách László – Simon László, *Parciális differenciálegyenletek (1. félév)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[14] J. D'Alembert, Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration, *Histoire de l'Academie Royale, Berlin, 3, 1747* (1749), 214–219.

[15] J. D'Alembert, Suites des recherches, *Histoire de l'Academie Royale, Berlin, 3, 1747* (1749), 220–249.

[16] E. de Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **3** (1957), 25–43.

[17] L. Dirichlet, Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist, *Abh. Preuss. Akad. Wiss.*, 1850, 99–116.

[18] G. Duvaut – J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.

[19] A. Einstein, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Annalen der Physik* **322** (1905), 549–560.

[20] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, AMS, Providence, RI, 2010.

[21] G. M. Fichtenholz, *Differential- und Integralrechnung I–III*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975–1987.

[22] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, Paris, 1822.

[23] I. Fredholm, Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet, *Öfversigt Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar* **57** (1900), 39–46.

[24] I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.* **27** (1903), 365–390.

[25] A. P. French, *Vibrations and Waves*, The MIT Introductory Physics Series, W. W. Norton & Company Inc, New York, 1971.

[26] K. O. Friedrichs, Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendungen der direkten Methoden der Variationsrechnung), *Math. Ann.* **98** (1928), 205–247.

[27] K. O. Friedrichs, The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **55** (1944), 132–151.

[28] E. Gagliardo, Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, *Ricerce Mat.* **7** (1958), 102–137.

[29] B. G. Galerkin, On electrical circuits for the approximate solution of the Laplace equation (orosz nyelven), *Vestnik Inzh.* **19** (1915), 897–908.

[30] L. Gårding, An inequality for hyperbolic polynomials, *J. Math. Mech.* **8** (1959) 957–965.

[31] D. Gilbarg – N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol 224, Springer-Verlag, New York, 1977.

[32] Gnädig Péter, *Bevezetés a disztribúcióelméletbe és a fizikai alkalmazásaiba*, ELTE egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[33] G. Green, *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Printed for the Author by T. Wheelhouse, Nottingham, 1828.

[34] K. Gustafson, A. Takehisa. (Victor) Gustave Robin: 1855–1897, *The Mathematical Intelligencer* **20** (1998), 47–53.

[35] K. Gustafson, T. Abe, The third boundary condition – was it Robin's?, *The Mathematical Intelligencer* **20** (1998), 63–71.

[36] J. Hadamard, Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Princeton University Bulletin* **13** (1902), 49–52.

[37] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, New Haven, 1923.

[38] Halász Gábor, *Bevezető komplex függvénytan*, Komplex függvénytani füzetek II, ELTE, Budapest, 2002.

[39] A. Harnack, *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene*, Teubner, Leipzig, 1887.

[40] M. R. Hestenes, Extensions of the range of a differentiable function, *Duke Math. J.* **8** (1941), 183–192.

[41] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV*, Springer, Berlin, 1983–1985.

[42] J. Horváth, An introduction to distributions, *Amer. Math. Monthly* **77** (1970), 227–240.

[43] F. John, Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, 1982.

[44] M. Kac, Can one hear the shape of a drum?, *Amer. Math. Monthly* **73** (1966), 1–23.

[45] G. Kirchhoff, Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *J. Reine Angew. Math.* **40** (1850), 51–89.

[46] A. N. Kolmogorov – Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[47] Komornik Vilmos, *Valós analízis előadások I–II.*, TypoTEX, Budapest, 2003.

[48] Komornik Vilmos, *Introduction aux EDP*, kézirat (23 o.), Strasbourg, 2007.

[49] P. D. Lax – A. Milgram, Parabolic equations, in: *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, No. 33. Princeton University Press, 1954.

[50] L. Lichtenstein, Eine elementare Bemerkung zur reellen Analysis, *Math. Zeit.* **30** (1929), 794–795.

[51] J.-L. Lions – E. Magenes, *Probleèmes aux limites non homogenes et applications 1–3*, Dunod, Paris, 1968.

[52] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[53] E. Magenes – G. Stampacchia, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **12** (1958), 247–358.

[54] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873.

[55] E. J. McShane, Extension of range of functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40** (1934), 837–842.

[56] N. Meyers, J. Serrin, $H = W$, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51** (1964), 1055–1056.

[57] C. S. Morawetz (ed.), *Kurt Otto Friedrichs, Selecta*, Vol. 1, Birkhäuser Verlag, 1986.

[58] J. Moser, A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 457–468.

[59] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **14** (1961), 577–591.

[60] R. Murphy, *Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, Part I, On Electricity*, Printed at the Pitt Press by John Smith, Cambridge, 1833.

[61] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 931–954.

[62] J. Naumann, Remarks on the prehistory of Sobolev spaces, Preprint Nr. 02-2, Inst. für Mathematik, Humboldt Univ., Berlin, 2002., elektronikusan elérhető:
`www.mathematik.hu-berlin.de/publ/pre/2002/P-02-2.ps`

[63] C. G. Neumann, Zur Theorie des Logaritmischen und des Newton'schen Potentials I–II., *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* **22** (1870), 49–56, 264–321.

[64] C. G. Neumann, *Untersuchungen über das logaritmische und Newton'sche Potential*, Leipzig, 1877.

[65] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, *Ann. Sc. Norm. Pisa* **13** (1959), 115–162.

[66] Petruska György, *Analízis II.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1999.

[67] H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *Amer. J. Math.* **12** (1890), 211–294.

[68] H. Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **8** (1894), 57–156.

[69] P. A. Raviart – J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris, 1983.

[70] F. Rellich, Ein Satz über mittlere Konvergenz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1930), 30–35.

[71] W. Ritz, Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1908), 1–61.

[72] W. Rudin, *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[73] W. Rudin, *Functional Analysis*, 2. kiadás, McGraw Hill, New York, 1991.

[74] L. Schwartz, Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble* **21** (1945), 57–74.

[75] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1950–1951.

[76] L. Schwartz, Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954), 847–848.

[77] L. Schwartz, Un mathématicien aux prises avec le siecle, Odile Jacob Paris, 1997.

[78] H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Flächenhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, *Acta Soc. Sci. Fenn.* **15** (1885), 315–362.

[79] Simon László, *Parciális differenciálegyenletek (2. félév)*, Eötvös Loránd Tudományegyetem jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[80] Simon László – E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

[81] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 258, Springer-Verlag, New York, 1983.

[82] S. L. Sobolev, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Mat. Sb.* **43** (1936), 39–72.

[83] S. L. Sobolev, A funkcionálanalízis egy tételéről (oroszul), *Mat. Sb.* **46** (1938), 471–497.

[84] S. L. Sobolev, A funkcionálanalízis néhány alkalmazása a matematikai fizikában (orosz nyelven), Leningrad Univ., Leningrad, 1950. (Angol fordításban: Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

[85] G. Stampacchia, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C. R. Acad. Sci.* **258** (1964), 4413–4416.

[86] V. A. Steklov, A matematikai fizika differenciálegyenleteiről (oroszul), *Math. Sb.* **19** (1896–97), 469–585.

[87] Stoyan Gisbert – Takó Galina, *Numerikus módszerek 3.*, TypoTEX Kiadó, Budapest, 1997.

[88] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), On the theory of resonance, *Phil. Trans. Royal Soc.*, Series A **161** (1870), 77–118.

[89] C. Sturm, J. Liouville, Extrait d'un mémoire sur le développement des fonctions en séries dont les différents termes sont assujétis a satisfaire a une meme équation différentielle linéaire, contenant un parametre variable, *J. Math. Pures Appl.* **2** (1837), 220–222.

[90] W. Thomson [Lord Kelvin], Note sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusiers questions de physique mathématique, *J. Math. Pures Appl.* **12** (1847), 493–496.

[91] H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, *J. Reine Angew. Math.* **145** (1915), 9–14.

[92] A. N. Tyihonov, Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur, *Math. Sb.* **42** (1935), 199–216.

[93] P. Urysohn, Über die Machtigkeit der zusammenhangenden Mengen, *Math. Ann.* **94** (1925), 262–295.

[94] V. Sz. Vlagyimirov, *Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[95] V. Sz. Vlagyimirov, *Parciális differenciálegyenletek feladatgyűjtemény*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

[96] K. Weierstrass, Über das sogenannte Dirichlet'sche Prinzip, Gelesen in der Königl. Akad. Wiss. 14 Juli 1870, In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass, 2 Band, Abhandlungen II, Berlin, Mayer & Müller, 1895.

[97] H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.* **1** (1940), 414–444.

[98] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **36** 1934), 63–89.

Tárgymutató

Névmutató