Vírus terjedésének modellje

Polcz Péter

2011. január 16.

Legyen a város lakosainak száma N, a betegek száma az n-edik napon pedig Y_n. Ekkor az egészségesek száma: $N - Y_n$. Továbbá minden egészséges ember egy fertőzöttel való találkozás esetén λ valószínűséggel megbetegedhet, és egy nap alatt minden beteg ember μ valószínűséggel meggyógyulhat. Feltételezzük, hogy egy ember egy nap alatt csak egy emberrel találkozhat.

Ekkor egy Δt idő alatt a megbetegedések valószínűsége: $\frac{\Delta t}{1 \text{ nap}}\lambda$, a meggyógyulásoké pedig: $\frac{\Delta t}{1 \text{ nap}}\mu$.

Ezen valószínűségi együtthatók mellett számoljuk ki, hogy egyik napról a másikra hány emberrel gyarapodhat/szegényedhet a betegek száma. Annak lehetősége, hogy egy beteg ember egy egészségessel találkozzék: $\frac{N-Y_n}{N}$, tehát az n. napról $(n+1)$. napra virradva a vírushordozók $Y_n\frac{N-Y_n}{N}\lambda$ -val növelték a betegek számát. Ugyanekkor $Y_n\mu$ beteg meggyógyult. Tehát egy nap alatt a betegek száma így módosul:

$$Y_{n+1} - Y_n = Y_n \cdot \frac{N - Y_n}{N} \cdot \lambda - Y_n \cdot \mu$$

Legyen $y_n = Y_n/N$. Az egyenletet osztva N-el:

$$y_{n+1} - y_n = y_n \cdot (1 - y_n) \cdot \lambda - y_n \cdot \mu$$

Írjuk át az egyenletet egy tetszőleges Δt időkülönbségre felhasználva a már fentiekben említett valószínűségi változókat:

$$y(t + \Delta t) - y(t) = y(t) \cdot (1 - y(t)) \cdot \frac{\Delta t}{1 \text{ nap}} \cdot \lambda - y(t) \cdot \frac{\Delta t}{1 \text{ nap}} \cdot \mu$$

Az 1 nap mértékegységet elhanyagolva (de el NEM feledve):

$$\Delta y = y(1 - y)\lambda\Delta t - y\mu\Delta t$$

Ha $\Delta t = dt$ tetszőlegesen kicsi:

$$dy = y(1-y)\lambda dt - y\mu dt \Longrightarrow \frac{dy}{y(1-y)\lambda - y\mu} = dt \Longrightarrow \frac{dy}{y(y + \frac{\mu-\lambda}{\lambda})} = -\lambda dt$$

Legyen $\beta = \frac{\mu-\lambda}{\lambda}$,

$$\frac{1}{\beta} \cdot \frac{(y+\beta) - y}{y(y+\beta)} dy = -\lambda dt$$

Ezt integráljuk $[t_0, t]$ intervallumon. Legyen $t_0 = 0$ és $y(t_0) = y(0) = y_0$.

$$\frac{1}{\beta} \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi + \beta} \right) d\phi = -\lambda \int_{t_0}^{t} d\theta \Longrightarrow \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{y}{y_0} \cdot \frac{y_0 + \beta}{y + \beta} \right| = -\lambda t$$

Mivel y és $y_o > 0$:

$$\frac{y}{y_0} \cdot \left| \frac{y_0 + \beta}{y + \beta} \right| = e^{-\lambda \beta t}$$

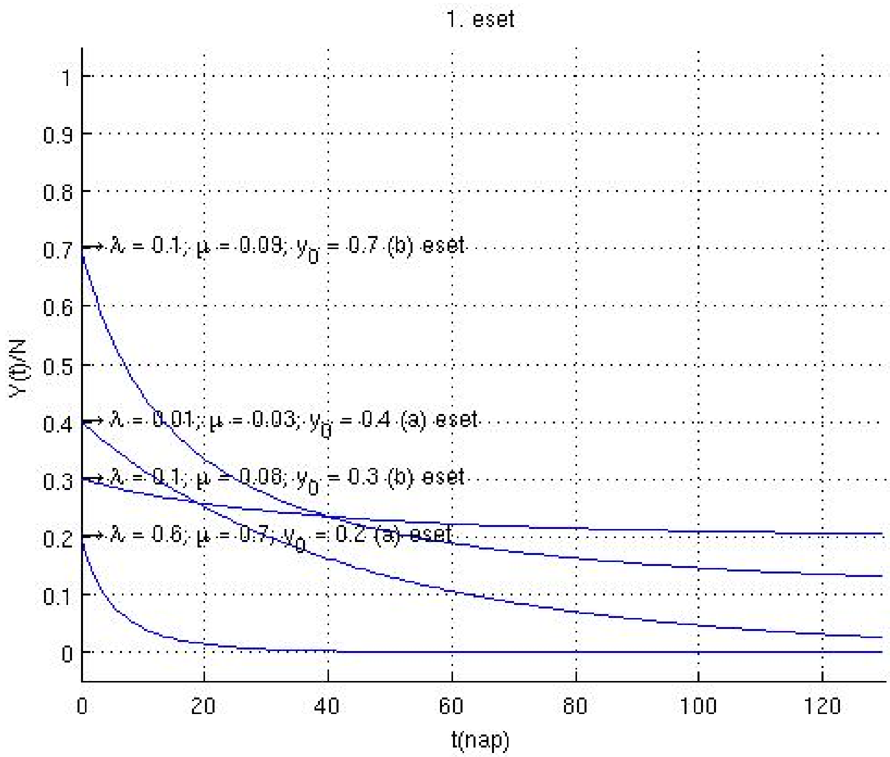
Itt feladatunk több esetre bomlik:

1. ha $y_0 + \beta > 0 \Longleftrightarrow \lambda(1 - y_0) < \mu$
   (a) ha $\lambda < \mu \Longleftrightarrow \beta > 0$
   (b) ha $\lambda > \mu \Longleftrightarrow \beta < 0$
2. ha $y_0 + \beta < 0 \Longleftrightarrow \lambda(1 - y_0) > \mu$
   (a) Tfh $\exists\ I = (a, b),\ 0 < a < b$ ú.h. $\forall\ t \in (a, b)$ -ra $\lambda(1 - y(t)) < \mu$
   (b) $\lambda(1 - y(t)) > \mu\ \forall\ t > 0$

1. $y_0 + \beta > 0 \Longleftrightarrow \lambda(1 - y_0) < \mu$

Bebizonyítjuk, hogy $y_0 + \beta > 0 \Longrightarrow y + \beta > 0$, ez csak $\beta < 0$ -ra nem triviális. Ha pedig létezne t ú.h. $y(t) - \beta < 0$ Bolzano tételből következően $c = -\beta$ -ra létezne $\xi \in (t_0, t)$ ú.h. $y(\xi) = -\beta$, ekkor viszont $\frac{y_0+\beta}{y+\beta}$ nem lenne értelmezett. Tehát a kiindulási feltétel hamis, $y(t) - \beta > 0,\ \forall\ t > 0$. Így:

$$y = \frac{y_0}{y_0 + \beta} e^{-\lambda \beta t} (y + \beta) \Longrightarrow y = \frac{(\mu - \lambda) y_0}{(\lambda y_0 + \mu - \lambda) e^{(\mu - \lambda)t} - y_0 \lambda}$$



1. ábra. 1.(a) és (b) eset különböző értékekre

$$y' = -\frac{\beta^2 \lambda y_0 (y_0 + \beta) e^{(\mu-\lambda)t}}{\left[(y_0+\beta)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\right]^2} < 0$$

A függvény szigorúan csökkenő, így $y \in (-\beta, y_0]$ $\forall\ t > 0$, tehát jogos a feltevés, miszerint: $y(t) - \beta > 0$, $\forall\ t > 0$.

(a) esetben a nevezőről, a derivált függvényének segítségével könnyen belátható, hogy $(\lambda y_0 + \mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\lambda > \mu - \lambda > 0$. (b) esetben pedig, $-y_0\lambda < (\lambda y_0 + \mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\lambda < \mu - \lambda < 0$, tehát a nevező minden időpillanatban értelmezett. Vizsgáljuk mindkét alesetben az y(t) függvény határértékét.

$$\text{(a) esetben: } \lim_{t\to\infty} \frac{(\mu-\lambda)y_0}{(\lambda y_0 + \mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\lambda} = 0, \text{ mert } \mu - \lambda > 0$$

$$\text{(b) esetben: } \lim_{t\to\infty} \frac{(\mu-\lambda)y_0}{(\lambda y_0 + \mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\lambda} = -\beta, \text{ mert } \mu - \lambda < 0$$

Megfigyelendő, hogy mindkét határérték független a betegek számától a kezdeti időpillanatban. ***(3. ábra)***

2. $y_0 + \beta < 0 \iff \lambda(1 - y_0) > \mu$

A feltételből következik, hogy $\lambda > \mu$

(a) eset

Tfh $\exists\ I = (a, b),\ 0 < a < b$ ú.h. $\forall\ t \in I$ -re $\lambda(1 - y(t)) < \mu$. Legyen I a legelső ilyen intervallum. Ezen az halmazon:

$$\frac{y}{y_0} \cdot \frac{-(y_0 + \beta)}{y + \beta} = e^{(\lambda-\mu)t} \Longrightarrow y = \frac{y_0}{-(y_0 + \beta)} e^{(\lambda-\mu)t}(y+\beta) \Longrightarrow y = -\frac{y_0\beta}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta t} + y_0}$$

$$\text{Tehát: } y = \begin{cases} \dfrac{\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta t} - y_0}, & \text{ha } t \in (0, a) \\ c, & \text{ha } t = a \\ -\dfrac{\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta t} + y_0}, & \text{ha } t \in (a, b) \end{cases}$$

y függvény beláthatóan folytonos $[0, \infty)$ intervallumon $\Longrightarrow$

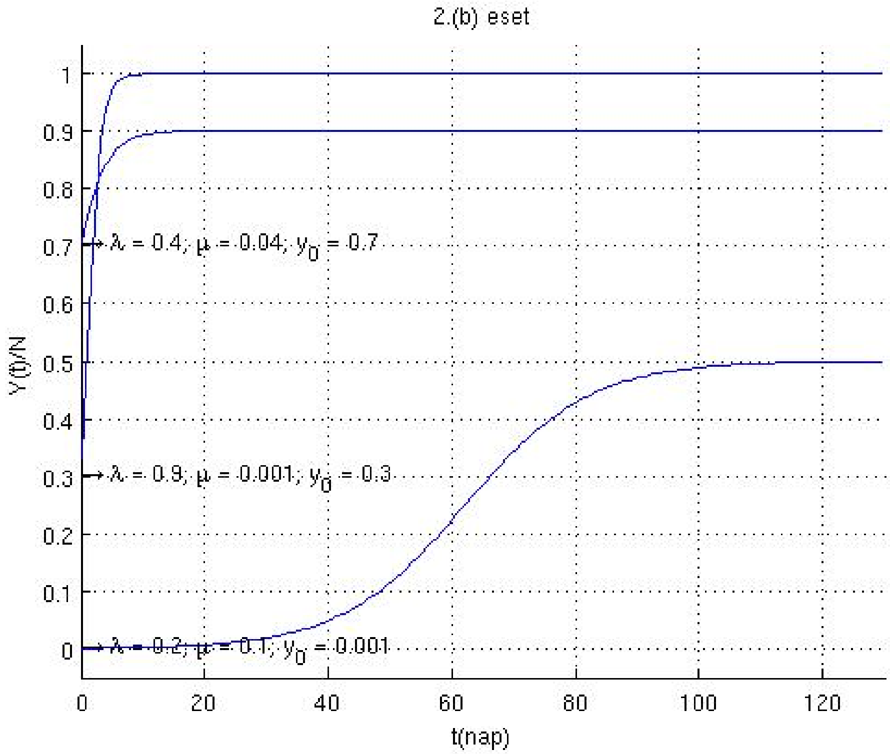
$$\lim_{t \to a-} \frac{\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta t} - y_0} = y(a) = \lim_{t \to a+} \frac{-\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta t} + y_0} \Longrightarrow$$

$$\frac{\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta a} - y_0} = \frac{-\beta y_0}{(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta a} + y_0} \Longrightarrow 2(y_0 + \beta)e^{\lambda\beta a} = 0$$

Ez pedig lehetetlen. Még egyszerűbb, ha feltételezzük, hogy $\exists\ t > 0$ ú.h. $y(t) + \beta > 0$ akkor Bolzano tétel következményeképpen $\exists\ \xi \in (t_0, t)$ ú.h. $y(\xi) = -\beta$ tehát erre az értékre a függvény nem értelmezett, ami ellentmondás.

(b) eset

$$\frac{y}{y_0} \cdot \frac{-(y_0 + \beta)}{-(y + \beta)} = e^{(\lambda-\mu)t} \Longrightarrow y = \frac{(\mu - \lambda)y_0}{(\lambda y_0 + \mu - \lambda)e^{(\mu-\lambda)t} - y_0\lambda}$$



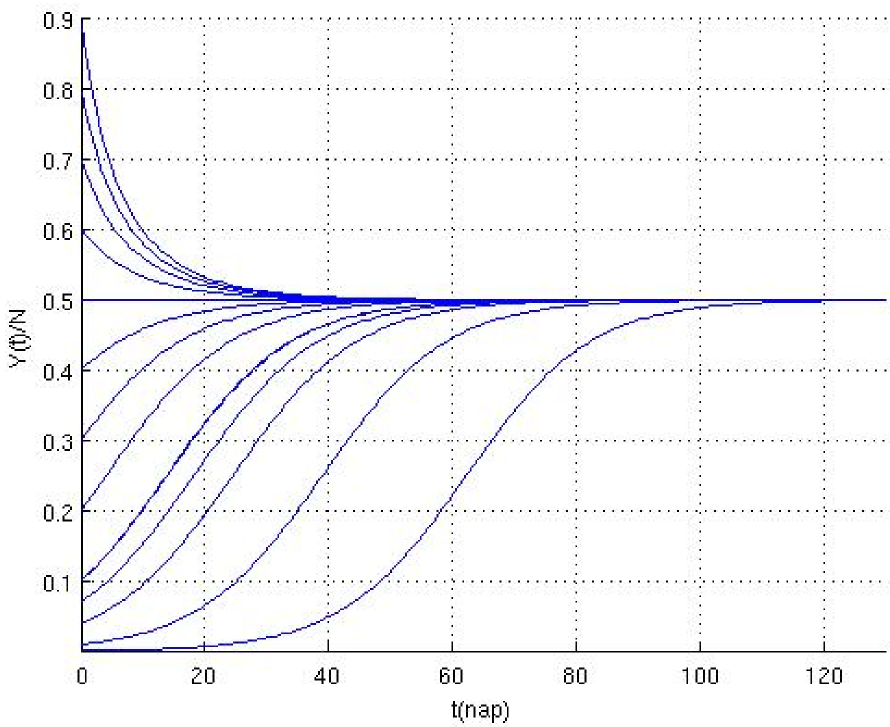
2. ábra. 2.(b) eset különböző értékekre

Megkaptuk az 1. esetben használatos függvényt, tehát a feladat globális megoldása:

$$y = \frac{(\mu - \lambda) y_0}{(\lambda y_0 + \mu - \lambda) e^{(\mu - \lambda) t} - y_0 \lambda} \quad \forall \begin{cases} 0 < \mu < 1 \\ 0 < \lambda < 1 \ \text{ esetén, és } \forall \ t > 0 \\ 0 < y_0 < 1 \end{cases}$$

Észrevehető, hogy $y(t)$ még akkor sem tart 1-hez, ha a megbetegedési ráta jóval nagyobb a meggyógyulások valószínűségénél. Ez csak akkor érhető el, ha $\mu = 0$.

A feladat még érdekesebbé tehető, ha figyelembe vesszük az elhalálozási/születési rátát is, illetve az emberek egymással való találkozását is valószínűsítjük.



3. ábra. Állandó valószínűségi ráták mellet, különböző kezdeti értékekre ($\lambda = 0.2;\ \mu = 0.1$)