12. hét

Témák:

- Improprius integrál
- Az integrálszámítás alkalmazásai
- Diffegyenletek - fizikai példák
- Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Órai feladatok:

Improprius integrál

(Beszéljétek meg azt is, hogy miért "improprius" egy-egy integrál. Feladat'megoldása előtt: mit várunk?)

1. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$
2. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
3. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx$
4. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Az integrálszámítás alkalmazásai

5. Számítsuk ki az $y = x^2$ és az $y = 1 - x^2$ egyenletû görbék által közrezárt síkidom területét.
6. Számítsuk ki az $f(x) = x^{3/2}$ függvény gráfjának hosszát az $(1, 1)$ és $(4, 8)$ pontok között.
7. Forgassuk meg az alábbi görbét az x tengely körül. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát:
$$y = e^{2x}, \qquad 0 \le x \le 2$$

Diffegyenletek - fizikai példák.

8. **Tartályok lehűlése**

   Legyen egy folyadéktartály hőmérséklete a t időpillanatban $T(t)$. Feltesszük, hogy
$$T(0) = T_0$$
   és a külső hőmérséklet T_k. Tegyük fel, hogy $T_0 > T_k$.

Fizikai meggondolás alapján a *hőmérséklet megváltozása arányos a tartálybeli és külső hőmérséklet eltérésével.* Formálisan:

$$\Delta T(t) \approx T(t) - T_k$$

Határátmenettel az alábbi DE-t kapjuk:

$$T' = -b(T - T_k),$$

ahol b jelöli az arányossági tényezőt.

Mivel

$$(T - T_k)' = T' = -b(T - T_k), \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(T - T_k)'}{T - T_k} = -b,$$

így

$$\ln(T - T_k) = -bt + c \qquad \Longrightarrow \qquad T(t) = T_k + Ce^{-bt}.$$

A kezdetiérték feladat megoldása (partikuláris megoldás) :

$$T(0) = T_k + C \qquad \Rightarrow \qquad C = T(0) - T_k$$

(+Ábra, $T(t) \to T_k$, nem meglepő...)

9. **Inga mozgása** (Tartalék, nem KELL elmondani.)

Az inga kitérésének szöge időben változik, $\theta = \theta(t)$. Erre a függvényre írunk fel egy differenciálegyenletet a fizikai törvények alapján.

Az ingára ható erõk egyenletei (egyensúly + Newton II.):

$$mg\cos\theta = K$$

$$mg\sin\theta = ma = -ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ha a θ szög kicsi, $\sin\theta$ közelíthetõ az elsõrendû Taylor-taggal, azaz magával θ-val. A differenciálegyenlet így a következõ alakra egyszerûsödik:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

melynek általános valós megoldása:

$$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi\right)$$

Érdekesség: A rezgõmozgás periódusideje nem függ a felfüggesztett tömegtõl, csak az inga hosszától és a gravitáció nagyságától! Vajon a fali ingaóra milyen hosszú legyen 1 másodperces (fél)periódusidõhöz?

Nem fizikusoknak az összes használt betû:

K	- ébredõ kötélerõ
A	- amplitúdó (kezdeti feltételektõl függ)
φ	- fázis (kezdeti feltételektõl függ)
$\frac{d^2\theta}{dt^2}$	- szöggyorsulás
a	- gyorsulás (a szöggyorsulás sugár(l)-szorosa)

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

10. $$y' = y^2$$

11. $$y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$$

12. $$y' = \frac{1}{y \cdot (9+4x^2)}$$

Házi feladatok

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-x^2/2} dx = ?$

2. $\int\limits_{0}^{\infty} (x-1) \cdot e^{-x} dx = ?$

3. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx = ?$

4. $\int_{-\infty}^{-3} xe^x \; dx = ?$

5. $\int_4^{\infty} \frac{1}{x\ln x} \; dx = ?$

6. $\int_0^4 \ln x \; dx = ?$

7. Számítsuk ki az $y = x + 6$, az $y = x^3$ és az $x + 2y = 0$ egyenletû görbék által határolt síkidom területét.

8. Számítsuk ki az $y = x^2$ és $y = 3x - 1$ egyenletû görbék által közrezárt síkidom területét.

9. Számítsuk ki az alább megadott görbe ívhosszát az $A(8; 2)$ és a $B(27; 17)$ pontjai között:
$$f(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 10$$

10. Számítsuk ki az $f(x) = \ln(1 - x^2)$ függvény gráfjának hosszát az $x \epsilon [0, \frac{1}{2}]$ intervallun fölött.

11. Forgassuk meg a következő görbét az x tengely körül. Határozza meg a keletkező forgástest térfogatát!
$$y = \frac{x^3}{3}; \quad 1 \le x \le 2$$

12. Forgassuk meg az alábbi görbét az x tengely körül. Határozzuk meg a keletkező forgástest térfogatát:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad 1 \leq x \leq 4$$

13. $$y' = \frac{1}{y \cdot (1 + 9x^2)}$$

14. $$y' = \mathrm{ctg}(x) \cdot y$$