M7: Számítsuk ki az $y = e^x$ egyenletű görbe [0,1] intervallumra való leszűkítése által kapott ponthalmaz Ox tengely körüli megforgatásából származó test felületét.

$$I_0 = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1+e^{2x}} dx$$

$$\left.\begin{array}{l} t := e^x \\ \ln t = x \\ \dfrac{dt}{t} = dx \\ \begin{cases} x_1 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = 1 \\ t_2 = e \end{cases} \end{array}\right| \text{Változócsere}$$

$$I_0 := 2\pi \int_1^e \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \int_1^e \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + 2\pi \int_1^e x \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx =$$

$$= 2\pi \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + 2\pi \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_1^e - 2\pi \int_1^e \sqrt{1+x^2} =$$

$$= 2\pi \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + 2\pi \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_1^e - I_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_0 = \pi \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \pi \left[x\sqrt{1+x^2}\right]_1^e$$

$$I_1 := \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} t := \sqrt{1+x^2} + x \\ \sqrt{1+x^2} = t - x \Longrightarrow 1 + x^2 = t^2 - 2tx + x^2 \Longrightarrow x = \dfrac{t^2-1}{2t} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ t_1 = \sqrt{2}+1 \end{cases} ; \begin{cases} x_2 = e \\ t_2 = \sqrt{1+e^2}+e \end{cases} \end{array} \right| \text{Euler féle változócsere}$$

$$I_1 = \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e} \frac{1}{t-x} \cdot \frac{t^2}{2t^2} dt = \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e} \frac{2t}{2t^2-(t^2-1)} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt =$$

$$\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e} \frac{1}{t} dt = \Big[\ln|t| \Big]_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{1+e^2}+e} = \ln(\sqrt{1+e^2}+e) - ln(\sqrt{2}+1) =$$

$$= \operatorname{arsh} e - \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$I_0 = \pi I_1 + \pi \Big[x\sqrt{1+x^2} \Big]_1^e = \pi \operatorname{arsh} e - \pi \ln(\sqrt{2}+1) + \pi e\sqrt{1+e^2} - \pi\sqrt{2}$$