"Tornyos" feladat

9. hét

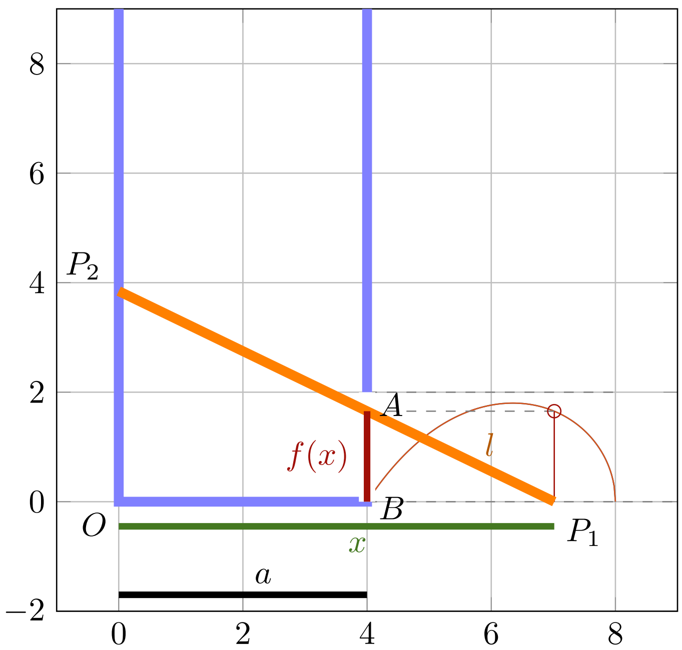
2016. november 23.

2. feladat. Egy $a = 4$m átmérőjű (egyenes körhenger alakú) torony alján $h = 2$m magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba egy $L = 8$m hosszú, vékony rúd úgy, hogy mozgása a torony-ajtó alakzat szimmetria-síkjában zajlik?

Megoldás.

A rudat oly módon próbálom meg bevinni, hogy az egyik végét odatolom a torony belső falákoz, majd a belső falnál lassan emelni kezdem, ennek következtében a rúd külső vége szép lassan elkezd a torony ajtaja felé csúszni.

Számoljuk ki, hogy ezen módszer mellett a rúd milyen magasan áll a kapu vonalában ($f(x)$), és ezt fejezzük ki x függvényében, ahol x a rúd külső vége és a torony belső fala közötti távolságot jelöli. Ha a rúd magassága a kapu vonalában minden $x \in [a, L]$-re kisebb mint h, akkor befér, de ehhez ki kell számolnunk $f(x)$ maximumát.



1. ábra.

Tömören:

- $a = OB$ a torony átmérője
- $L = P_1P_2$ a rúd, amint elkezdjük bevinni a toronyba
- az OP_1 és AP_1 szakaszokat jelöljük x-el és l-el
- az AB és szakaszt jelöljük $f(x)$-el. Ennek hossza függ x hosszától.

Ezek alapján a feladatot a következő képpen fogalmazhatjuk át: $f(x)$ értéke kisebb-e mint h, ha $x \in [a, L]$.

A $P_1P_2O_\triangle$ és $P_1AB_\triangle$ háromszögek hasonlóságából tudjuk, hogy:

$$\frac{L}{x} = \frac{l}{x-a} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{(x-a)L}{x} \tag{1}$$

A $P_1AB_\triangle$ háromszögben Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$f(x) = \sqrt{l^2 - (x-a)^2} \tag{2}$$

Behelyettesítve l értékét kapjuk, hogy

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-a)^2L^2}{x^2} - (x-a)^2} = \frac{x-a}{x}\sqrt{L^2 - x^2} = \left(1 - \frac{a}{x}\right)\sqrt{L^2 - x^2} \tag{3}$$

Tehát a kaptunk egy relatíve szépnek mondható függvényt $f(x)$-re, aminek keressük a maximális érték:

$$f(x) = \left(1 - \frac{a}{x}\right)\sqrt{L^2 - x^2} \tag{4}$$

Ezért deriválom:

$$f'(x) = \frac{a\sqrt{L^2 - x^2}}{x^2} - \frac{x\left(1 - \frac{a}{x}\right)}{\sqrt{L^2 - x^2}} = \frac{aL^2 - x^3}{x^2\sqrt{(L-x)(L+x)}} = 0 \tag{5}$$

Ez akkor lesz nulla, ha a számláló nulla, vagyis

$$aL^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt[3]{aL^2} \tag{6}$$

Ha ezt az értéket behelyettesítem $f(x)$-be kapom:

$$f^* = f(x^*) \simeq 1.8 \tag{7}$$

Ez azt jelenti, hogy ha ilyen módszerrel tolom be a rudad a toronyba, a rúd legrosszabb esetben 0.2m-rel a kapu felső része alatt elsurranni.