Taylor sorfejtés segédlet

9. hét anyagát kiegészítve

2016. november 21.

9. feladat. Legyen $f(x) := \ln(1+x) \quad (x \in \mathbb{R}, x > -1)$

1. $f^{(n)}(x_0) = ?$ $x_0 = 0$, (sejtés + indukció)
2. $T_3(x) = ?$ (a harmadik Taylor-polinom, $x_0 = 0$ körül)
3. $|f(x) - T_3(x)| \leq ?$ ha $x > 0$
4. Becsüljük meg az $\ln(2) \approx T_3(1)$ közelítés hibáját

Megoldás.
1. $f^{(n)}(x_0) = ?$ $x_0 = 0$, (sejtés + indukció)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{(páratlan: pozitív)} \tag{1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad \text{(páros: negatív)} \tag{2}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \qquad \text{(páratlan: pozitív)} \tag{3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} \qquad \text{(páros: negatív)} \tag{4}$$

Az előző deriváltakból *sejthető*, hogy az n-edig derivált a következő képpen néz ki:

$$\boxed{f^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}} \tag{5}$$

Ezen feltételezésemet indukcióval bizonyítani kell:
1. $n = 1, 2, 3, 4$-re kiszámoltuk.
2. Feltételezem, hogy $(n-1)$-re valóban működik az a képlet, amit az (5)-ben megadtam, vagyis:

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}, \tag{6}$$

és igazolom, hogy ennek felhasználásával n-re is jó az (5) képlet, vagyis még egyszer deriválom $f^{(n-1)}(x)$-et, ha $f^{(n)}(x)$-re megkapom az (5)-et, akkor a feltételezés igaz.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}(x) &= \left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \left((-1)^n \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\right)' = \\
&= \left(\underbrace{(-1)^n (n-2)!}_{\text{nem függ } x\text{-től}} (1+x)^{-(n-1)}\right)' \\
&= (-1)^n (n-2)! \left((1+x)^{-(n-1)}\right)' \\
&\text{elvégzem a deriválást:} \\
&= (-1)^n (n-2)! \left(-(n-1) \cdot (1+x)^{-(n-1)-1} \cdot (1+x)'\right) \\
&= (-1)^n (n-2)! \left(-(n-1) \cdot (1+x)^{-n+1-1}\right) \\
&= (-1)^n (n-2)! \left(-(n-1) \cdot (1+x)^{-n}\right) \\
&= \underbrace{(-1)^n \cdot (-1)}_{(-1)^{n+1}} \cdot \underbrace{(n-2)! \cdot (n-1)}_{(n-1)!} \cdot (1+x)^{-n} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n} \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^{-n}} \qquad \text{Ezt akartuk bebizonyítani az indukció során.}
\end{aligned}$$

2. $T_3(x) = ?$ (a harmadik Taylor-polinom, $x_0 = 0$ körül)

Általában az n-edik Taylor polinom x_0 körül:

$$f(x) \approx \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{7}$$

Tehát $T_3(x)$ polinom $x_0 = 0$ körül:

$$T_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \tag{8}$$

Ki kell számítanom: $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ értékeit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & & & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & & & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & &\Rightarrow & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} & & & f'''(0) &= 2 \end{aligned}$$

Ha ezen értékeket behelyettesítem $T_3(x)$-be kapom, hogy:

$$\boxed{T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}} \tag{9}$$

3. $|f(x) - T_3(x)| \leq ?$ ha $x > 0$, vagyis a $T_3(x)$ Taylor polinommal vett becslés hibájának felső becslését kell kiszámolnunk.

1. Tétel (Taylor féle maradéktag)**.** *Legyen $T_n(x)$ polinom az $(n+1)$-szer diffható $f(x)$ függvény x_0 körül vett n-edik Taylor polinomja.*
Ha $x_0 < x$, akkor $\exists \xi \in [x_0, x]$
Ha $x < x_0$, akkor $\exists \xi \in [x, x_0]$, melyre a Taylor közelítés hibája:

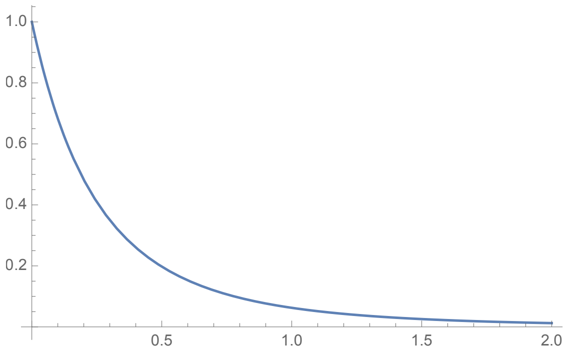
$$L_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{10}$$

A hiba felső becslése, vagyis az $|f(x) - T_n(x)|$ abszolút különbség a következő képpen számolható ki:

$$\boxed{\Big|f(x) - T_n(x)\Big| = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\xi\in[x_0,x]} \Big|f^{(n+1)}(\xi)\Big|} \tag{11}$$

Tehát $T_3(x)$ hibája, ha $x_0 = 0$ körül:

$$\begin{aligned} \Big|\ln(x+1) - T_3(x)\Big| &= \frac{|x-0|^4}{4!} \sup_{\xi\in[0,x]} \Big|f^{(4)}(\xi)\Big| & & \text{(tudjuk, hogy } x > 0) \\ &= \frac{x^4}{4!} \sup_{\xi\in[0,x]} \left|-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+\xi)^4}\right| & & \text{lásd } f(x) \text{ negyedik deriváltja: (4)} \\ &= \frac{x^4}{4} \sup_{\xi\in[0,x]} \left[\frac{1}{(1+\xi)^4}\right] \end{aligned}$$



Ábra nélkül is könnyen észrevehető (kellene legyen), hogy a $\frac{1}{(1+\xi)^4}$ függvény 0-ban veszi fel a legynagyobb értékét, vagyis:

$$\sup_{\xi\in[0,x]} \left[\frac{1}{(1+\xi)^4}\right] = 1 \tag{12}$$

Tehát a harmadik Taylor polinommal történő közelítési hibája a $\ln(1+x)$ függvénynek felülről becsülhető:

$$\Big|\ln(x+1) - T_3(x)\Big| = \frac{x^4}{4} \tag{13}$$

4. Becsüljük meg az $\ln(2) \approx T_3(1)$ közelítés hibáját.

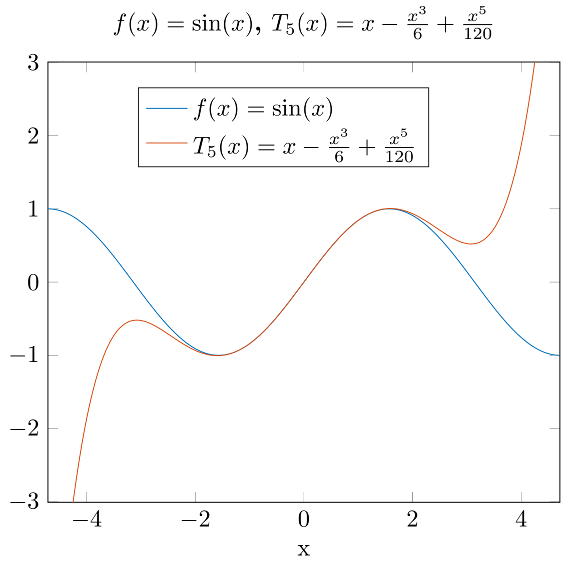
$$\Big|\ln(2) - T_3(1)\Big| = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=1} = \frac{1}{4} \tag{14}$$

10. feladat. Legyen $f(x) = \sin(x)$.

1. Írjuk fel a T_5 polinomot $x_0 = 0$ vásztással. Mit vehetünk észre? (A páros indexű hatványok hiánya, miért?)
2. Adjunk olyan becslést $\sin(62°)$-re – megfelelő fokú Taylor polinommal–, melynek hibája kisebb 10^{-2}-nél. (Itt majd másik x_0 kell!)

Megoldás.
1. Írjuk fel a T_5 polinomot $x_0 = 0$ vásztással.

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sin(x) & f(0) = \sin(0) = 0 & \to \text{ 0. tag: } f(0) = \mathbf{0} \\
f'(x) = \cos(x) & f'(0) = \cos(0) = 1 & \to \text{ 1. tag: } \frac{f'(0)}{1!}x = \frac{x^1}{1!} = x \\
f''(x) = -\sin(x) & f''(0) = -\sin(0) = 0 & \to \text{ 2. tag: } \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \mathbf{0} \\
f'''(x) = -\cos(x) & f'''(0) = -\cos(0) = -1 & \to \text{ 3. tag: } \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = -\frac{x^3}{3!} = -\frac{x^3}{6} \\
f^{(4)}(x) = \sin(x) & f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0 & \to \text{ 4. tag: } \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = \mathbf{0} \\
f^{(5)}(x) = \cos(x) & f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1 & \to \text{ 5. tag: } \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120} \\
\hline
f^{(6)}(x) = -\sin(x) & f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0 & \to \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = 0 \quad \text{lenne, de} \\
 & & \to \frac{\cos(\xi)}{6!}x^6 \qquad \text{erre most nincs szükség}
\end{array}$$



Tehát az 5-öd rendű Taylor közelítő polinom:

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \tag{15}$$

2. Adjunk olyan becslést $\sin(62°)$-re – megfelelő fokú Taylor polinommal–, melynek hibája kisebb 10^{-2}-nél. Itt érdemesebb $x_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$-nak választani.

Alapkoncepció: felírom először ($n = 1$)-re a Taylor polinomot, kiszámítom a közelítés hibáját, ha kisebb mint 10^{-2}, akkor megállok, ha nem, akkor kiszámítom a Taylor polinomot ($n = 2$)-re, stb...

1. próbálkozás: $n = 1$

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \sin(x) & f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \to \text{ 0. tag: } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
f'(x) = \cos(x) & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \to \text{ 1. tag: } \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\
\hline
f''(x) = -\sin(x) & L_1(x) = \sin(x) - T_1(x) = -\frac{\sin(\xi)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 &
\end{array}$$

$$\left|\sin(62°) - T_1(62°)\right| = \frac{1}{2}\left(62° - \frac{\pi}{3}\right)^2 \sup_{\xi \in \left[\frac{\pi}{3}, 62°\right]} \left|\sin(\xi)\right| \tag{16}$$

Mivel a sinus növekvő $\frac{\pi}{3}$ körül, ezért $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) < \sin(62°)$. Tehát:

$$\left|\sin(62°) - T_1(62°)\right| = \frac{1}{2}\left(62° - \frac{\pi}{3}\right)^2 \sin(62°) \simeq 0.007 \tag{17}$$

Vagyis $T_1(62^\circ)$ kielégítő pontossággal közelíti $\sin(62^\circ)$-t.

$$T_1(62^\circ) = \frac{1}{2}\left(62^\circ - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.88 \qquad \text{csak a szignifikáns jegyekre vagyunk kíváncsiak (első kettő)} \tag{18}$$

$$T_5(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{16\sqrt{3}} + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 \tag{19}$$

Mathematica-val így lehet egyszerűen Taylor polinomot számolni:

In[1] := $\text{Series}\left[\text{Sin}[x], \left\{x, \frac{\pi}{3}, 5\right\}\right] \mathbin{//} \text{TraditionalForm}$

Out[1] := $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{16\sqrt{3}} + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + O\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6\right)$

In[2] := $\text{Normal}\left[\text{Series}\left[\text{Sin}[x], \left\{x, \frac{\pi}{3}, 5\right\}\right]\right]$

Out[2] := $\frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$

(* Behelyettesítés és numerikus közelítés *)

In[3] := $N\left[\%/. \left\{x \to \frac{62\pi}{180}\right\}\right]$ (* A százalékjel az előző kimenet értéket jelenti *)

Out[3] := 0.882948