9. hét

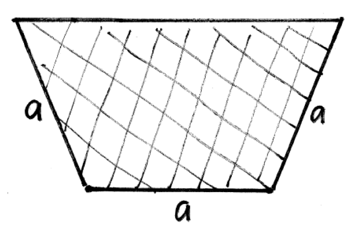
Témák:

- Szélsõérték
- L'Hôpital szabály
- Függvényvizsgálat
- Taylor formula

Órai feladatok:

Szélsõérték

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 8$ függvény maximumát, ha
   (a) $x \epsilon \mathbb{R}$,
   (b) $0 \leq x \leq 1$! (Figyeljünk a végpontokra is...)
2. Csatornát készítünk a szélességű deszkából az ábrán látható módon. Milyen legyen a dőlésszög, hogy a keresztmetszet maximális legyen?



L'Hôpital szabály. Különböző típusú kritikus határértékek.

3. ($\frac{0}{0}$ alak): $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\arcsin(x)} = ?$
4. (1^∞ alak): $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = ?$
5. ($\infty - \infty$ alak): $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) = ?$

Függvényvizsgálat

Vizsgálja meg az alábbi függvényeket (ÉT/ÉK, folytonosság, szakadási helyek és osztályozásuk, monotonitás, szélsõérték, konvexitás, inflexiós pontok, grafikon felvázolás):

6. (Ez a feladat lehet konzultáción.)

$$f(x) := x^3 - x^2 - 2x$$

7.

$$f(x) := x^2 \cdot e^x$$

8. (Lássanak szakadásos függvényt is.)

$$f(x) := \frac{1}{1 - x^2}$$

Taylor formula (Egyik feladat lehet konzultáción.)

9. Legyen $f(x) := \ln(1 + x) \quad (x \epsilon \mathbb{R}, x > -1)$
   (a) $f^{(n)}(x_0) =?$ $x_0 = 0$, (sejtés + indukció)
   (b) $T_3(x) =?$ (a harmadik Taylor-polinom, $x_0 = 0$ körül)
   (c) $|f(x) - T_3(x)| \leq ?$ ha $x > 0$
   (d) Becsüljük meg az $\ln(2) \approx T_3(1)$ közelítés hibáját
10. Legyen $f(x) = \sin(x)$.
   (a) Írjuk fel a T_n polinomot $x_0 = 0$ vásztással $n = 1, 2, 3, 4, 5$-re. Mit vehetünk észre? (A páros indexű hatványok hiánya, miért?)
   (b) Adjunk olyan becslést $\sin(62°)$-re – megfelelő fokú Taylor polinommal–, melynek hibája kisebb 10^{-2}-nél. (Itt majd másik x_0 kell!)