

9. hét

Házi feladatok

1. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha } x \leq 4 \\ ax + b & \text{ha } x > 4 \end{cases}$$

Határozzuk meg a és b értékét úgy, hogy a függvény mindenütt differenciálható legyen.

2. R sugarú körlemezről mekkora körcikket kell kivágni, hogy a maradékból maximális térfogatú tölcserő lehessen hajtogatni?
3. Egységnyi sugarú félgömbbe írjunk maximális térfogatú hengert.
4. Egy $4m$ átmérőjű (egyenes körhenger alakú) torony alján $2m$ magas ajtó van. Bevihető-e a toronyba egy $8m$ hosszú, vékony rúd úgy, hogy mozgása a torony-ajtó alakzat szimmetria-síkjában zajlik?
5. Keressük meg az $y = \sqrt{x}$ görbének azt a pontját, ami legközelebb van a $(2, 0)$ ponthoz.

6. Egy mozgó tárgy mozgási energiája $\frac{1}{2}mv^2$. Pontosabban, ha m és v az idő függvényei, akkor a mozgási energia $\frac{1}{2}m(t)v^2(t)$.

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pillanatban a test tömege $5g$, mely másodpercenként $2g$ -mal növekszik. A test sebessége $3m/s$, mely $1m/s$ -mal csökken másodpercenként.

A mozgási energia növekszik vagy csökken? Mekkora sebességgel?

7. Egy $3m$ hosszú létrát a falhoz támasztunk. A létra aljának a faltól vett távolsága x , a létre tetejének magassága y . Határozza meg y változásának sebességét x függvényében.
8. Számoljuk ki az alábbi határértékeket a L'Hôpital szabály segítségével:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{\arcsin(x) - x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^a}{\ln \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x))^{\frac{1}{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch}(x+a)}{\operatorname{ch}(x-a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$$

9. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken:

(a)

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

(b)

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

(c)

$$f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{1+x}$$

(d)

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

(e)

$$f(x) = x \ln(x)$$

10. Legyen $f(x) = \cos(x)$.

- (a) Írjuk fel a T_n polinomot $x_0 = 0$ vásztással $n = 1, 2, 3, 4, 5$ -re. Mit vehetünk észre?
(A páratlan indexű hatványok hiánya, miért?)
- (b) Adjunk becslést $\cos(44^\circ)$ -ra, melynek hibája kisebb 10^{-2} -nél.