Majoráns-, hányados-, gyök- és Leibniz-kritérium

Majoráns-kritérium -- Legyen (a_n) és (b_n) olyan, hogy egy indext?l kezd?d?en $|a_n| \leq |b_n|$ és $\sum(b_n)$ konvergens. Ekkor $\sum(a_n)$ is konvergens (és $\sum(b_n)$ a majoráns sora).

Hányados-kritérium -- Legyen (a_n) olyan, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

1. ha $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor $\sum(a_n)$ konvergens és
2. ha $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, akkor $\sum(a_n)$ divergens.

Gyök-kritérium -- Legyen (a_n) olyan, hogy létezik a $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

1. ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $\sum(a_n)$ konvergens és
2. ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor $\sum(a_n)$ divergens.

Leibniz-kritérium -- Ha $|a_n|$ monoton csökken? módon tart a 0-hoz, akkor $\sum((-1)^n a_n)$ konvergens.

1.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^3}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+3n^2+8}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin\frac{1}{n^2}$

Mo.

$$\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 2\frac{1}{e} < 1$$

Függvénysorozatok

Az azonos A   **C** halmazon értelmezett komplex vagy valós függvények $f_n : A \to \mathbf{C}$ sorozatának konvergenciatartományán azzon K halmazt értjük, melyhez pontosan akkor tartozik az x pont, ha az ($f_n(x)$) sorozat konvergens.

2. Függvénysorozatok pontonkénti konvergenciája

1. $$f_n(z) = \frac{zn^2 + 6n}{3n^2 + zn}$$
2. $$f_n(z) = \frac{z^{n+4}}{3}$$
3. $$f_n(x) = \frac{x^n}{n(1 + x^{2n})}$$
4. $$f_n(x) = n \sin\frac{x}{n}$$

Mo. 1. Ha z=-3n, akkor a -z/4. tagja a sorozatnak nincs értelmezve a z pontban. Ezért a közös értelmezési tartomány: **C** \ {-3n | n}. Ebben az esetben a nevez? n-ben legmagasabb fokú tagjával leosztva:

$$f_n(z) = \frac{z + 6\frac{1}{n}}{3 + z\frac{1}{n}} \to \frac{z}{3}$$

2.

$$f_n(z) = \frac{z^n z^4}{3} = z^n \cdot \frac{z^4}{3}$$

de rögzített *z*-re ez egy mértani sorozat, azaz a konvergens |z|<1-re és akkor amikor z=1.

3. [-1,1)

4.

$$f_n(x) = x\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to 1 \cdot x$$

Hatványsorok

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Hatványsor konvergenciahalmaza valós sor esetén intervallum, komplex esetén körlap.

3. Határozzuk meg a sorok konvergenciakörét és a határpontokban a sor konvergenciáját.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3\, 2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^4}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n x^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3}$